第24卷 第6期　　自 动 化 学 报　　Vol. 24, No. 6
1998年11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1998

短 文

循环组合系统的结构性质[1)]

黄守东　　张嗣瀛
（东北大学自动控制系　沈阳　110006）

摘　要　研究了循环组合系统的结构性质.结果表明,由于其结构的特殊性,循环组合系统的结构能控性和结构固定模的存在性,可以通过其修正子系统的结构能控性和结构固定模的存在性来得到.

关键词　组合系统,结构能控性,结构固定模.

1　引言

大系统控制的主要困难之一是大系统的高维性.虽然大系统的许多分析和设计问题可用与一般系统相同的方法去研究,但由于其维数很高,计算量太大,很多问题非常难以解决.

对于一些特殊的组合系统,我们可以利用系统的特殊结构,简化其分析和设计.比如对称组合系统[1]和相似组合系统[2]的很多分析和设计问题都可以得到简化.本文考虑另一类具有特殊结构的系统——循环组合系统,这类系统的状态矩阵是块循环的.循环组合系统具有广泛的实际背景,例如造纸机的横向控制系统等等[3,4].对于循环组合系统,Brockett 在文[3]中研究了它的一些基本性质,如能控性、能观性、稳定性等;Hovd[4]研究了对称循环组合系统的 H_2和 H_∞控制问题.本文研究循环组合系统的结构性质.

2　预备知识

记 $\overline{M}$ 为与矩阵 M 相对应的结构矩阵,$r(\overline{M})$表示结构矩阵 $\overline{M}$ 的通秩(generic rank),$\widetilde{M}=\{M':\overline{M}'=\overline{M}\}$.两个系统$(A^1,B^1,C^1)$和$(A^2,B^2,C^2)$称为是结构等价的,是指 $\overline{A}^1=\overline{A}^2$,$\overline{B}^1=\overline{B}^2$及 $\overline{C}^1=\overline{C}^2$.如果结构矩阵 $\overline{M}_1$和 $\overline{M}_2$具有相同的尺寸,那么 $\overline{M}_1$与 $\overline{M}_2$的和 $\overline{M}_1+\overline{M}_2$定义为:它的元素在 $\overline{M}_1$或 $\overline{M}_2$任意元素的位置上是任意的;在其它位置上,它的元素是零.

设 $G=(V,E)$是一个有向图,其中 V 是结点集,E 是有向边的集合.如果$(v_j,v_i)\in E$,则称 v_j 邻接于 v_i,记作 $v_j\rightarrow v_i$.有向边序列$\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\cdots,(v_{k-1},v_k)\}$(这里所有的结点都互不相同)称为由结点 v_1到结点 v_k 的一条道路.此时,称结点 v_k 是自结点 v_1可达

1)国家自然科学基金和国家教委高校博士点专项基金资助项目.
收稿日期　1996-08-22

的,记作 $v_1 \xrightarrow{R} v_k$. 如果 v_k 和 v_1 重合,那么这个序列称为是一个圈. 图 $G_0=(V_0,E_0)$ 称为是 $G=(V,E)$ 的子图,是指 $V_0\subset V,E_0\subset E$. 图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 称为是互不相交的,是指 $V_1\cap V_2=\Phi$. 子图 G_0 称为是 G 的一个强支,是指 G_0 中的任何两个结点都是相互可达的,并且 G_0 是满足这个条件的极大子图.

系统 $\Sigma_s=(A_s,B_s,C_s)$ 的图 $G(A_s,B_s,C_s)=(V(A_s,B_s,C_s),E(A_s,B_s,C_s))$ 定义为 $V(A_s,B_s,C_s)=X_s\cup U_s\cup Y_s$,其中 $X_s=(x_1,\cdots,x_n)$,$U_s=(u_1,\cdots,u_r)$ 和 $Y_s=(y_1,\cdots,y_p)$ 分别是系统 Σ_s 的状态、输入和输出的结点集,有向边 $(v_j,v_i)\in E(A_s,B_s,C_s)$ 定义为在关于变量 $v_i(t)$ 的方程中显含变量 $v_j(t)$.

设 $F_s\in R^{r\times p}$ 是一个给定的矩阵. 对系统 Σ_s 使用输出反馈控制

$$u_s = K_s y_s, \tag{1}$$

这里 $K_s\in \widetilde{F}_s$,则系统 Σ_s 关于 F_s 的反馈图 $G(A_s,B_s,C_s,F_s)$ 定义为

$$G(A_s,B_s,C_s,F_s) = (V(A_s,B_s,C_s),E(A_s,B_s,C_s)\cup E_{F_s}),$$

这里 $E_{F_s}=\{(y_j,u_i)$:在关于变量 $u_i(t)$ 的方程中显含变量 $y_j(t)\}$.

定义1[5]. 称系统 Σ_s 是输入可联结的,是指对任何 $x_i\in X_s$,都存在一个 $u_j\in U_s$ 使得在图 $G(A_s,B_s,C_s)$ 中 $u_j \xrightarrow{R} x_i$;称系统 Σ_s 是输出可联结的,是指对任何 $x_i\in X_s$,都存在一个 $y_j\in Y_s$ 使得在图 $G(A_s,B_s,C_s)$ 中 $x_i \xrightarrow{R} y_j$;称系统 Σ_s 是可联结的,是指它既是输入可联结的,又是输出可联结的.

定义2[6]. 称系统 Σ_s 是结构能控的,是指存在一个与 (A_s,B_s) 结构等价的系统,它在通常的意义下是能控的;称系统 Σ_s 是结构能观的,是指 $(A_s^{\mathrm{T}},C_s^{\mathrm{T}})$ 是结构能控的.

定义3[7]. 称系统 Σ_s 关于反馈控制(1)有结构固定模,是指每个与系统 Σ_s 结构等价的系统关于反馈控制(1)都有固定模.

3 系统描述

本文考虑循环组合系统 $\Sigma=(A,B,C)$,它由 N 个子系统组成,整个系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2a}$$

$$y = Cx, \tag{2b}$$

这里 x,u 和 y 分别是 Nn 维状态、Nr 维输入和 Np 维输出. 而矩阵 $A\in R^{Nn\times Nn}$,$B\in R^{Nn\times Nr}$,$C\in R^{Np\times Nn}$ 具有如下结构:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_1 & \overline{A}_2 & \overline{A}_3 & \cdots & \overline{A}_N \\ \overline{A}_N & \overline{A}_1 & \overline{A}_2 & \cdots & \overline{A}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{A}_2 & \overline{A}_3 & \overline{A}_4 & \cdots & \overline{A}_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 & \overline{B}_2 & \overline{B}_3 & \cdots & \overline{B}_N \\ \overline{B}_N & \overline{B}_1 & \overline{B}_2 & \cdots & \overline{B}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{B}_2 & \overline{B}_3 & \overline{B}_4 & \cdots & \overline{B}_1 \end{bmatrix}, \tag{3a}$$

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} \overline{C}_1 & \overline{C}_2 & \overline{C}_3 & \cdots & \overline{C}_N \\ \overline{C}_N & \overline{C}_1 & \overline{C}_2 & \cdots & \overline{C}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{C}_2 & \overline{C}_3 & \overline{C}_4 & \cdots & \overline{C}_1 \end{bmatrix}, \tag{3b}$$

其中 $A_i \in R^{n\times n}, B_i \in R^{n\times r}, C_i \in R^{p\times n} (i=1,\cdots,N)$.

注1. 应该指出,在很多实际问题中会遇到由式(2)和(3)描述的模型,比如造纸机的横向控制问题,塑料薄膜的着色问题,偏微分方程的集总近似问题,等等.其它例子详见文[4].

4 主要结果

在本文中,我们定义 $\overline{A}_0=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_N, \overline{B}_0=\overline{B}_1+\overline{B}_2+\cdots+\overline{B}_N, \overline{C}_0=\overline{C}_1+\overline{C}_2+\cdots+\overline{C}_N$,与系统 Σ 对应的修正子系统 $\Sigma_0=(A_0,B_0,C_0)$.

设 $F_0=\{f_{ij}\}\in R^{r\times p}$,对 $i=1,2,\cdots,r$,定义 $J_i=\{j:f_{ij}\neq 0\}$. 对指标集 $M=\{1,2,\cdots,r\}$ 的任一子集 $I=\{i_1,\cdots,i_p\}$,令 $J=\bigcup_{i\in M-I} J_i=\{j_1,\cdots,j_q\}\subset\{1,2,\cdots,p\}$. 用 B_{0I} 表示 B_0 的第 $i_1,\cdots,i_p$ 列构成的矩阵,用 C_{0J} 表示 C_0 的第 $j_1,\cdots,j_q$ 行构成的矩阵. 记系统 Σ_0 关于 F_0 的反馈图为 $G_{0F_0}=(X_0\cup U_0\cup Y_0, E_0\cup E_{F_0})$.

关于循环组合系统 Σ 的结构性质,有下面的结果(证明从略).

定理1. 系统 Σ 是输入可联结的(输出可联结的,可联结的,结构能控的,结构能观的)充要条件为系统 Σ_0 是输入可联结的(输出可联结的,可联结的,结构能控的,结构能观的).

定理2. 系统 Σ 关于分散反馈控制

$$u = Ky \tag{4}$$

(这里 $K=\mathrm{diag}[K_1,\cdots,K_N], K_i\in\widetilde{F}_0, i=1,\cdots,N$)没有结构固定模的充要条件为系统 Σ_0 关于反馈控制

$$u_0 = K_0 y_0 \tag{5}$$

(这里 $K_0\in\widetilde{F}_0$)没有结构固定模,即下面两个条件成立:

1)在图 G_{0F_0} 中,每个状态结点 $x_{0i}\in X_0$ 都包含在 G_{0F_0} 的一个含有 E_{F_0} 中的某个边的强支之中;

2)在图 G_{0F_0} 中,存在互不相交的圈 $(V_{0k},E_{0k})(k=1,\cdots,s)$,使得

$$X_0 \subset \bigcup_{k=1}^{s} V_{0k},$$

或等价地下面两个条件成立:

1′)不存在 $I\subset M$ 及置换矩阵 P,使得

$$P^{\mathrm{T}}A_0P=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix},\quad P^{\mathrm{T}}B_{0I}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3^I\end{bmatrix},\quad C_{0J}P=[C_1^J \quad 0 \quad 0];$$

2′)不存在 $I\subset M$,使得

$$r\left(\begin{bmatrix} \overline{A}_0 & \overline{B}_{0I} \\ \overline{C}_{0J} & 0\end{bmatrix}\right) < n.$$

推论1. 如果矩阵 $F_0\in R^{r\times p}$ 含有 rp 个非零元素,则系统 Σ 关于分散反馈控制(4)没有结构固定模的充要条件为系统 Σ_0 是结构能控与结构能观的.

参 考 文 献

1 Lunze J. Dynamics of strongly coupled symmetric composite systems. *Int. J. Control*, 1986, **44**(6):1617—1640
2 杨光红,张嗣瀛. 一类具有相似结构的组合系统的结构可控性与渐近合作性. 自动化学报,1995,**21**(5):521—528
3 Brockett R W, Willems J L. Discretezed partial differential equations: examples on control systems defined on modules. *Automatica*, 1974, **10**:507—515
4 Hovd M, Skogestad S. Control of symmetrically interconnected plants. *Automatica*, 1994, **30**:957—973
5 Davison E J. Connectability and structural controllability of composite systerms. *Automatica*, 1977, **13**:109—123
6 Shields R W, Pearson J B. Structrual controllability of multi-input linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1976, **AC-21**:203—212
7 Pichai V, Sezer M E, Siljak D D. A graph-theoretic characterization of structurally fixed modes. *Automatica*, 1984, **20**:247—250

STRUCTURAL PROPERTIES OF CIRCULANT COMPOSITE SYSTEMS

HUANG SHOUDONG　　ZHANG SIYING
(*Dept. of Automatic Control, Northeastern Univ.*, *Shenyang* 110006)

Abstract In this paper, we study the structural properties of circulant composite systems. It is shown that the structural controllability and existence of structurally fixed modes for such a system can be determined by the corresponding properties of its modified subsystem.

Key words Composite systems, structural controllability, structurally fixed modes.