

# 一类非线性时滞系统的稳定化 控制器设计研究<sup>1)</sup>

苏宏业 褚健

(浙江大学工业控制技术国家重点实验室、工业控制技术研究所 杭州 310027)

**摘要** 针对一类单控制滞后的非线性时滞系统,利用非线性状态变换的方法进行非线性变换,得到一线性时滞系统模型;然后利用一带控制记忆的积分变换进行精确无滞后化变换,得到一无滞后的线性能控标准型系统,从而利用分步设计的思想,实现非线性时滞系统的稳定化控制.一数值例子的仿真研究说明了该方法的有效性.

**关键词** 非线性时滞系统,线性化,分步设计,精确无滞后化变换,稳定化控制.

## 1 问题的提出

近年来,作为控制理论研究热点之一的非线性系统控制理论得到了长足的发展,尤其是微分几何数学方法的引入,使得非线性系统控制理论有了一很大的飞跃<sup>[1,2]</sup>.但作为更一般的问题(亦更复杂的问题)——非线性时滞系统控制研究还没有得到应有的重视.我们知道,在实际工业生产过程中,绝大部分工业对象(特别是化工过程系统)既具有非线性特性,同时又有时滞现象的存在,因此研究非线性时滞系统的控制问题将更具有工程意义.但由于非线性时滞系统的描述极具多样化,与非线性系统相比更为复杂,同时由于时滞的存在,使得系统的响应急剧变差,控制难度大大增加,给一般非线性时滞系统控制的研究带来了极大的困难.因此,针对具体的某一类非线性时滞系统的控制研究引起了人们的兴趣和重视,并已取得了一些结果,如文[3]利用PI控制器和Smith预估器设计方法研究了一类一阶单控制滞后的非线性时滞系统的控制问题;文[4]利用Lyapunov方法研究了一类单状态滞后的非线性时滞系统的控制问题;文[5]利用微分几何I/O精确线性化方法和Smith预估器设计方法研究了一类单控制滞后的仿射非线性时滞系统的控制问题等.但这些方法实际上主要是处理线性时滞系统或非线性系统方法的直接推广,其中有的方法仅适用于单变量系统;有的仅是近似处理方法,只对小范围有效;有的算法十分复杂,实现困难等.本文针对一类单控制滞后的仿射非线性时滞系统,基于分步变换和设计思想,提出一种新的稳定化控制器设计方法,并通过仿真例子来说明其有效性和可行性.

## 2 基于状态变换的非线性时滞系统的精确线性化

考虑单控制滞后仿射非线性系统

1) 国家自然科学基金资助项目.

收稿日期 1996-03-29

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t - \tau). \quad (1)$$

其中  $x \in R^n; u \in R; f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  为  $C^\infty$  非线性函数向量场;  $\tau$  为时滞;  $f(0) = 0$ .

假设存在微分同胚

$$\omega = T(x). \quad (2)$$

将非线性时滞系统(1)转换为如下形式的线性时滞系统

$$\dot{\omega} = A\omega + bu(t - \tau). \quad (3)$$

其中  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_n]^T \in R^n$  为新的状态变量,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

则有如下的非线性时滞系统基于状态变换的精确线性化定理.

**定理1.** 对于非线性时滞系统(1),通过微分同胚变换  $\omega = T(x)$  将其转换成线性时滞系统(3)的充分必要条件是

$$(i) \text{rank} M(x) = n, \text{ 其中 } M(x) = [g(x)ad_{f(x)}g(x) \cdots ad_{f(x)}^{(n-1)}g(x)]. \quad (4)$$

$$(ii) [ad_f^i g, ad_f^j g](x) = 0, \quad 0 \leq i, j \leq n. \quad (5)$$

**证明.** 必要性:

假设存在微分同胚(2)把系统(1)转换成系统(3),则对于任意光滑( $C^\infty$ )向量场  $f_1, f_2$ , 一定有

$$T_*[f_1, f_2](x) = [T_*f_1, T_*f_2](x). \quad (6)$$

又由于

$$T_*f(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) = A\omega, \quad (7)$$

$$T_*g(x) = \frac{\partial T(x)}{\partial x} g(x) = b, \quad (8)$$

故有

$$\begin{aligned} T_*(ad_f g)(x) &= T_*[f, g](x) = [T_*f, T_*g](x) \\ &= [A\omega, b] = -Ab. \end{aligned} \quad (9)$$

从而对于  $k=1, 2, \dots, n-1$ , 有

$$\begin{aligned} T_*(ad_f^{k+1}g)(x) &= T_*[f, ad_f^k g](x) = [T_*f, T_*ad_f^k g](x) \\ &= [A\omega, (-1)^k A^k b] = (-1)^{k+1} A^{k+1} b. \end{aligned} \quad (10)$$

而由线性时滞系统(3)知

$$\text{rank}(b \ Ab \ \cdots \ A^{n-1}b) = n. \quad (11)$$

而  $T_*$  是线性的,故不影响向量场的线性相关性,因此由(7)~(11)式可得

$$\text{rank}[g(x)ad_{f(x)}g(x) \ \cdots \ ad_{f(x)}^{n-1}g(x)] = n. \quad (12)$$

同时,由于  $T_*$  把分布空间  $\text{span}\{ad_{f(x)}^i g(x), i=0, \dots, n-1\}$  映射成平面分布空间  $\text{span}\{b \ Ab \ \cdots \ A^{n-1}b\}$ ,很显然有

$$\begin{aligned} T_*[ad_f^i g, ad_f^j g](x) &= [T_*(ad_f^i g), T_*(ad_f^j g)](x) \\ &= (-1)^{i+j} [A^i b, A^j b] = 0, \quad 0 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$



因此必定有

$$[ad_f^i g, ad_f^j g](x) = 0, \quad 0 \leq i, j \leq n. \quad (13)$$

充分性:

考虑向量场集合  $\{ad_f^i g(x), i=0, 1, \dots, n-1\}$ , 则由式(4)和(5)得

$$\begin{aligned} \dim(\text{span}\{g(x)ad_{f(x)}g(x)\cdots ad_{f(x)}^{n-1}g(x)\}) &= n, \\ [ad_{f(x)}^i g(x), ad_{f(x)}^j g(x)] &= 0. \end{aligned}$$

则由文献[2]中的定理2.36知, 可找到一微分同胚变换  $T(x)$  ( $T(0)=0$ ), 有

$$T_*(ad_f^i g) = \frac{\partial}{\partial \omega_i}, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad (14)$$

则

$$\begin{aligned} \left[ T_* g, \frac{\partial}{\partial \omega_i} \right](\omega) &= [T_* g, T_* ad_f^i g](x) \\ &= T_* [g, ad_f^i g] = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

因此  $T_* g$  在  $\omega$  坐标中为一常向量, 令  $T_* g = b'$ , 更进一步有

$$\begin{aligned} \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial \omega_i}, T_* f \right], \frac{\partial}{\partial \omega_j} \right](\omega) &= [T_* [ad_f^j g, f], T_* ad_f^i g](x) \\ &= T_* [[ad_f^j g, f], ad_f^i g](x) = T_* [-ad_f^{j+1} g, ad_f^i g](x) \\ &= 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned} \quad (15)$$

故  $T_* f$  在  $\omega$  坐标中是线性向量场, 又因为  $f(0)=0$ , 所以可令  $T_* f = A'$ , 且  $[A', b']$  为可控对. 因此通过适当的线性变换, 必定可得到式(3)所示的线性时滞系统. 证毕.

由定理1可知, 只要非线性时滞系统(1)满足式(4)和式(5)两个条件, 则必定可以找到一微分同胚变换  $T(x)$ , 把式(1)变换至线性时滞系统(3). 但关键问题是如何寻找这样的状态变换, 文[6]的结论给出了一种直接明了的求解方法.

### 3 线性时滞系统的精确无滞后化

针对上节所得的精确线性化后的线性时滞系统(3), 引入一带控制信号记忆的积分状态变换

$$z(t) = \omega(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} e^{-A\tau} bu(s) ds, \quad (16)$$

把式(16)两边关于  $t$  求导, 可得

$$\dot{z}(t) = \dot{\omega}(t) + A \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} e^{-A\tau} bu(s) ds + e^{-A\tau} bu(t) - bu(t-\tau). \quad (17)$$

把式(3)代入式(17), 则可得

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A\omega(t) + bu(t-\tau) + A \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} e^{-A\tau} bu(s) ds \\ &\quad + e^{-A\tau} bu(t) - bu(t-\tau) \\ &= Az(t) + e^{-A\tau} bu(t). \end{aligned} \quad (18)$$

令  $\bar{A} = A, \bar{b} = e^{-A\tau} b$ , 则式(18)可写为

$$\dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{b}u(t). \quad (19)$$

从而实现了线性时滞系统(3)的精确无滞后化变换,转换成线性能控模型(19).

## 4 非线性时滞系统稳定化控制器的分步设计

分步变换与设计的主要思想是将复杂的模型进行简化或分解,以得到某种简单的模型(例如对于非线性系统,简化得到简单的非线性模型或某种线性模型等;对于时滞系统,简化得到简单或无滞后的线性模型等等),从而可以进一步利用现有方法对原复杂系统进行综合设计.

**步骤1.** 对非线性时滞系统(1),判断其是否满足定理1中的条件(4)和(5),若满足则利用文[6]中的计算方法求解非线性状态变换  $T(x)$ ,把非线性时滞系统转换成线性时滞系统(3).

**步骤2.** 针对已精确线性化的线性时滞系统(3),采用式(16)的积分状态变换,把线性时滞系统(3)转换成线性模型(19).

**步骤3.** 对于经分步变换得到的线性系统(19),设计二次型最优控制器

$$u(t) = -R^{-1}\bar{b}^T Pz(t). \quad (20)$$

其中  $P$  是代数 Riccati 方程

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} - P\bar{b}R^{-1}\bar{b}^T P + Q = 0.$$

的对称正定解,其中  $Q, R$  分别为对称正定阵和实正常数.

**步骤4.** 综合上述三步结果,则可得原非线性时滞系统(1)的控制律为

$$u(t) = -R^{-1}\bar{b}^T P[T(x(t))] + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} e^{-A\tau} b u(s) ds, \quad (21)$$

使得原非线性时滞系统(1)经分步变换后所得的线性系统模型实现最优控制.

很显然,要实现上述算法,必须还要求参数矩阵  $A, b$  满足  $(A, e^{-A\tau}b)$  是可控对. 而事实上在这儿这一条件是一定满足的,因为由(3)式中  $A, b$  的形式,不论滞后  $\tau$  为任意正数,  $[e^{-A\tau}b, Ae^{-A\tau}b, \dots, A^{n-1}e^{-A\tau}b]$  的结果必定为

$$[e^{-A\tau}b, Ae^{-A\tau}b, \dots, A^{n-1}e^{-A\tau}b] = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & 1 \\ * & * & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (22)$$

其中  $*$  表示任意实数. 这种上三角方阵,且对角线元素均为1,故其秩必为  $n$ . 下面讨论引入上述控制律(21)后的非线性时滞系统的闭环稳定性问题.

**定理2.** 对于单控制滞后仿射非线性时滞系统(1),假设其满足定理1中的两个条件,则引入控制律(21)后,闭环系统是渐近稳定的.

**证明.** 首先考虑非线性时滞系统(1)经分步变换后所得的线性能控系统(19),引入二次型最优控制器(20),并利用无滞后化变换(16),可得

$$\begin{aligned} \omega(t) &= z(t) + \int_{t-\tau}^t e^{A(t-s)} e^{-A\tau} b R^{-1}\bar{b}^T Pz(s) ds \\ &= z(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A(\xi+\tau)} b R^{-1}\bar{b}^T Pz(t+\xi) d\xi. \end{aligned}$$



故

$$|\omega(t)| \leq |z(t)| + \tau \left[ \max_{-\tau \leq \rho \leq 0} \|e^{-A(\rho+\tau)}\| \right] \|bR^{-1}\bar{b}^T P\| \cdot \left[ \max_{-\tau \leq \sigma \leq 0} |z(t+\sigma)| \right]. \quad (23)$$

由于对于线性能控系统(19),引入二次型最优控制器(20)后闭环系统是渐近稳定的,故有  $t \rightarrow \infty, z(t) \rightarrow 0$ . 由(23)式可知:当  $z(t) \rightarrow 0$  时,由于  $\tau$  是有限值,故必定有  $\omega(t) \rightarrow 0$ ,即必定有  $t \rightarrow \infty, \omega(t) \rightarrow 0$ .

同时由于  $\omega(t) = T(x(t))$  是一微分同胚变换,故  $\omega(t) \rightarrow 0$  时,必定有  $x(t) \rightarrow 0$ .

综上所述,当  $t \rightarrow \infty$  时,亦必定有  $x(t) \rightarrow 0$ ,即原非线性时滞系统(1)引入控制律(21)后闭环系统是渐近稳定的. 证毕.

很显然,由最终所得的带控制记忆的非线性控制律(21)可知,这种基于分步变换和设计综合的非线性时滞系统控制律引入了以前的控制信息,从而可克服原系统所具有的滞后.

## 5 仿真例子

考虑一具有单控制滞后的仿射非线性时滞系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) - 2x_2(t)x_3(t) + x_3^2(t) \\ x_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_2(t)x_3(t) \\ -2x_3(t) \\ 1 \end{bmatrix} u(t-1).$$

易验证该非线性时滞系统满足定理1中的两个条件,利用文[6]中的计算方法可求得非线性状态变换

$$T_1(x) = x_1 + x_2^2, \quad T_2(x) = x_2 + x_3^2, \quad T_3(x) = x_3.$$

从而把非线性时滞系统转换成式(3)所示的线性时滞系统,然后进一步利用(16)式的带控制记忆的积分状态变换,把上述线性时滞系统变换成式(19)所示的线性能控系统,其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

选取对称正定加权阵  $Q, R$  为  $Q = \text{diag}(10, 10, 10), R = 20$ , 利用第四节的分步设计方法,最终可得式(21)所示的原非线性时滞系统的带控制记忆的积分型非线性控制器,其中

$$P = \begin{bmatrix} 36.997 & 63.4388 & 59.0825 \\ 63.4388 & 175.6221 & 196.2243 \\ 59.0825 & 196.2243 & 256.3991 \end{bmatrix}.$$

当  $x_1$  分别存在3和-3的初始偏差,而  $x_2, x_3$  均无初始偏差时,采用上述控制律所得的结果分别如图1的(a)和(b)所示.

由图中所示的仿真结果可知,该非线性时滞系统表现出了较明显的非线性特性,而采用本文所提出的基于分步变换与设计方法的带控制记忆的积分形非线性控制律后,闭环系统表现出了较好的响应特性,较好地克服了系统纯滞后所带来的影响.

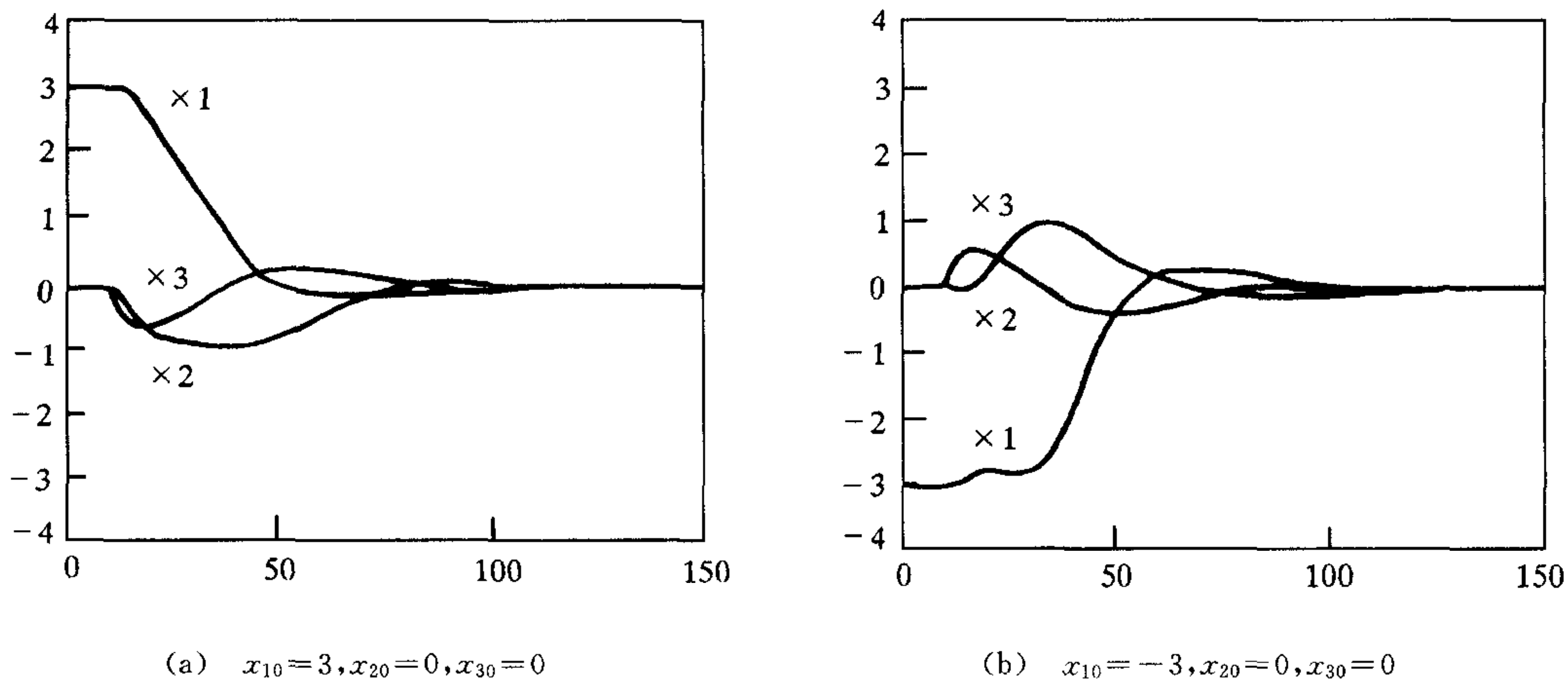


图1 带控制记忆的非线性控制的仿真曲线

## 6 结论

本文研究了具有单控制滞后的仿射非线性系统的精确线性化和无滞后化的分步变换方法,并由此提出了基于分步设计的控制器设计方法.仿真结果说明了本方法的有效性和可行性.

## 参 考 文 献

- [1] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京:科学出版社,1988.
- [2] Nijmeijer H, Van der shaft A J. Nonlinear dynamical control systems, New York:Springer-Verlag,1990.
- [3] Wong S K P, Seborg D E. Control strategy for single-input single-output non-linear systems with time delays. *Int. J. Control*, 1988, **48**:2303—2327.
- [4] Nguang S K. Robust stabilisation for a class of time-delay nonlinear systems. In: IEE Proc. Control Theory Application, 1994, **141**:285—288.
- [5] Henson M A, Seborg D E. Time delay compensation for nonlinear process. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 1994, **33**:1493—1500.
- [6] Chu J, Su H Y. A controller design method for nonlinear systems via staged transformation technique. *Int. J. Sys. Sci.*, 1995, **26**(11):2187—2201.

## STABILIZING CONTROLLER DESIGN FOR A CLASS OF NONLINEAR TIME-DELAY SYSTEMS

SU HONGYE CHU JIAN

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** This paper addresses a stabilizing controller design approach for a class of nonlinear time-delay systems based on staged transformation and design technique. For a single-input nonlinear time-delay system, a linear time-delay model is obtained by a nonlinear stage

transformation, a delay-free transformation is then introduced to transform the linear time-delay model into a linear controllable system without delay. The stabilizing controller to the primitive nonlinear time-delay system is derived via a staged design method. Simulation result of an example shows that this approach is quite effective.

**Key words** Nonlinear time-delay systems, delay-free transformation, staged design, stabilizing controller.

**苏宏业** 1969年生. 1990年毕业于南京化工大学, 1993年获浙江大学工业自动化专业硕士学位, 1995年获浙江大学工业自动化专业博士学位, 现为浙江大学副教授. 主要研究兴趣是鲁棒控制, 时滞系统控制, 非线性系统控制和 PID 自整定理论和应用研究. 发表论文五十余篇.

**褚 健** 1963年生. 1982年毕业于浙江大学, 1986年至1989年留学日本京都大学, 1989年获工学博士学位. 1993年被聘为浙江大学教授、博导, 现为工业自动化国家工程研究中心副主任. 主要从事时滞系统控制、非线性控制、鲁棒控制等理论与应用研究. 发表论文七十余篇.