

按严格递归法则生成的多重分形 及其谱维数方程

李 军
(物理系)

提 要 本文在给出了广义 Hausdorff 维数定义的基础上得到了按严格递归法则生成的多重分形的谱维数 $D_q = D(q)$ 的一般函数关系式——谱维数方程. 作为谱维数方程的应用, 得到了一维 Cantor 集的 D_q 谱和 $f(\alpha)$ 谱的解析表达式.

关键词 多重分形; 广义 Hausdorff 维数; 分形测度; $f(\alpha)$ 谱

中图法分类号 O411.1

0 引 言

自1975年 B. B. Mandelbrot 首次提出分形思想后, 有关分形的概念和理论在包括物理、化学、生物、材料等的各个领域中的应用都取得了极大的发展. 随着视野的拓展和研究的深入, 人们发现大自然中纯粹的简单分形(即具有单标度指数的分形)微乎其微, 更普遍的是多重分形^[1,2]. 所谓多重分形是指, 如果把 d 维欧氏空间中的有界集合作为某种随机变量的支集, 则相应的几率分布具有奇异测度, 也就是说作为支集的集合是由无限多个子集合交迭而成, 而几率测度在整个支集上的分布具有随标度指数逐点变化的奇异特性, 且不存在相应的密度函数. 多重分形也称分形测度, 各个领域中的非线性动力系统的不变测度往往都属于分形测度. 多重分形理论就是要定量刻画分形测度在整个支集上的分布状况. 为有效刻画多重分形, 我们在应用 Hausdorff 维数讨论简单分形工作的基础上^[5], 将 Hausdorff 维数加以推广, 给出了广义 Hausdorff 维数的定义, 并应用该定义讨论了按严格递归法则生成的多重分形.

1 广义 Hausdorff 维数

考虑 d 维欧氏空间中的作为多重分形的支集的几何对象 E , 用直径小于或等于 $\varepsilon > 0$ 的可数个数的 d 维小球覆盖 E , 设第 k 个小球的直径为 d_k , 它所在区域对应的测度也就是生长几率, 为 P_k , 满足 $\sum_k P_k = 1$, 则定义 q 次广义 Hausdorff 测度矩为

$$M_D^{(q)}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{d_k \leq \varepsilon} \sum_k P_k d_k^{(1-q)D} \quad (1)$$

其中 q 是一个描述多重分形不均衡程度的实参量. 如果存在 $D > 0$, 使得 $M_D^{(q)}(E)$ 为非零有限值, 则称 D 为以几何对象 E 作为支集的多重分形的 q 次广义 Hausdorff 维数, 显然 D 是 q 的函

本文于1993年5月4日收到.

数,故也可称之为 Hausdorff 谱维数,以 $D_q = D(q)$ 表示之. 这里 $q = 1$ 是测度矩的奇点. 如果在上述之内容中用同样大小的 d 维小球尽量无浪费地覆盖 E , 设 $\varepsilon = d_k (k = 1, 2, \dots)$, 则(1)可改写为

$$M_B^{(q)}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_k P_k \varepsilon^{(q-1)D_k} \quad (1')$$

于是 q 次广义 Hausdorff 维数可直接表为

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg X_q(\varepsilon)}{\lg \varepsilon} \quad (2)$$

式中 $X_q(\varepsilon) = \sum_k P_k \varepsilon^{(q-1)D_k}$ 称为 q 次几率矩. 事实上(2)式就是由 Renyi 首次引入并被 B. B. Mandelbrot 在研究奇异集合中重新发现的广义维数的定义式^[3,4]. 因此广义维数是广义 Hausdorff 维数的一个特例.

2 谱函数

谱函数是随广义维数后逐步发展起来的另一套定量刻画多重分形及其测度的奇异性的基本语言.

设想把作为多重分形的支集的 d 维欧氏空间中的线度为 L 的几何对象划分成线度为 l_i 的 N 个不相连的区域 $S_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 假定第 i 区域 S_i 对应的测度, 即生长几率为 P_i , 则当 $l \rightarrow 0$, 且对所有的 $i = 1, 2, \dots, N$ 有 $l_i \leq l$ 时, 每一区域都成为一个简单分形, 为此各自可引入相应的标度指数, 即第 i 区域 S_i 上的 Hausdorff 维数可定义为

$$\alpha_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg P_i}{\lg \varepsilon}, \quad (3)$$

式中 $\varepsilon = \frac{l}{L}$, 且 $\varepsilon \geq \varepsilon_i, \varepsilon_i = \frac{l_i}{L}$, 上式可改写为另一种形式

$$P_i \propto \varepsilon^{\alpha_i} \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (3')$$

现将 N 个区域按标度指数进行分类而构成一系列相应的子集合, 在具有标度指数为 α 的子集合中所包含的区域的数目为

$$N_\alpha(\varepsilon) = \sum_i \delta(\alpha - \alpha_i) \quad (4)$$

将子集合的容量维数称为多重分形的谱函数

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N_\alpha(\varepsilon)}{\lg \frac{1}{\varepsilon}} \quad (5)$$

上式可表成如下形式

$$N_\alpha(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-f(\alpha)} \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (5')$$

谱函数 $f(\alpha)$ 刻画了几率测度在整个支集上的分布状况, 而这种分布具有随标度指数 α 逐点变化的奇异特性, 一旦知道了谱维数的具体函数形式, 我们也就把握了多重分形的所有局域特性.

另一方面, 在 $\varepsilon \rightarrow 0$ 的极限情况下, 由(3')(5')可将 q 次几率矩 $X_q(\varepsilon)$ 表为

$$X_q(\varepsilon) \propto \int \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha \quad (6)$$

根据最陡下降法, 上述积分由被积函数的最大值支配, 此时指数 $q\alpha - f(\alpha)$ 达到它的极小值, 其极值在 $\alpha = \alpha(q)$ 处给出, 这要求

$$\frac{d}{d\alpha'} [q\alpha' - f(\alpha')] |_{\alpha=\alpha(q)} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d^2}{d\alpha'^2} [q\alpha' - f(\alpha')] |_{\alpha=\alpha(q)} > 0 \tag{8}$$

这样可导出两套描述语言 $[q, D_q]$ 和 $(\alpha, f(\alpha))$ 之间的 Legendre 变换关系式

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = q \tag{9}$$

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = \alpha \tag{10}$$

$$\tau(q) = (q - 1)D_q = q\alpha - f(\alpha) \tag{11}$$

这里要求 $\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} < 0$, 其中 $\tau(q)$ 称为质量维数. 由上述关系式可得到关于谱函数 $f(\alpha)$ 的几点结论: (1) 谱函数是个凸函数, 每一点的斜率由实参量 q 决定. (2) 标度指数 $\alpha = \alpha(q)$ 随 q 减小而增大, 在具体例子中可能会出现不连续变化的现象, 这种标度间断在多重分形理论中被称为相变. (3) 在 $q \rightarrow +\infty$ 时, α 取最小值 $\alpha_{\min} = \alpha(+\infty) = D_{+\infty}$, 在该处 $f(\alpha)$ 变为零, 而其斜率为 $+\infty$, 它对应于几率测度最大的稠密区域, 在 $q \rightarrow -\infty$ 时, α 取最大值 $\alpha_{\max} = \alpha(-\infty) = D_{-\infty}$, 在该处 $f(\alpha)$ 的取值为零, 而其斜率为 $-\infty$, 它对应于几率测度最小的稀薄区域. (4) 在 $q = 1$ 时, α 的取值为 $\alpha(1)$, 在该处 $f(\alpha(1)) = \alpha(1)$, 且其斜率为 1, 此时广义维数取值为 D_1 , 由广义维数的定义式(4), 通过简单的推算可知, D_1 表示整个支集的信息维数. (5) 在 $q = 0$ 时, α 的取值为 $\alpha(0)$, 此时谱函数取最大值 $f_{\max} = f(\alpha(0)) = D_0$, 它表示整个支集的 Hausdorff 维数.

简单分形是多重分形的特例, 因此上述之讨论对于简单分形维数的计算同样也是有效的. 以 Cantor 集为例, 我们将看到简单分形的谱函数退化成一个点, 按严格递归的法则构造 Cantor 三分集 ($r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{4}$) 作为支集^[5], 而整个支集上不存在奇异测度. 对于这样一个简单分形, 通过计算得到

$$D_q = D_0 = f(0) = -\tau(0) = \frac{\ln(1 + \sqrt{5})}{\ln 2} - 1 = 0.6942 \tag{12}$$

显然这个维数就是整个支集的 Hausdorff 维数, 它和我们用“相似压缩系数的归一化方程”所算得的结果相一致^[5]. 如果在上述 Cantor 集上赋值一个奇异测度, 则变为多重分形.

3 谱维数方程

考虑以 d 维欧氏空间中的几何对象 E 作为支集的按严格递归法则生成的多重分形, 其中源级的最大 k (k 为整数, 且 $0 < k \leq d$) 维测度为 S_k , 则定义其线度 $L = \sqrt[k]{S_k}$. 设分形的第一级是由 N 个构型和源级相似的组分生成, 其线度分别为 $(r_1, r_2, \dots, r_N)L$, 这里 r_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 称为分形的相似压缩系数, 满足 $0 < r_i < 1$, 则相应的 K 维测度分别为 $(r_1^k, r_2^k, \dots, r_N^k)S_k$. 假定 N 个组分的生长几率分别为 P_1, P_2, \dots, P_N , 满足 $\sum_i P_i = 1$ 和 $\sum_i P_i r_i^k \neq 1$, 于是第二级的生成组分共有 N^2 个, 其 k 维测度分别为 $r_1^k(r_1^k, r_2^k, \dots, r_N^k)S_k, r_2^k(r_1^k, r_2^k, \dots, r_N^k)S_k, \dots, r_N^k(r_1^k, r_2^k, \dots, r_N^k)S_k$, 相应的生长几率分别为 $P_1(P_1, P_2, \dots, P_N), P_2(P_1, P_2, \dots, P_N), \dots, P_N(P_1, P_2, \dots, P_N)$, 以此类推, 可得到第 n 级的 k 维测度分布及相应的生长几率, 则分形的 k 维测度为

$$M_k(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N P_i r_i^k \right)^n S_k \tag{13}$$

由于 $\sum_{i=1}^N P_i r_i^q \neq 1$, 因此 $M_x(E)$ 不可能为非零有限值, 为此根据(1)式可定义 q 次广义 Hausdorff 测度矩

$$M_B^{(q)}(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N P_i r_i^{(1-\epsilon)D_q} \right) \epsilon L^{(1-\epsilon)D_q} \tag{14}$$

这里要求 $D_q > 0$, 为使 $M_B^{(q)}(E)$ 取得非零有限值, 其充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^N P_i r_i^{(1-\epsilon)D_q} = 1 \tag{15}$$

上式实际上是一个关于谱维数 D_q 与实参量 q 之间的函数关系式. 为了表示其重要性, 我们特称此为谱维数方程. 由此可知, 对于按严格递归法则生成的多重分形, 只要知道了分形的相似压缩系数 r_i 以及相应的生长几率 P_i , 就可根据(15)式确定分形的谱维数, 并根据(9), (10), (11)式求得分形的谱函数. 另一方面, 由(14), (15)两式知道分形的 q 次广义 Hausdorff 测度矩为

$$M_B^{(q)}(E) = L^{(1-\epsilon)D_q} \tag{16}$$

其中 $L = \sqrt[k]{S_k}$ 为由 k 维测度所确定的分形的线度. $M_B^{(q)}(E)$ 为幂指数的形式, 且指数 $(1 - q)D_q$ 为一连续谱, 这是多重分形的特征.

4 应用

作为谱维数方程(15)的应用, 现来讨论具有双标度的 Cantor 集, 其构造如图1所示. 其中相似压缩系数为 $r_1 = \epsilon, r_2 = \epsilon^2$, 相应的生长率为 $P_1 = p, P_2 = 1 - p$, 这里 ϵ, p 为大于零的

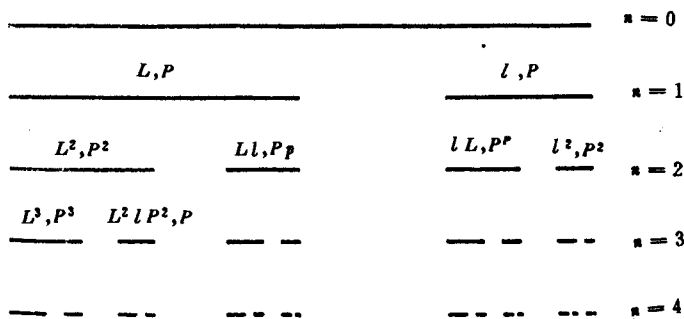


图1 双标度 Cantor 集 $r_1 = L = \frac{1}{2}, r_2 = l = \frac{1}{4}, P_1 = P = \frac{2}{3}, P_2 = P = \frac{1}{3}$

Fig. 1 A Cantor set construction with two rescalings $r_1 = \frac{1}{2}$ and $r_2 = \frac{1}{4}$

and probability rescalings $P_1 = \frac{2}{3}$ and $P_2 = \frac{1}{3}$

实数, 且 $\epsilon, p < 1$, 于是由方程(15)可求得谱维数

$$D_q = \frac{1}{1-q} \log_\varepsilon \left[\frac{1}{2} (\sqrt{\mu^{2q} + 4\gamma^q} - \mu^q) \right] \quad (17)$$

式中 $\mu = (p^{-1} - 1)^{-1}$, $\gamma = (1 - p)^{-1}$, 由(9), (10), (11)及(16)可得到谱函数:

$$f(\alpha) = \alpha q + \frac{1}{\ln \varepsilon} [-\ln 2 + \ln(\sqrt{\mu^{2q} + 4\gamma^q} - \mu^q)] \quad (18)$$

其中

$$q = \frac{1}{2 \ln \mu - \ln \gamma} [2 \ln(\ln \gamma + 2 \alpha \ln \varepsilon) - \ln(\ln^2 \mu - \ln \mu \ln \gamma - \alpha \ln \gamma \ln \varepsilon - \alpha^2 \ln^2 \varepsilon)] \quad (19)$$

α 随 q 变化的函数关系为

$$\alpha = \frac{-1}{\ln \varepsilon} \frac{\delta^2 \ln \mu + 2 \ln \gamma - \delta \sqrt{\delta^2 + 4 \ln \mu}}{\delta^2 + 4 - \delta \sqrt{\delta^2 + 4}} \quad (20)$$

式中 $\delta = \left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^\varepsilon$. 由(17), (18), (19), (20)可推得如下的一些结论:

$$D_0 = f_{\max} = f(\alpha(0)) = \frac{\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\ln \varepsilon} \quad (21a)$$

$$D_{+\infty} = \alpha_{\min} = \alpha(+\infty) = \begin{cases} \frac{-1}{\ln \varepsilon} \frac{\ln \gamma}{2} & (0 < p < \frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\ \frac{-1}{\ln \varepsilon} \ln \mu & (p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\ \frac{-1}{\ln \varepsilon} \ln \frac{\gamma}{\mu} & (\frac{\sqrt{5}-1}{2} < p < 1) \end{cases} \quad (21b)$$

$$D_{-\infty} = \alpha_{\max} = \alpha(-\infty) = \begin{cases} \frac{-1}{\ln \varepsilon} \ln \frac{\gamma}{\mu} & (0 < p < \frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\ \frac{-1}{\ln \varepsilon} \ln \mu & (p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}) \\ \frac{-1}{\ln \varepsilon} \frac{\ln \gamma}{2} & (\frac{\sqrt{5}-1}{2} < p < 1) \end{cases} \quad (21c)$$

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \frac{1}{\ln \varepsilon} \frac{\mu \ln \mu - \gamma \ln \gamma}{\mu + 2} \quad (21d)$$

现取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = \frac{2}{3}$, 此时 $\mu = 2$, $\gamma = 3$. 于是

$$D_q = \frac{1}{q-1} \left[q + \frac{1}{\ln 2} \ln \sqrt{1 + 4 \left(\frac{3}{4}\right)^q} - 1 \right] \quad (22a)$$

$$D_0 = \frac{\ln[(\sqrt{5}+1)/2]}{\ln 2} = 0.6942 \quad (22b)$$

$$D_{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{3}{2} = 0.5850 \quad (22c)$$

$$D_{-\infty} = \frac{1}{\ln 2} \frac{\ln 3}{2} = 0.7925 \quad (22d)$$

$$D_1 = \frac{1}{\ln 2} \frac{3 \ln 3 - 2 \ln 2}{4} = 0.5888 \quad (22e)$$

以及

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)q + 1 - \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\sqrt{1 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^\alpha} - 1 \right) \quad (23)$$

其中

$$q = \frac{1}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \{2\ln(\ln 3 - \alpha \ln 4) - \ln[(1 - \alpha^2)\ln^2 2 - (1 - \alpha)\ln 2 \ln 3]\} \quad (24)$$

图2给出了该双标度 Cantor 集的 D_q 谱和 $f(\alpha)$ 谱. 显然, 应用谱维数方程来讨论按严格递

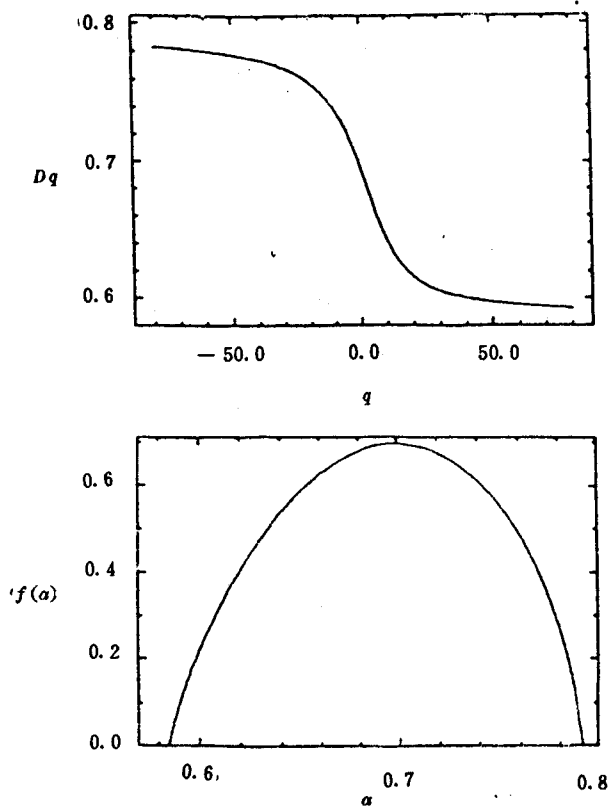


图2 双标度 Cantor 下的 D_q 谱和 $f(\alpha)$ 谱

Fig. 2 The D_q and $f(\alpha)$ spectrum for the two-scaled Cantor set

归法则生成的具有双标度的 Cantor 集. 所得结论和由 J. Hakansson 等人所给出的结果相吻合^[1].

参 考 文 献

- [1] J. Hakansson, G. Russberg, *Phys. Rev.*, 1990, A41, 1855
[2] Halsey, T. C. et al, *Phys. Rev.*, 1986, A33(2), 1141
[3] A. Renyi, *Probability Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1970
[4] B. B. Mandelbrot, *J. Fluid. Math.*, 1974, 62, 331
[5] 李军, 林宗德, 上海师范大学学报(自然科学版), 1992, 21(3)

Multifractals Created by Exact Recursive Rule and the Equation of Dimension' s Spectrum

Li Jun

(Department of Physics)

Abstract

Hausdorff Dimension is an important tool of studying simple fractals. In this paper we have generalized Hausdorff Dimension in order to discuss multifractals and obtain a general equation about the spectrum dimension D_s of multifractals created by exact recursive rule. This general equation is derived by the definition of Generalized Hausdorff Dimensions. As a model we use a simple one-dimensional Cantor set whose D_s and $f(\alpha)$ spectrum can be found analytically.

Keywords multifractals; Generalized Hausdorff Dimensions; fractal measure ; the $f(\alpha)$ spectrum