(18)

第29卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 29, No. 2
2000年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun. 2000

98-100

变分法的 Euler-Lagrange 方程及其应用

倪　敏，冯承天

(上海师范大学 理工信息学院，上海 200234)

摘　要：国外数学物理教材已引入了求包含因变量 n 阶导数的泛函的极值问题的有关内容[1]. 作者引入 Euler-Lagrange 算符统一叙述其中最重要的 Euler-Lagrange 方程及其一些简单的应用，以期在理论力学和数理方法的教改中引进相应的内容.

关键词：变分法；Euler-Lagrange 方程；极值函数　E-L方程

中图分类号：O176　**文献标识码**：C　**文章编号**：1000-5137(2000)02-0098-03

1　国内现有教材[2,3]中所论述的变分法

由变量 t 给出的函数

$$x^\alpha = x^\alpha(t), \qquad \alpha = 1,2\ldots,m, \tag{1}$$

定义了拉氏函数

$$L = L(t, x^\alpha(t), \dot{x}^\alpha(t)), \tag{2}$$

而由后者给出的泛函

$$I(x^\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x^\alpha(t), \dot{x}^\alpha(t))\mathrm{d}t, \tag{3}$$

能取得极值的条件是函数 $x^\alpha(t)$ 等满足下列 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,m, \tag{4}$$

为了便于推广，引入下列 Euler-Lagrange 算符

$$E_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,m, \tag{5}$$

于是(4)式就可表示为

$$E_\alpha(L) = 0, \quad \alpha = 1,2,\cdots,m \tag{6}$$

2　$L = L(t, x, x^{(1)})$ 时的情况

在这里 t 表示 t^i，$i=1,2,\cdots,n$；x 表示 $x^\alpha(t)$，$\alpha=1,2,\cdots,m$，而 $x^{(1)}$ 表示 x^α 等对 t^i 等的一

收稿日期：1999-11-24

作者简介：倪敏(1960-)，女，上海师范大学理工信息学院讲师. 冯承天(1941-)，男，上海师范大学理工信息学院教授.

阶偏导数$\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}=x_i^\alpha,\alpha=1,2,\cdots,m,i=1,2,\cdots,n.$

可以证明[4],此时 $$I(x)=\int_G L(t,x,x^{(1)})\mathrm{d}t^1\mathrm{d}t^2\cdots\mathrm{d}t^n, \tag{7}$$

能取极值的条件是函数 $x^\alpha(t)$ 等满足下列 Euler-Lagrange 方程

$$E_\alpha(L)=0,\qquad \alpha=1,2,\cdots,m, \tag{8}$$

其中 $$E_\alpha=D_i(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha})-\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\qquad \alpha=1,2,\cdots,m, \tag{9}$$

而 $$D_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^i},\qquad i=1,2,\cdots,n, \tag{10}$$

3 $L=L(t,x,x^{(1)},\cdots,x^{(k)})$时的情况

其中 t 表示 $t^i,i=1,2,\cdots,n$; x 表示 $x^\alpha(t),\alpha=1,2,\cdots,m$;而 $x^{(j)}$表示任一因变量 x^α 对自变量 t^i 等的 j 阶偏导数,$j=1,2,\cdots,k$.

对于 $$I(x)=\int_\Omega L(t,x,x^{(1)},\cdots,x^{(k)})\mathrm{d}t^1\mathrm{d}t^2\cdots\mathrm{d}t^n \tag{11}$$

能够证明[1,5],它能取极值的条件是函数 $x^\alpha(t)$等满足下列 Euler-Lagrange 方程

$$E_\alpha(L)=0,\qquad \alpha=1,2,\cdots,m, \tag{12}$$

其中

$$E_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-D_i\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}+D_iD_j\frac{\partial}{\partial x_{ij}^\alpha}+\cdots+(-1)^kD_{i_1}D_{i_2}\cdots D_{i_k}\frac{\partial}{\partial x^\alpha_{i_1i_2\cdots i_k}},\alpha=1,2,\cdots,m \tag{13}$$

以及 $D_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^i}$, $x_{ij}^\alpha=\frac{\partial^2x^\alpha}{\partial t^i\partial t^j}$等.

4 一些简单的应用

4.1 Klein—Gordon 方程和 Laplace 方程

从 $$L=\frac{1}{2}\alpha^{ij}x_ix_j+\frac{1}{2}\mu^2x^2, \tag{14}$$

其中 $\alpha^{ij}=\alpha^{ji}$和 μ 都是常数,有 Euler-Lagrange 方程

$$\alpha^{ij}\frac{\partial^2x}{\partial t^i\partial t^j}=\mu^2x, \tag{15}$$

作为特殊情况,当 $n=4$,以及 $\alpha^{ij}=\delta^{ij}$时,即有熟知的 Klein-Gordon 方程;当 $n=3$,$\alpha^{ij}=\delta^{ij}$,以及 $\mu=0$时,即有 Laplace 方程.

4.2 Sine-Gordon 方程

从 $$L=-\frac{1}{2}x_1x_2+\cos x, \tag{16}$$

有 $$\frac{\partial L}{\partial x}-D_1\frac{\partial L}{\partial x_1}-D_2\frac{\partial L}{\partial x_2}=0, \tag{17}$$

此即 Sine-Gordon 方程

$$x_{12} - \sin x = 0. \tag{18}$$

4.3 Korteweg-de Vries 方程

从
$$L = \frac{1}{2}x_1^1 x_2^1 + \frac{1}{6}(x_1^1)^3 + x_1^1 x_1^2 + (\frac{1}{2}x^2)^2, \tag{19}$$
得相应的 Euler-Lagrange 方程组
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^1} - D_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1^1} - D_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2^1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x^2} - D_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1^2} - D_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2^2} = 0, \end{cases} \tag{20}$$
即
$$\begin{cases} x_{12}^1 + x_1^1 x_{11} + x_{11}^2 = 0, \\ x_{11}^1 - x^2 = 0, \end{cases} \tag{21}$$
从中消去 x^2,有
$$x_{12}^1 + x_1^1 x_{11} + x_{111}^1 = 0, \tag{22}$$
又令 $x=t^1, t=t^2, \omega=x_1^1$,则有 Korteweg-de Vries 方程
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} = 0. \tag{23}$$

关于 Euler-Lagrange 方程的其他应用请参见[1]中的讨论.

参考文献:

[1] HASSANI S. Mathematical Physics[M]. Springer—Verlag,1999

[2] 梁昆淼. 数学物理方法[M]. 北京:高等教育出版社,1990

[3] 苏云荪. 理论力学[M]. 北京:高等教育出版社. 1990

[4] LIVELOCK D, RUND H TENSORS. Differential Forms and Variational Principles[M]. John Wiley & Sons,1975

[5] BLUMAN G W, KUMEI S. Symmetries and Differential Equations[M]. Springer-Verlag,1989

The Euler-Lagrange Equations in the Calculus of Variations and their Simple Applications

NI Min, FENG Cheng-tian

(College of Science, Engineering and Information, Shanghai Teachers University, Shanghai, 200234, China)

Abstract: The Euler-Lagrange Equations in the calculus of variations are discussed and their simple applications are introduced.

Key words: Calculus of variations; Euler-Lagrange Equation; extreme fuction