方阵秩的下界估计

葛元冲

提　要　通过方阵分块，利用子矩阵的迹，给出方阵秩的下界估计数列.

关键词　方阵秩；迹；特征值；下界；非异性

中图法分类号　O241.6

0　引　言

在文[1]中将方阵分成4块，通过方阵迹给出方阵秩的下界估计式(参阅式(3.5)及[1]). 嗣后，文[2]给出细分9块后的方阵秩的下界估计式(参阅式(3.6)及[2]). 从一般的方阵分块，给出一般的方阵秩的下界估计式数列.

1　方阵的 t 分划、分划串 $\tilde{t}$ 以及系列 T, $\langle T\rangle$

设 $M(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶复方阵 $(n\geqslant 2)$，对任意正整数 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ ($\sum\limits_{i=1}^{t} p_i = n$, $2\leqslant t\leqslant n$)，将 M 分为 t^2 块(以后简称 t 分划)，记作

$$M^{(t)} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & & & \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tt} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 $p_i\times p_j$ 子矩阵. 又设初始分划 $t_0 = 2$，然后，对确定的2分划加细分块至 t 分划 $(3\leqslant t\leqslant n)$，此分划过程称为分划串 $\tilde{t}$，具体操作如下：

若 M 已有 $(t-1)$ 分划，为便于表述，记其元素为 $A_{ij}{}^{(t-1)}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, t-1)$. 对某固定 i，令

$$A_{ij}{}^{(t-1)} = \begin{pmatrix} A_{ij} \\ A_{i+1j} \end{pmatrix}, A_{ji}{}^{(t-1)} = (A_{ji} \quad A_{ji+1}), \ (j = 1, 2, \cdots, t-1).$$

收稿日期：1996-08-07

作者葛元冲，男，高级讲师，上海第一纺织工业学校，上海，200234

$$A_{ii}^{(t-1)}=\begin{pmatrix}A_{ii} & A_{ii+1}\\ A_{i+1i} & A_{i+1i+1}\end{pmatrix}.\qquad(1.1)$$

$M^{(t-1)}$ 加细分块成 $M^{(t)}$. 从以上操作可知,某确定的初始分划 $t_0=2$ 到 t,其过程的分划串 $\tilde{t}$ 至少存在一条,称其全体为分划系列 T, $T=\{$分划串 $\tilde{t}\}$. 又因不同的 2 分划可形成不同的分划系列 T,记其全体为 $\{T\}$. 在分划系列 T 中,令

$$\zeta_{11}^2=\mathrm{tr}(A_{21}\overline{A}'_{21}),\qquad \zeta_{12}^2=\mathrm{tr}(A_{12}\overline{A}'_{12}),$$

以及

$$\begin{cases}\zeta_{m1}^2=\sum\limits_{i=1}^{m-1}(\zeta_{i1}/\zeta_{i2})\mathrm{tr}(A_{im}\overline{A}'_{im}+\mathrm{tr}(A_{m+1m}\overline{A}'_{m+1m}),\\ \zeta_{m2}^2=\sum\limits_{j=1}^{m-1}(\zeta_{i2}/\zeta_{i1})\mathrm{tr}(A_{mj}\overline{A}'_{mj}+\mathrm{tr}(A_{mm+1}\overline{A}'_{mm+1}),\quad(2\leqslant m\leqslant t-1)\end{cases}$$

$$k_i^2=\zeta_{i1}/\zeta_{i2},\quad(\zeta_{i1}>0,\zeta_{i2}>0,i=1,2,\cdots,t-1,\text{见附注 }*).$$

构造方阵函数

$$K^{(t)}(x)=\begin{bmatrix}k_1I_{p_1} & & & & & \\ & k_2I_{p_2} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & k_{t-2}I_{p_{t-2}} & & \\ & 0 & & & xI_{p_{t-1}} & \\ & & & & & I_{p_t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t}\\ \cdots & & & \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tt}\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}k_1^{-1}I_{p_1} & & & & & \\ & k_2^{-1}I_{p_2} & \ddots & & 0 & \\ & & & k_{t-2}^{-1}I_{p_{t-2}} & & \\ & 0 & & & x^{-1}I_{p_{t-1}} & \\ & & & & & I_{p_t}\end{bmatrix}\quad(t=2,3,\cdots,n).$$

计算方阵迹 $\mathrm{tr}(K^{(t)}(x)\overline{K^{(t)'}(x)})$,整理后

$$g^{(t)}(x)=\mathrm{tr}(K^{(t)}(x)\overline{K^{(t)'}(x)})=\sum_{i=1}^{t-2}\sum_{j=1}^{t-2}(k_i/k_j)^2\mathrm{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})+\sum_{i=1}^{t-2}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it+1}\overline{A}'_{it+1})+$$
$$\sum_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}\mathrm{tr}(A_{tj}\overline{A}'_{tj})+\mathrm{tr}(A_{t-1t-1}\overline{A}'_{t-1t-1})+\mathrm{tr}(A_{tt}\overline{A}'_{tt})+x^{-2}[\sum_{i=1}^{t-2}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it-1}\overline{A}'_{it-1})+$$
$$\mathrm{tr}(A_{tt-1}\overline{A}'_{tt-1})]+x^2[\sum_{j=1}^{t-2}k_j^2\mathrm{tr}(A_{t-1j}\overline{A}'_{t-1j})+\mathrm{tr}(A_{t-1t}\overline{A}'_{t-1t})].\qquad(1.2)$$

令 $\frac{\partial g^{(t)}(x)}{\partial x}=0$,得到

$$x^2=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{t-2}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it-1}\overline{A}'_{it-1})+\mathrm{tr}(A_{tt-1}\overline{A}'_{tt-1})}{\sum\limits_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}\mathrm{tr}(A_{t-1j}\overline{A}'_{t-1j})+\mathrm{tr}(A_{t-1t}\overline{A}'_{t-1t})}}=\frac{\zeta_{t-11}}{\zeta_{t-12}}.$$

即, $x_{\min}=k_{t-1}$. 于是有

$$g_{\min}^{(t)}=g^{(t)}(k_{t-1})=\operatorname{tr}(K^{(t)}(k_{t-1})\overline{K^{(t)'}(k_{t-1})})=\sum_{i=1}^{t-2}\sum_{j=1}^{t-2}(k_i/k_j)^2\operatorname{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})+\sum_{i=1}^{t-2}k_i^{2}\operatorname{tr}(A_{it}\overline{A}'_{it})+\sum_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}\operatorname{tr}(A_{tj}\overline{A}'_{tj})+\operatorname{tr}(A_{t-1t-1}\overline{A}'_{t-1t-1})+\operatorname{tr}(A_{tt}\overline{A}'_{tt})+k_{t-1}^{-2}\zeta_{t-11}+k_{t-1}^{2}\zeta_{t-12}. \tag{1.3}$$

2 非增数列 $g_{\min}^{(l)}(l=2,3,\cdots,t)$

在分划串 $\tilde{t}$ 中，M 从分划 $(l-1)$ 加细为分划 $l(l=2,3,\cdots,t)$，据式(1.1)，有

$$\operatorname{tr}(A_{t-1j}^{(l-1)}\overline{A_{t-1j}^{(l-1)'}})=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}A_{t-1j}\\A_{tj}\end{pmatrix}(\overline{A}'_{t-1j}\quad\overline{A}'_{tj})\right]=\operatorname{tr}(A_{t-1j}\overline{A}'_{t-1j})+\operatorname{tr}(A_{tj}\overline{A}'_{tj})$$

$$\operatorname{tr}(A_{it-1}^{(l-1)}\overline{A_{it-1}^{(l-1)'}})=\operatorname{tr}\left[(A_{it-1}\quad A_{it})\begin{pmatrix}\overline{A}'_{it-1}\\\overline{A}'_{it}\end{pmatrix}\right]=\operatorname{tr}(A_{it-1}\overline{A}'_{it-1})+\operatorname{tr}(A_{it}\overline{A}'_{it}),$$

$$\operatorname{tr}(A_{t-1t-1}^{(l-1)}\overline{A_{t-1t-1}^{(l-1)'}})=\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix}A_{t-1t-1}&A_{t-1t}\\A_{tt-1}&A_{tt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{A}'_{t-1t-1}&\overline{A}'_{tt-1}\\\overline{A}'_{t-1t}&\overline{A}'_{tt}\end{pmatrix}\right]=\operatorname{tr}(A_{t-1t-1}\overline{A}'_{t-1t-1})+\operatorname{tr}(A_{t-1t}\overline{A}'_{t-1t})+\operatorname{tr}(A_{tt-1}\overline{A}'_{tt-1})+\operatorname{tr}(A_{tt}\overline{A}'_{tt}). \tag{2.1}$$

在式(1.2)中，令 $x=1$，且利用上述关系式(2.1)，得

$$g^{(t)}(1)=\sum_{i=1}^{t-2}\sum_{j=1}^{t-2}(k_i/k_j)^2\operatorname{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})+\sum_{i=1}^{t-2}k_i^{2}[\operatorname{tr}(A_{it-1}\overline{A}'_{it-1})+\operatorname{tr}(A_{it}\overline{A}'_{it})]+\sum_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}[\operatorname{tr}(A_{t-1j}\overline{A}'_{t-1j})+\operatorname{tr}(A_{tj}\overline{A}'_{tj})]+[\operatorname{tr}(A_{t-1t-1}\overline{A}'_{t-1t-1})+\operatorname{tr}(A_{tt}\overline{A}'_{tt})+\operatorname{tr}(A_{tt-1}\overline{A}'_{tt-1})+\operatorname{tr}(A_{t-1t}\overline{A}'_{t-1t})]=\sum_{i=1}^{t-2}\sum_{j=1}^{t-2}(k_i/k_j)^2\operatorname{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})+\sum_{i=1}^{t-2}k_i^{2}\operatorname{tr}(A_{it-1}^{(t-1)}\overline{A}_{it-1}^{(t-1)'}+\sum_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}\operatorname{tr}(A_{t-1j}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1j}^{(t-1)'}+\operatorname{tr}(A_{t-1t-1}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1t-1}^{(t-1)'}). \tag{2.2}$$

根据式(1.3)，有

$$g_{\min}^{(t-1)}=g^{(t-1)}(k_{t-2})=\sum_{i=1}^{t-3}\sum_{j=1}^{t-3}(k_i/k_j)^2\operatorname{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})+\sum_{i=1}^{t-3}k_i^{2}\operatorname{tr}(A_{it-1}^{(t-1)}\overline{A}_{it-1}^{(t-1)'})+\sum_{j=1}^{t-3}k_j^{-2}\operatorname{tr}(A_{t-1j}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1j}^{(t-1)'})+\operatorname{tr}(A_{t-2t-2}\overline{A}'_{t-2t-2})+\operatorname{tr}(A_{t-1t-1}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1t-1}^{(t-1)'})+k_{t-2}^{-2}[\sum_{i=1}^{t-3}k_i^{2}\operatorname{tr}(A_{it-2}\overline{A}'_{it-2})+\operatorname{tr}(A_{t-1t-2}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1t-2}^{(t-1)'})]+k_{t-2}^{2}[\sum_{j=1}^{t-3}k_j^{-2}\operatorname{tr}(A_{t-2j}\overline{A}'_{t-2j})+\operatorname{tr}(A_{t-2t-1}^{(t-1)}\overline{A}_{t-2t-1}^{(t-1)'})].$$

且注意到上式中

$$\sum_{i=1}^{t-3}\sum_{j=1}^{t-3}(k_i/k_j)^2\operatorname{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})=\sum_{i=1}^{t-2}\sum_{j=1}^{t-2}(k_i/k_j)^2\operatorname{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})-$$

$$k_{t-2}^{-2}\sum_{i=1}^{t-2}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it-2}\overline{A}'_{it-2})-$$

$$k_{t-2}^{2}\sum_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}\mathrm{tr}(A_{t-2j}\overline{A}'_{t-2j})+\mathrm{tr}(A_{t-2t-2}\overline{A}'_{t-2t-2}).$$

$$\sum_{i=1}^{t-3}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it-1}^{(t-1)}\overline{A}_{it-1}^{(t-1)'})=\sum_{i=1}^{t-2}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it-1}^{(t-1)}\overline{A}_{it-1}^{(t-1)'})-$$

$$k_{t-2}^{2}\mathrm{tr}(A_{t-2t-1}^{(t-1)}\overline{A}_{t-2t-1}^{(t-1)'}).$$

$$\sum_{j=1}^{t-3}k_j^{-2}\mathrm{tr}(A_{t-1j}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1j}^{(t-1)'})=\sum_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}\mathrm{tr}(A_{t-1j}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1j}^{(t-1)'})-$$

$$k_{t-2}^{-2}\mathrm{tr}(A_{t-1t-2}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1t-2}^{(t-1)'}).$$

$$k_{t-2}^{-2}\sum_{i=1}^{t-3}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it-2}\overline{A}'_{it-2})=k_{t-2}^{-2}\sum_{i=1}^{t-2}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it-2}\overline{A}'_{it-2})-\mathrm{tr}(A_{t-2t-2}\overline{A}'_{t-2t-2}).$$

$$k_{t-2}^{2}\sum_{j=1}^{t-3}k_j^{-2}\mathrm{tr}(A_{t-2j}\overline{A}'_{t-2j})=k_{t-2}^{2}\sum_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}\mathrm{tr}(A_{t-2j}\overline{A}'_{t-2j})-\mathrm{tr}(A_{t-2t-2}\overline{A}'_{t-2t-2}).$$

整理后,

$$g_{\min}^{(t-1)}=\sum_{i=1}^{t-2}\sum_{j=1}^{t-2}(k_i/k_j)^2\mathrm{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})+\sum_{i=1}^{t-2}k_i^2\mathrm{tr}(A_{it-1}^{(t-1)}\overline{A}_{it-1}^{(t-1)'})+$$

$$\sum_{j=1}^{t-2}k_j^{-2}\mathrm{tr}(A_{t-1j}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1j}^{(t-1)'})+\mathrm{tr}(A_{t-1t-1}^{(t-1)}\overline{A}_{t-1t-1}^{(t-1)'}).$$

与式(2.2)比较,得

$$g_{\min}^{(t-1)}=g_{(1)}^{(t)}.$$

又由于 $g_{(1)}^{(t)}\geqslant g_{\min}^{(t)}$. 因此对于不同的分划串 t,即对于同一分划系列 T(且记 $g_{\min}^{(t)}$ 为 $g_{\min}^{(t)}(T)$),都有非增数列

$$g_{\min}^{(2)}(T)\geqslant g_{\min}^{(3)}(T)\geqslant\cdots\geqslant g_{\min}^{(t)}(T),\qquad(2\leqslant t\leqslant n).\tag{2.3}$$

3 方阵秩的下界估计式数列

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 M 的复特征值. 若 $r(M)=r$,则有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 不为 0. 由于存在 U 方阵,使

$$UM\overline{U}'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ \text{0} & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

于是 $|\mathrm{tr}(M)|^2=|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|^2=|\sum_{i=1}^{r}\lambda_i|^2$. 由柯西不等式,得

$$|\mathrm{tr}(M)|^2=|\sum_{i=1}^{r}\lambda_i|^2\leqslant r|\sum_{i=1}^{r}\lambda_i|^2.\tag{3.1}$$

由于 $K^{(t)}(k_{t-1})$ 与 M 相似，有相同特征值(与分划无关)．并且 $\mathrm{tr}(K^{(t)}(k_{t-1})\overline{K^{(t)'}}(k_{t-1}))=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sigma$(其中 σ 是 $UM\overline{U'}$ 中其他元素的平方和)．因此，对于任意分划 $t(2\leqslant t\leqslant n)$，有

$$g_{\min}^{(t)}=\mathrm{tr}(K^{(t)}(k_{t-1})\overline{K^{(t)'}}(k_{t-1}))\geqslant\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2. \tag{3.2}$$

考虑到式(2.3)在同一分划系列 T 内成立，且对于每一个 $T\in\{T\}$，总存在一确定的2分划与其对应．记全体2分划为{2分划}，记取小运算 $\min\limits_{\{2分划\}} g_{\min}^{(2)}$ 中取小2分划所对应的分划系列 T 为 T_0．于是有

$$\min_{\{2分划\}} g_{\min}^{(2)}\geqslant g_{\min}^{(3)}(T_0)\geqslant g_{\min}^{(4)}(T_0)\geqslant\cdots\geqslant g_{\min}^{(t)}(T_0),\qquad(t\leqslant n).$$

又记 $L^{(2)}=\min\limits_{\{2分划\}} g_{\min}^{(2)},L^{(s)}=\min\limits_{\{2分划\}} g_{\min}^{(s)}(T_0)$，　$(3\leqslant s\leqslant t)$，有

$$L^{(2)}\geqslant L^{(3)}\geqslant\cdots\geqslant L^{(t)},\qquad(t\leqslant n). \tag{3.3}$$

又据式(3.1)，(3.2)，得 $|\mathrm{tr}(M)|^2\leqslant r(M)L^{(t)}$　$(2\leqslant t\leqslant n)$，或

$$r(M)\geqslant\frac{|\mathrm{tr}(M)|^2}{L^{(t)}}\qquad(2\leqslant t\leqslant n), \tag{3.4}$$

当 $t=2$ 时，可得引言中关于文[1]结论

$$\begin{cases}g_{\min}^{(2)}=\mathrm{tr}(A_{11}\overline{A}'_{11})+\mathrm{tr}(A_{22}\overline{A}'_{22})+2\sqrt{\mathrm{tr}(A_{12}\overline{A}'_{12})\mathrm{tr}(A_{21}\overline{A}'_{21})}\\ r(M)\geqslant\dfrac{|\mathrm{tr}(M)|^2}{L^{(2)}}\end{cases}. \tag{3.5}$$

当 $t=3$ 时，得引言中关于文[2]结论

$$\begin{cases}g_{\min}^{(3)}=\mathrm{tr}(A_{11}\overline{A}'_{11})+\mathrm{tr}(A_{22}\overline{A}'_{22})+\mathrm{tr}(A_{33}\overline{A}'_{33})+k_1^2\mathrm{tr}(A_{13}\overline{A}'_{13})+k_1^{-2}\mathrm{tr}(A_{31}\overline{A}'_{31})+2\zeta_{21}\zeta_{22}.\\ r(M)\geqslant\dfrac{|\mathrm{tr}(M)|^2}{L^{(3)}}\end{cases} \tag{3.6}$$

最后，由式(3.3)，(3.4)，得到方阵秩下界估计式非增数列

$$r(M)\geqslant\frac{|\mathrm{tr}(M)|^2}{L^{(n)}}\geqslant\frac{|\mathrm{tr}(M)|^2}{L^{(n-1)}}\geqslant\cdots\geqslant\frac{|\mathrm{tr}(M)|^2}{L^{(3)}}\geqslant\frac{|\mathrm{tr}(M)|^2}{L^{(2)}}.$$

同时，对于任意分划系列 $T(2\leqslant t\leqslant n)$，当

$$\frac{|\mathrm{tr}(M)|^2}{L^{(t)}}>n-1\ 时\Rightarrow M\ 非异．$$

在分划系列 T 中，至少存在一条分划串 $\tilde{t}$，使 $\zeta_{i1},\zeta_{i2}>0,(i=1,2,\cdots,t-1)$，且与下列不等式组等价：

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=2}^{t}\mathrm{tr}(A_{i1}\overline{A}'_{i1})>0\\ \sum\limits_{i=3}^{t}[\mathrm{tr}(A_{i1}\overline{A}'_{i1}+\mathrm{tr}(A_{i2}\overline{A}'_{i2})]>0\\ \cdots\cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{l}\sum\limits_{i=l+1}^{t}\mathrm{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})>0\qquad(1\leqslant l\leqslant t-1)\end{cases}\ 及\begin{cases}\sum\limits_{j=2}^{t}\mathrm{tr}(A_{1j}\overline{A}'_{1j})>0\\ \sum\limits_{j=3}^{t}[\mathrm{tr}(A_{1j}\overline{A}'_{1j}+\mathrm{tr}(A_{2j}\overline{A}'_{2j})]>0\\ \cdots\cdots\\ \sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=l+1}^{t}\mathrm{tr}(A_{ij}\overline{A}'_{ij})>0\end{cases},$$

显然，只要 $\mathrm{tr}(A_{t1}\overline{A}'_{t1})>0$ 及 $\mathrm{tr}(A_{1t}\overline{A}'_{1t})>0$ 或只要 $a_{t1}\neq0,a_{1t}\neq0$，便可满足上述不等式组，至少

存在一条分划串 $\tilde{t}$,使 $\zeta_{i1},\zeta_{i2}>0$. 然而,矩阵的行互换或列互换(其秩不变),总可做到 $a_{t1}\neq0$, $a_{1t}\neq0$.

参 考 文 献

1 屠伯埙. 矩阵秩的下界与方阵的非异性. 复旦学报,1982(4):416~422
2 葛太吉. 矩阵秩的下界与方阵的非异性. 中专数学教学,1996(6):15~18

Schauder Lower Bound of the Rank of a Matrix

Ge Yuanchong
(Shanghai No. 1 School of Textile Engineering)

Abstract Any square matrix can be divided into submatrices so that a Schauder lower bound sequence for its rank is obtained.

Key words rank; square matrix; proper solution; lower bound