关于一类非主型方程的 Goursat 问题的新现象

徐 元 钟

§1. 引 言

在研究非主型方程时，Грушин[1]发现了在解的光滑性问题中有离散现象，即方程中的参量取一些离散的例外值时，解突然失去了光滑性。Treves[3]发现了这种现象也出现在解的唯一性问题之中。在文献[4]、[5]中，对离散现象作了进一步的揭示，并发现在解的存在性问题中，也出现离散现象。在文献[5]中，除讨论了 Cauchy 问题外，还讨论了 Goursat 问题。

在这里，我们将以方程

$$u_{xx}-xu_{xy}+au_x+bu_y+cu=0 \tag{1}$$

(其中系数 a, b, c 为 x 或 y 的函数)为例，进一步讨论非主型方程的离散现象。

我们考虑 Goursat 问题

$$\begin{cases} u_{xx}-xu_{xy}+au_x+bu_y+cu=0 \quad (y>0), \\ u(x,\ 0)=\varphi(x)。\end{cases} \tag{2}$$

为了讨论的方便，我们将假设问题(2)中的函数 a, b, c 同时为 x 或 y 的解析函数，且函数 $\varphi(x)$ 也是解析的，并只对级数解

$$u(x,\ y)=\sum_{i,j=0}^{\infty} u_{ij}\frac{x^i y^j}{i!j!}$$

进行讨论。

对这问题，当 $b(0)$ 不等于 0, 1, 2, … 这些离散的数值时，它的解将是唯一确定的，当 $b(0)$ 取这些例外值时，解的唯一确定将被破坏。但我们发现，在一定的相容条件下，即当 $\varphi(x)$ 满足一定条件时，解仍可唯一确定。设我们记 $\varDelta_0=b(0)-n$, $n\in \boldsymbol{Z}_+$, 则 $\varDelta_0$ 将是离散现象的一个判别式。但当 $\varDelta_0=0$ 时，我们对 Goursat 问题(2)还可以有一系列的判别式 $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$, … 及一系列的相容条件 R_0, R_1, R_2, R_3, …。这里我们可以看到非主型方程的一种新现象。对这种现象的进一步讨论将是十分有趣的。

§2. 结 果

我们先考虑 Goursat 问题

$$\begin{cases} u_{xx}-xu_{xy}+b(y)u_y+c(y)u=0 \quad (y>0), \\ u(x,\ 0)=\varphi(x)。\end{cases} \tag{3}$$

假设

$$\begin{cases} b(y)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j y^j, \\ c(y)=\sum_{j=0}^{\infty} c_j y^j, \\ \varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \frac{x^i}{i!}。\end{cases} \tag{4}$$

记

$$\begin{cases} \Delta_0(i)=b_0-i, \\ \Delta_l=j(j-1)\cdots(j-l+2)[b_l(j-l+1)+c_{l-1}] \quad (l=1, 2, \cdots), \end{cases} \tag{5}$$

及

$$R_l=l!c_l\varphi_n+\frac{\varphi_{n+2(l+1)}}{2^l l!} \quad (l=0, 1, 2, \cdots)。 \tag{6}$$

定理1 设问题(3)满足条件(4),则

1) 当$\Delta_0(i)\neq 0(i=0, 1, 2, \cdots)$时,问题(3)的解是唯一确定的。

2) 当$\Delta_0(n)=0(n\in \boldsymbol{Z}_+)$, $\Delta_l\equiv 0$* $(l=1, 2, 3, \cdots)$, $R_l=0(l=0, 1, 2, \cdots)$时,问题(3)的解不唯一。

3) 当$\Delta_0(n)=0$, $\Delta_l\equiv 0(l=1, 2, \cdots, k)$, $R_l=0(l=0, 1, \cdots, k)$, $\Delta_{k+1}\neq 0(j=k+1, k+2, \cdots)$时,问题(3)的解是唯一确定的。

证 我们假设

$$u(x, y)=\sum_{i,j=0}^{\infty} u_{ij}\frac{x^i y^j}{i!j!}。 \tag{7}$$

对(7)式进行微分,得

$$u_y=\sum_{i,j=0}^{\infty} u_{i,j+1}\frac{x^i y^j}{i!j!},$$

$$u_{xy}=\sum_{i,j=0}^{\infty} iu_{i,j+1}\frac{x^{i-1} y^j}{i!j!},$$

$$u_{xx}=\sum_{i,j=0}^{\infty} u_{i+2,j}\frac{x^i y^j}{i!j!}。$$

代入问题(3)中的方程,可得递推公式

$$\begin{aligned} &u_{i+2,j}+(b_0-i)u_{i,j+1}+(b_1 j+c_0)u_{ij}+\cdots+j(j-1)\cdots(j-k+2) \\ &\times[b_k(j-k+1)+c_{k-1}]u_{i,j-k+1}+j(j-1)\cdots(j-k+1)[b_{k+1}(j-k)+c_k] \\ &\times u_{i,j-k}+\cdots=0。\end{aligned} \tag{8}$$

1) 实际上,当j取定时,(8)式只是一个有限项之和。由定解条件$u(x, 0)=\varphi(x)$,可得

$$u_{i0}=\varphi_i \quad (i=0, 1, 2, \cdots)。$$

如果$\Delta_0(i)=b_0-i\neq 0(i=0, 1, 2, \cdots)$,由(8)式可唯一确定$u_{i,j+1}(i, j=0, 1, 2, \cdots)$,这样1)得证。

2) 此时(8)式变为

$$u_{i+2,j}+\Delta_0(i)u_{i,j+1}=0, \tag{9}$$

且由$c_l=0(l=0, 1, 2, \cdots)$,所以$R_l=\frac{\varphi_{n+2(l+1)}}{2^l l!}(l=0, 1, 2, \cdots)$。当$i=n$, $j=0$时,由(9)式得

$$u_{n+2,0}+\Delta_0(n)u_{n1}=0。$$

因为

$$u_{n+2,0}=\varphi_{n+2}=R_0=0,$$

* 这里$\Delta_l\equiv 0$指对一切j成立,相当于$b_l=c_{l-1}=0$.

故这时显然 u_{n1} 可任意取值。再取 $i=n$, $j=1$, 由(9)式得

$$u_{n+2,1}+\Delta_0(n)u_{n2}=0。$$

但取 $i=n+2$, $j=0$, 由(9)式可得

$$u_{n+2,1}=\frac{1}{2}u_{n+4,0}=\frac{1}{2}\varphi_{n+4}=R_1=0,$$

故 u_{n2} 可任意取值。同理取 $i=n$, $j=2, 3, 4, \cdots$ 时, u_{n3}, u_{n4}, u_{n5}, $\cdots$ 均可任意取值，所以问题(3)的解不唯一。

3) 此时为确定 u_{ij}, 只需看 $u_{nj}(j=1, 2, \cdots)$, 因为其他的 u_{ij} 由(8)式容易得到。取 $i=n$, 容易看出当 $\Delta_l\equiv0(l=0, 1, \cdots, k)$ 时, 必须要有 $R_l=0(l=0, 1, \cdots, k)$, 且由(8)式可得

$$u_{n+2,j}+\Delta_{k+1}u_{n,j-k}+\cdots=0。$$

由假设 $\Delta_{k+1}\neq0(j=k+1, k+2, \cdots)$, 故取 $j=k+1$, $k+2$, $\cdots$ 时, 即可唯一确定 u_{n1}, u_{n2}, $\cdots$。定理证毕。

附注。如果 $\Delta_{k+1}\equiv0$, 而 $R_{k+1}\neq0$, 则问题(3)的解将不存在。如果仅对某一 $j_0\geqslant k+1$、$\Delta_{k+1}(j_0)=0$, 则问题(3)的解是否存在, 将由关系式

$$\tilde{R}(j_0)=u_{n+2,j_0}+\Delta_{k+2}(j_0)u_{n,j_0-k-1}+\cdots+\Delta_{j_0+1}(j_0)u_{n0}$$

是否为零而定。如果 $\tilde{R}(j_0)\neq0$, 此时解不存在; 如果 $\tilde{R}(j_0)=0$, 则 u_{n,j_0-k} 将是任意的。我们可在 $x=0$ 上适当增加一个附加条件, 使得 u_{n,j_0-k} 唯一确定。

我们再考虑 Goursat 问题

$$\begin{cases}u_{xx}-xu_{xy}+a(y)u_x+b(y)u_y+c(y)u=0 \quad (y>0),\\ u(x, 0)=\varphi(x),\end{cases} \tag{10}$$

其中 $b(y)$, $c(y)$, $\varphi(x)$ 满足条件(4), 且设

$$a(y)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jy^j。 \tag{11}$$

我们把

$$u(x, y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}u_{ij}\frac{x^iy^j}{i!j!}$$

代入问题(10)中的方程, 得递推公式

$$\begin{aligned}u_{i+2,j}&+(b_0-i)u_{i,j+1}+(b_1j+c_0)u_{ij}+\cdots\\&+j(j-1)\cdots(j-k+1)[b_{k+1}(j-k)+c_k]u_{i,j-k}+\cdots\\&+a_0u_{i+1,j}+ja_1u_{i+1,j-1}+\cdots+j(j-1)\cdots(j-k+1)a_ku_{i+1,j-k}+\cdots=0。\end{aligned} \tag{12}$$

把上式改写为

$$\begin{aligned}u_{i+2,j}&+\Delta_0(i)u_{i,j+1}+\Delta_1(j)u_{ij}+\cdots+\Delta_{k+1}(j)u_{i,j-k}+\cdots+a_0u_{i+1,j}+ja_1u_{i+1,j-1}+\cdots\\&+j(j-1)\cdots(j-k+1)a_ku_{i+1,j-k}+\cdots=0,\end{aligned} \tag{13}$$

其中 Δ_0, Δ_1, Δ_2, $\cdots$ 与定理1相同。现在我们来确定相应的 $R_l(l=0, 1, 2, \cdots)$。

我们把等式(13)改写为

$$\Delta_0(i)u_{i,j+1}+Q_0(j, u_{ij}, u_{i+1,j}, u_{i+2,j}, \cdots)=0。 \tag{14}$$

如果 $\Delta_0(n)=0$, 则

$$Q_0(j, u_{nj}, u_{n+1,j}, u_{n+2,j}, \cdots)=0。$$

记

$$Q_0(0, u_{n0}, u_{n+1,0}, u_{n+2,0})=R_0(u_{n0}, u_{n+1,0}, u_{n+2,0}), \tag{15}$$

所以有

$$R_0(u_{n0}, u_{n+1,0}, u_{n+2,0})=0。$$

再改写 $Q_0(j, u_{ij}, u_{i+1,j}, u_{i+2,j}, \cdots)=0$ 为

$$g_{00}u_{ij}+g_{10}u_{i+1,j}+g_{20}u_{i+2,j}=-[\Delta_2(j)u_{i,j-1}+ja_1u_{i+1,j-1}+\cdots \\ +\Delta_{k+1}(j)u_{i,j-k}+j(j-1)\cdots(j-k+1)a_ku_{i+1,j-k}+\cdots], \tag{16}$$

注意，上式中的 $g_{00}=\Delta_1(j)$。取 $i=n$ 得

$$g_{00}u_{nj}+g_{10}u_{n+1,j}+g_{20}u_{n+2,j}=-v_{00}, \tag{17}$$

其中

$$v_{00}=\Delta_2(j)u_{n,j-1}+ja_1u_{n+1,j-1}+\cdots+\Delta_{k+1}(j)u_{n,j-k} \\ +j(j-1)\cdots(j-k+1)a_ku_{n+1,j-k}+\cdots。 \tag{18}$$

另外，由等式(13)可得下列关系式：

$$\Delta_0(n+1)u_{n+1,j}=-[u_{n+3,j-1}+\Delta_1(j-1)u_{n+1,j-1}+a_0u_{n+2,j-1}+\cdots]=-v_{10}, \tag{19}$$

$$\Delta_0(n+2)u_{n+2,j}=-[u_{n+4,j-1}+\Delta_1(j-1)u_{n+2,j-1}+a_0u_{n+3,j-1}+\cdots]=-v_{20}。 \tag{20}$$

显然 $\Delta_0(n+1)=-1$, $\Delta_0(n+2)=-2$，所以由(17)，(19)，(20)三式得

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{10} & g_{20} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{nj} \\ u_{n+1,j} \\ u_{n+2,j} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} v_{00} \\ v_{10} \\ v_{20} \end{pmatrix}。$$

由于 $g_{00}=\Delta_1(j)$，故得

$$2\Delta_1(j)u_{nj}+\begin{vmatrix} v_{00} & g_{10} & g_{20} \\ v_{10} & -1 & 0 \\ v_{20} & 0 & -2 \end{vmatrix}=0。$$

于是有

$$\Delta_1(j)u_{nj}+Q_1(j, u_{n,j-1}, u_{n+1,j-1}, u_{n+2,j-1}, u_{n+3,j-1}, u_{n+4,j-1}, \cdots)=0, \tag{21}$$

其中

$$Q_1(j, u_{n,j-1}, u_{n+1,j-1}, u_{n+2,j-1}, u_{n+3,j-1}, u_{n+4,j-1}, \cdots)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} v_{00} & g_{10} & g_{20} \\ v_{10} & -1 & 0 \\ v_{20} & 0 & -2 \end{vmatrix}。 \tag{22}$$

如果 $\Delta_1(j)\equiv 0$，则

$$Q_1(j, u_{n,j-1}, u_{n+1,j-1}, u_{n+2,j-1}, u_{n+3,j-1}, u_{n+4,j-1}, \cdots)=0。$$

记

$$Q_1(1, u_{n0}, u_{n+1,0}, u_{n+2,0}, u_{n+3,0}, u_{n+4,0})=R_1(u_{n0}, u_{n+1,0}, u_{n+2,0}, u_{n+3,0}, u_{n+4,0})。 \tag{23}$$

所以有 $R_1(u_{n0}, \cdots, u_{n+4,0})=0$。

我们再把 $Q_1(j, u_{n,j-1}, u_{n+1,j-1}, u_{n+2,j-1}, u_{n+3,j-1}, u_{n+4,j-1}, \cdots)=0$ 改写为

$$g_{01}u_{n,j-1}+g_{11}u_{n+1,j-1}+g_{21}u_{n+2,j-1}+g_{31}u_{n+3,j-1}+g_{41}u_{n+4,j-1}=-v_{01},$$

易见 $g_{01}=\Delta_2(j)$。我们可继续推导Q_2, R_2, $\cdots$。

如果已有 $\Delta_2(j)\equiv 0$, $R_2(u_{n0}, \cdots, u_{n+6,0})=0$, $\cdots$, $\Delta_{k-1}(j)\equiv 0$, $R_{k-1}(u_{n0}, \cdots, u_{n+2k,0})=0$。我们把

$$Q_{k-1}(j, u_{n,j-k+1}, u_{n+1,j-k+1}, \cdots, u_{n+2k,j-k+1}, \cdots)=0$$

改写成

$$g_{0,k-1}u_{n,j-k+1}+g_{1,k-1}u_{n+1,j-k+1}+\cdots+g_{2k,k-1}u_{n+2k,j-k+1}=-v_{0,k-1}, \tag{24}$$

其中 $g_{0,k-1}=\Delta_k(j)$。

又从(13)式可得下列关系式：

$$\begin{cases} \Delta_0(n+1)u_{n+1,j-k+1}=-(u_{n+3,j-k}+a_0u_{n+2,j-k}+\cdots)=-v_{1,k-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_0(n+2k)u_{n+2k,j-k+1}=-(u_{n+2k+2,j-k}+a_0u_{n+2k+1,j-k}+\cdots)=-v_{2k,k-1}。 \end{cases} \tag{25}$$

显然 $\Delta_0(n+1)=-1, \cdots, \Delta_0(n+2k)=-2k$。由关系式(24), (25)可得

$$\begin{pmatrix} g_{0,k-1} & g_{1,k-1} & \cdots & g_{2k,k-1} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n,j-k+1} \\ u_{n+1,j-k+1} \\ \vdots \\ u_{n+2k,j-k+1} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} v_{0,k-1} \\ v_{1,k-1} \\ \vdots \\ v_{2k,k-1} \end{pmatrix},$$

于是有

$$(2k)!\Delta_k(j)u_{n,j-k+1}+\begin{vmatrix} v_{0,k-1} & g_{1,k-1} & \cdots & g_{2k,k-1} \\ v_{1,k-1} & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{2k,k-1} & 0 & \cdots & -2k \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\Delta_k(j)u_{n,j-k+1}+Q_k(j, u_{n,j-k}, \cdots, u_{n+2k+2,j-k}, \cdots)=0,$$

其中

$$Q_k(j, u_{n,j-k}, \cdots, u_{n+2k+2,j-k}, \cdots)=\frac{1}{(2k)!}\begin{vmatrix} v_{0,k-1} & g_{1,k-1} & \cdots & g_{2k,k-1} \\ v_{1,k-1} & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{2k,k-1} & 0 & \cdots & -2k \end{vmatrix}。\tag{26}$$

如果 $\Delta_k(j)\equiv 0$, 得

$$Q_k(j, u_{n,j-k}, \cdots, u_{n+2k+2,j-k}, \cdots)=0。$$

记

$$Q_k(k, u_{n0}, \cdots, u_{n+2k+2,0})=R_k(u_{n0}, \cdots, u_{n+2k+2,0})。\tag{27}$$

所以有

$$R_k(u_{n0}, \cdots, u_{n+2k+2,0})=0。$$

由上面推导,与定理1证法相同,我们可得

定理2 设问题(10)满足条件(4)及条件(11), $\Delta_l(l=0, 1, 2, \cdots)$由(5)式确定, $R_0, R_1, \cdots, R_k, \cdots$ 由(15), (23), (27)等式确定,则

1) 当 $\Delta_0(i)\neq 0(i=0, 1, 2, \cdots)$时,问题(10)的解是唯一确定的。

2) 当 $\Delta_0(n)=0$, $\Delta_l\equiv 0(l=1, 2, 3, \cdots)$, $R_l=0(l=0, 1, 2, \cdots)$时,问题(10)的解不唯一。

3) 当 $\Delta_0(n)=0$, $\Delta_l\equiv 0(l=1, 2, \cdots, k)$, $R_l=0(l=0, 1, \cdots, k)$, $\Delta_{k+1}\neq 0(i=k+1, k+2, \cdots)$时,问题(10)的解是唯一确定的。

最后,我们考虑 Goursat 问题

$$\begin{cases} u_{xx}-xu_{xy}+a(x)u_x+b(x)u_y+c(x)u=0 \quad (y>0), \\ u(x, 0)=\varphi(x)。\end{cases}\tag{28}$$

假设

$$\begin{cases} a(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_ix^i, \\ b(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_ix^i, \\ c(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}c_ix^i, \\ \varphi(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varphi_i\dfrac{x^i}{i!}。\end{cases}\tag{29}$$

把

$$u(x, y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}u_{ij}\frac{x^iy^j}{i!j!}$$

代入问题(28)中的方程,得递推公式

$$u_{i+2,j}+(b_0-i)u_{i,j+1}+b_1iu_{i-1,j+1}+\cdots+b_ki(i-1)\cdots(i-k+1)u_{i-k,j+1}+\cdots+a_0u_{i+1,j}$$
$$+(c_0+ia_1)u_{ij}+\cdots+i(i-1)\cdots(i-k+1)[c_k+(i-k)a_{k+1}]u_{i-k,j}+\cdots=0。\tag{30}$$

取 $j=0,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n$。由公式(30)可得下列关系式:

$$\begin{cases} b_0u_{01}=-(u_{20}+a_0u_{10}+c_0u_{00})=-v_{20}, \\ (b_0-1)u_{11}+b_1u_{01}=-[u_{30}+a_0u_{20}+(c_0+a_1)u_{10}+c_1u_{00}]=-v_{30}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (b_0-n)u_{n1}+nb_1u_{n-1,1}+\cdots+n!b_nu_{01} \\ \quad =-[u_{n+2,0}+a_0u_{n+1,0}+(c_0+na_1)u_{n0}+\cdots+n!c_nu_{00}]=-v_{n+2,0}。\end{cases}\tag{31}$$

我们把(31)写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & b_0-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n!b_n & \cdots & \cdots & nb_1 & b_0-n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix} v_{20} \\ v_{30} \\ \vdots \\ v_{n+2,0} \end{pmatrix},\tag{32}$$

并简记为

$$P_0U_0=-V_0\ 。\tag{33}$$

记

$$\Delta_0=|P_0|=b_0(b_0-1)\cdots(b_0-n),\tag{34}$$

及

$$R_0(u_{00},\ u_{10},\ \cdots,\ u_{n+2,0})=\begin{vmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 & v_{20} \\ b_1 & b_0-1 & \cdots & 0 & v_{30} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n!b_n & \cdots & \cdots & nb_1 & v_{n+2,0} \end{vmatrix},\tag{35}$$

则由(32)可得

$$\Delta_0u_{n1}+R_0(u_{00},\ u_{10},\ \cdots,\ u_{n+2,0})=0。\tag{36}$$

如果 $\Delta_0\neq0(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$,即 $b_0-i\neq0(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$,则由(30)式立即可唯一确定出所有的 $u_{i,j+1}(i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。

如果 $\Delta_0=0$,即 $b_0=n$,记

$$R_0(u_{00},\ u_{10},\ \cdots,\ u_{n+2,0})=g_{00}u_{00}+g_{10}u_{10}+\cdots+g_{n+2,0}u_{n+2,0},\tag{37}$$

由(36)式即得

$$R_0(u_{00},\ u_{10},\ \cdots,\ u_{n+2,0})=g_{00}u_{00}+g_{10}u_{10}+\cdots+g_{n+2,0}u_{n+2,0}=0。$$

取 $j=1$,我们同样可得

$$R_0(u_{01},\ u_{11},\ \cdots,\ u_{n+2,1})=g_{00}u_{01}+g_{10}u_{11}+\cdots+g_{n+2,0}u_{n+2,1}=0。\tag{38}$$

由(30)式,取 $j=0,\ i=n+1,\ n+2$,则有下列关系式:

$$[b_0-(n+1)]u_{n+1,1}+(n+1)b_1u_{n1}+\cdots+(n+1)!b_{n+1}u_{01}$$
$$=-[u_{n+3,0}+a_0u_{n+2,0}+\cdots+(n+1)!c_{n+1}u_{00}]=-v_{n+3,0},\tag{39}$$
$$[b_0-(n+2)]u_{n+2,1}+(n+2)b_1u_{n+1,1}+\cdots+(n+2)!b_{n+2}u_{01}$$
$$=-[u_{n+4,0}+a_0u_{n+3,0}+\cdots+(n+2)!c_{n+2}u_{00}]=-v_{n+4,0}。\tag{40}$$

以(38)式代换(31)中的第$(n+1)$式,并增加(39),(40)两式,可得矩阵关系式

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{00} & g_{10} & \cdots & g_{n0} & g_{n+1,0} & g_{n+2,0} \\ (n+1)!b_{n+1} & \cdots & \cdots & (n+1)b_1 & -1 & 0 \\ (n+2)!b_{n+2} & \cdots & \cdots & (n+2)(n+1)b_2 & (n+2)b_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \\ u_{n+1,1} \\ u_{n+2,1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_{20} \\ v_{30} \\ \vdots \\ 0 \\ v_{n+3,0} \\ v_{n+4,0} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

并简记为

$$P_1U_1 = -V_1。\tag{42}$$

记

$$\Delta_1 = |P_1|, \tag{43}$$

及

$$R_1(u_{00}, u_{10}, \cdots, u_{n+4,0}) = \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & v_{20} & 0 & 0 \\ b_1 & n-1 & \cdots & v_{30} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{00} & g_{10} & \cdots & 0 & g_{n+1,0} & g_{n+2,0} \\ (n+1)!b_{n+1} & \cdots & \cdots & v_{n+3,0} & -1 & 0 \\ (n+2)!b_{n+2} & \cdots & \cdots & v_{n+4,0} & (n+2)b_1 & -2 \end{vmatrix}。\tag{44}$$

由(41)可得

$$\Delta_1 u_{n1} + R_1(u_{00}, u_{10}, \cdots, u_{n+4,0}) = 0。\tag{45}$$

如果 $\Delta_1 = 0$，则有

$$R_1(u_{00}, u_{10}, \cdots, u_{n+4,0}) = g_{01}u_{00} + g_{11}u_{10} + \cdots + g_{n+4,1}u_{n+4,0} = 0。$$

我们可继续进行讨论。一般我们假设有矩阵关系式

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{0,k-1} & g_{1,k-1} & \cdots & g_{n+2k-1,k-1} & g_{n+2k,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n+2k-1)!b_{n+2k-1} & \cdots & \cdots & -(2k-1) & 0 \\ (n+2k)!b_{n+2k} & \cdots & \cdots & (n+2k)b_1 & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \\ \vdots \\ u_{n+2k-1,1} \\ u_{n+2k,1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_{20} \\ v_{30} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ v_{n+2k+1,0} \\ v_{n+2k+2,0} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

并简记为

$$P_kU_k = -V_k。\tag{47}$$

记

$$\Delta_k = |P_k|, \tag{48}$$

并把矩阵 P_k 的第 $(n+1)$ 列换成 V_k 后所得矩阵的行列式记为 $R_k(u_{00}, u_{10}, \cdots, u_{n+2k+2,0})$，即

$$R_k(u_{00}, u_{10}, \cdots, u_{n+2k+2,0})$$

$$= \begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & v_{20} & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & n-1 & \cdots & v_{30} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{0,k-1} & g_{1,k-1} & \cdots & 0 & \cdots & g_{n+2k-1,k-1} & g_{n+2k,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n+2k-1)!b_{n+2k-1} & \cdots & \cdots & v_{n+2k+1,0} & \cdots & -(2k-1) & 0 \\ (n+2k)!b_{n+2k} & \cdots & \cdots & v_{n+2k+2,0} & \cdots & (n+2k)b_1 & -2k \end{vmatrix}。\tag{49}$$

由(46)可得

$$\Delta_k u_{n1} + R_k(u_{00}, u_{10}, \cdots, u_{n+2k+2,0}) = 0。\tag{50}$$

如果 $\Delta_k = 0$，则

$$R_k(u_{00},\ u_{10},\ \cdots,\ u_{n+2k+2,0})=g_{0k}u_{00}+g_{1k}u_{10}+\cdots+g_{n+2k+2,k}u_{n+2k+2,0}=0。\tag{51}$$

取 $j=k+1$, 我们同样可得

$$R_k(u_{01},\ u_{11},\ \cdots,\ u_{n+2k+2,1})=g_{0k}u_{01}+g_{1k}u_{11}+\cdots+g_{n+2k+2,k}u_{n+2k+2,1}=0。\tag{52}$$

再取 $j=0$, $i=n+2k+1$, $n+2k+2$, 由(30)式可得下列关系式:

$$\begin{aligned}&[b_0-(n+2k+1)]u_{n+2k+1,1}+(n+2k+1)b_1u_{n+2k,1}+\cdots+(n+2k+1)!\,b_{n+2k+1}u_{01}\\&\quad=-[u_{n+2k+3,0}+a_0u_{n+2k+2,0}+\cdots+(n+2k+1)!\,c_{n+2k+1}u_{00}]=-v_{n+2k+3,0},\end{aligned}\tag{53}$$

$$\begin{aligned}&[b_0-(n+2k+2)]u_{n+2k+2,1}+(n+2k+2)b_1u_{n+2k+1,1}+\cdots+(n+2k+2)!\,b_{n+2k+2}u_{01}\\&\quad=-[u_{n+2k+4,0}+a_0u_{n+2k+3,0}+\cdots+(n+2k+2)!\,c_{n+2k+2}u_{00}]=-v_{n+2k+4,0}。\end{aligned}\tag{54}$$

以(52)式代换(46)中的第$(n+1)$式, 再增加(53), (54)两式, 可得矩阵关系式

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{0k} & g_{1k} & \cdots & g_{n+2k,k} & g_{n+2k+1,k} & g_{n+2k+2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n+2k)!\,b_{n+2k} & \cdots & \cdots & -2k & 0 & 0 \\ (n+2k+1)!\,b_{n+2k+1} & \cdots & \cdots & \cdots & -(2k+1) & 0 \\ (n+2k+2)!\,b_{n+2k+2} & \cdots & \cdots & \cdots & (n+2k+2)b_1 & -(2k+2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \\ \vdots \\ u_{n+2k,1} \\ u_{n+2k+1,1} \\ u_{n+2k+2,1} \end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix} v_{20} \\ v_{30} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ v_{n+2k+2,0} \\ v_{n+2k+3,0} \\ v_{n+2k+4,0} \end{pmatrix},\tag{55}$$

并简记为

$$P_{k+1}U_{k+1}=-V_{k+1}。\tag{56}$$

记

$$\Delta_{k+1}=|P_{k+1}|,\tag{57}$$

如果 $\Delta_{k+1}\neq 0$, 由(55)可唯一确定出 u_{01}, $\cdots$, u_{n1}, $\cdots$, $u_{n+2k+2,1}$ 的值。再由(30)式, 取 $j=0$, $i=n+2k+3$, $n+2k+4$, $\cdots$, 即可唯一确定出其他的 u_{i1}($i=n+2k+3$, $n+2k+4$, $\cdots$)。把上面推导过程中的 u_{i0} 换为 u_{ij}, 即可唯一确定出所有的 $u_{i,j+1}$($i=0$, 1, 2, $\cdots$, $j=1$, 2, 3, $\cdots$)。

由以上的讨论, 我们可得

定理 3 设问题(28)满足条件(29), Δ_l($l=0$, 1, $\cdots$, k, $k+1$, $\cdots$)由(34), (43), (48), (57)等式确定, R_l($l=0$, 1, $\cdots$, k, $\cdots$)由(35), (44), (49)等式确定, 则

1) 当 $\Delta_0\neq 0$($n=0$, 1, 2, $\cdots$)时, 问题(28)的解是唯一确定的。

2) 当 $\Delta_l=R_l=0$($l=0$, 1, 2, $\cdots$)时, 问题(28)的解不唯一。

3) 当 $\Delta_l=R_l=0$($l=0$, 1, $\cdots$, k), $\Delta_{k+1}\neq 0$ 时, 问题(28)的解是唯一确定的。

参 考 文 献

[1] Грушин, В. В., *Об одном классе гипоэллиптических операторов*, Матем сб., **83(125)** (1970), 456~473.

[2] Грушин, В. В., *Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, Вырождающихся на*

подмногообразии, Матем. сб., **84**(**126**) (1971), 163～195.

[3] Treves, F., *Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem*, Proc. Amer. Math. Soc., **46**(1974), 229～233.

[4] 王光寅、麦明澂、陆柱家，关于始值问题的离散现象，科学通报，**23**(1978), 279～282.

[5] 王光寅、麦明澂、陆柱家，关于始值问题存在性的离散现象(待发表)。

New Phenomena in the Goursat Problems of a class of Non-Principal Type Equations

Xu Yuan-zhong

Abstract

In this paper the discrete phenomena in non-principal type equations are discussed by means of a simple equation

$$u_{xx}-xu_{xy}+au_x+bu_y+cu=0$$

where a, b and c are functions of x (or y).

consider the Goursat problem

$$\begin{cases} u_{xx}-xu_{xy}+au_x+bu_y+cu=0 \quad (y>0), \\ u(x,\ 0)=\varphi(x), \end{cases}$$

in which the functions a, b, c and φ are assumed to be analytic.

If $b(0)\neq 0, 1, 2, \cdots$, the analytic solution of the Goursat problem is unique. In case $b(0)=0, 1, 2, \cdots$, the analytic solution is unique only under some compatibility conditions. Let $\Delta_0=b(0)-n$, $n\in \boldsymbol{Z}_+$, then Δ_0 is a discriminant of the discrete phenomena, If Δ_0 is equal to zero, a sequence of discriminants Δ_1, Δ_2, Δ_3, $\cdots$and a sequence of compatibility conditions R_0, R_1, R_2, $R_3\cdots$are obtained. These new phenomena of non-principal type equations are noteworthy in further investigation.