第26卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 26, No. 2
1997年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun, 1997

两两NQD列的一类强大数律*

梁 琼 张春泳

提 要 得到两两NQD列服从一类强大数律的充要条件.

关键词 两两NQD列;部分和最大值;强大数律
中图法分类号 O211.4

1 引言与结果

众所周知,强大数律是极限理论中一个重要的组成部分. 设$\{X_n\}$为随机变量列,称$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ $n\geqslant 1$为其部分和列,所谓强大数律,就是研究在$\{X_n\}$的何种条件下,存在适当的正则化常数列$\{a_n\}$及中心化常数列$\{b_n\}$,使

$$a_n^{-1}(S_n-b_n)\rightarrow 0,\quad n\rightarrow\infty,\quad \text{a.s} \tag{1.1}$$

其中$\{b_n\}$往往与$\{X_n\}$中某个矩或中位数等有关,而$\{a_n\}$的不同,则形成各类不同的强大数律. 当$\{X_n\}$为独立列时,各类强大数律已经有了充要条件形式的完美的结果,与此同时,人们也有研究各种相依列的强大数律,各种相依列之一是由著名统计学家Lehmann(1966)引入的两两NQD列.

定义 称随机变量X和Y是NQD(Negative Quadrant Dependent)的,如果对任何定数x和y都有

$$P(X<x,Y<y)\leqslant P(X<x)(Y<y), \tag{1.2}$$

称随机变量列$\{X_n\}$为两两NQD列,如果对任何$i\neq j$ $i,j=1,2,\cdots$, X_i与Y_j是NQD的.

两两NQD列是有浓厚的统计背景且包含独立列在内的一类十分广泛的随机变量列,正由于其过于广泛,可供使用的工具不多,所以这方面的研究成果并不多见,以后国内外学者就把注意力集中到由Joag-Dev和Proschan(1987)引入的比两两NQD列范围小而比独立列范围大的NA(Negative Associated)列上去,并取得一系列的成果. 详见文献[3]的介绍.

我们在更广泛的$a_n,n\geqslant 1$的范围内,得到更强更丰富的结果.

定理1 设$\{a_n\}$为正数列,满足条件

$$a_n\uparrow\infty,\quad n\rightarrow\infty \tag{1.3}$$

收稿日期:1997-03-29
* 广东省高教厅自然科学基金重点资助项目
第一作者梁琼,副教授,湛江师范学院数学系,广东湛江,524048

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{-1} = 0(n a_n^{-1}) \tag{1.4}$$

又设 $\{X_n\}$ 为同分布随机变量列,满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geqslant a_n) < \infty, \tag{1.5}$$

则

$$a_n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} |X_i| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{a.s} \tag{1.6}$$

在定理1中,对$\{X_n\}$除同分布外别无其他任何要求;结论(1.6)也比(1.1)强;而且条件(1.4)显然视 $a_n = n^{\frac{1}{P}}$, $0 < P < 1$, $n \geqslant 1$为特况,反之有

定理2 设$\{a_n\}$为正数列,满足条件(1.3),又设$\{X_n\}$为同分布两两 NQD 列,满足条件(1.6),则(1.5)成立.

定理2不要求$\{a_n\}$满足条件(1.4).

这样,就有

推论 设$\{a_n\}$为正数列,满足条件(1.3)及(1.4),又设$\{X_n\}$为同分布两两 NQD 列,则下列命题相互等价:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geqslant a) < \infty$; (1.5)

(2) $a_n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} |X_i| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{a.s}$; (1.6)

(3) $a_n^{-1} \max\limits_{j \leqslant n} |S_j| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{a.s}$; (1.7)

(4) $a_n^{-1} \max\limits_{i \leqslant n} |X_i| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \text{a.s.}$ (1.8)

2 定理的证明

在下面的证明当中,若无特别申明,与求和无关的正常数均以 C 记.

定理1的证明

设 $a_0 = 0$,由条件(1.3)及(1.4)知

$$\mathrm{E}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} |X_n| I(|X_n| < a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} \mathrm{E}|X_1| I(|X_1| < a_n) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{E}|X_1| I(a_{m-1} \leqslant |X_1| < a_m) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=m}^{\infty} a_n^{-1}) \mathrm{E}|X_1| I(a_{m-1} \leqslant |X_1| < a_m) \leqslant$$

$$\mathrm{C}\sum_{m=1}^{\infty} a_m^{-1} m a_m P(a_{m-1} \leqslant |X_1| < a_m) =$$

$$\mathrm{C}\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} P(a_{m-1} \leqslant |X_1| < a_m) =$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}P(a_{m-1}\leqslant|X_1|<a_m)=C\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\geqslant a_{n-1})\leqslant$$
$$C+\sum_{n=2}^{\infty}P(|X_1|\geqslant a_{n-1})=C+\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\geqslant a_n)<\infty. \tag{2.1}$$

再由条件(1.4)知

$$E\sum_{n=1}^{\infty}I(|X_n|\geqslant a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}EI(|X_1|\geqslant a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_1|\geqslant a_n)<\infty \tag{2.2}$$

由(2.1)和(2.2)知

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}|X_n|I(|X_n|<a_n)<\infty,\quad \text{a.s} \tag{2.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}I(|X_n|\geqslant a_n)<\infty,\quad \text{a.s} \tag{2.4}$$

由(2.4)知只有有限个n使$I(|X_n|\geqslant a_n)\neq 0$, a.s,故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}|X_n|I(|X_n|\geqslant a_n)<\infty,\quad \text{a.s} \tag{2.5}$$

由(2.3)+(2.5)知

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}|X_n|<\infty,\quad \text{a.s} \tag{2.6}$$

由(2.6)及Kronecker引理知(1.6)成立,即

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}|X_i|\to 0,\quad n\to\infty,\quad \text{a.s}$$

定理2的证明

由(1.6)及(1.3)知

$$a_n^{-1}|X_n|=a_n^{-1}(\sum_{i=1}^{n}|X_i|-\sum_{i=1}^{n-1}|X_i|)\leqslant$$
$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|X_i|+a_n^{-1}a_{n-1}a_{n-1}^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}|X_i|\leqslant$$
$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|X_i|a_{n-1}^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}|X_i|\to 0,\quad n\to\infty,\quad \text{a.s} \tag{2.7}$$

设X_n^+和X_n^-是X_n的正部和负部,$n\geqslant1$,由(2.7)知

$$a_n^{-1}X_n^{\pm}\to 0,\quad n\to\infty,\quad \text{a.s.} \tag{2.8}$$

反设

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(a_n^{-1}X_n^{\pm}\geqslant\varepsilon)=\infty,\text{任}\ \varepsilon>\infty. \tag{2.9}$$

又由Lehmann(1996)的引理1,知

$$P(a_n^{-1}X_n^{+}\geqslant\varepsilon,a_m^{-1}X_m^{+}\geqslant\varepsilon)\leqslant$$
$$P(a_n^{-1}X_n^{+}\geqslant\varepsilon)P(a_m^{-1}X_m^{+}\geqslant\varepsilon),$$
$$\text{任}\ \varepsilon>0,\quad n\neq m,\quad n,m=1,2,\cdots. \tag{2.10}$$

由(2.9),(2.10)及Matula(1992)引理1知

$$P(a_n^{-1}X_n^{+}\geqslant\varepsilon,i\cdot 0\cdot)=1$$

此与(2.8)矛盾,从而

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(a_n^{-1}X_n^{+} \geqslant \varepsilon) < \infty, \text{任 } \varepsilon > 0 \tag{2.11}$$

类似地

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(a_n^{-1}X_n^{-} \geqslant \varepsilon) < \infty, \text{任 } \varepsilon > 0 \tag{2.12}$$

由(2.11)及(2.12),取 $\varepsilon=1$ 知(1.5)成立,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(a_n^{-1}|X_n| \geqslant 1), \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geqslant a_n) < \infty$$

推论的证明

注意到

$$\max_{j\leqslant n}|S_j| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|X_i|, \tag{2.13}$$

$$\max_{i\leqslant n}|X_i| \leqslant 2\max_{j\leqslant n}|S_j| \tag{2.14}$$

$$|X_n| \leqslant \max_{i\leqslant n}|X_i|, \tag{2.15}$$

由(2.13),(2.14),(2.15),定理1及定理2知

$$(1.5)\Rightarrow(1.6)\Rightarrow(1.7)\Rightarrow(1.8)\Rightarrow(2.7)\Rightarrow(1.5)$$

从而定理2得证.

本文写作中得到王岳宝先生的指导,谨表感谢.

参 考 文 献

1 Lehmann E L. Some concepts of dependence. Ann Math Statist, 1996,43:1137～1153

2 Joag-Dev K, Proschan F Negative. Association of random variables with applications. Ann Statist, 1983, 11:286～295

3 苏淳,赵林城,王岳宝. NA 序列的矩不等式与弱收敛. 中国科学(A 辑), 1996,26(12):1091～1099

4 Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively quadrant dependent random variables. Statist Probab Lett, 1992,15:209～213

A Strong Law of Large Numbers for Pairwise Negative Quadrant Dependtdent Sequences

Liang Qiong *Zhang Chunyong*

(Department of Mathematics, Zhanjiang Teachers' College)

Abstract A necessary and sufficient condition for a pairwise negative quadrant dependent sequence to satisfy a strong law of large numbers is presented.

Key words pairwise NDQ suequence; maximum of partial sums; strong law of large numbers

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net