第32卷第2期
2003年6月
上海师范大学学报(自然科学版)
Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences)
Vol. 32, No. 2
Jun. 2003

基于 Legendre 矩的多阈值二值图像重构算法

王耀明，沈志超

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘 要：首先介绍 Legendre 正交矩及其逆变换；然后根据 Legendre 矩逆变换的特点，采用一种新的方法——多阈值法对重构的值进行二值化；最后给出该方法的实验结果，以说明它的有效性.

关键词：Legendre 多项式；正交矩；多阈值；二值化

中图分类号：G852.11 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-5137(2003)02-0033-04

自从 HU[1]提出在模式识别中采用矩不变性以来，矩方法在图像处理、图像分析、模式识别等领域得到广泛且有效的应用. 迄今为止，被人们广泛采用的矩主要包括：几何矩、旋转矩、复数矩、标准矩和正交矩(包括 Legendre 和 Zernike 两种).

正交矩采用正交多项式变换核. 正交矩具有以下特点：(1)矩变换是可逆的，从而可以对变换前的信号进行重建；(2)正交矩的各阶矩是彼此独立的，具有最少的冗余信息，因而可选用较低的矩阶数；(3)利用某些正交多项式的递推性质，可对正交矩进行快速计算. 由于这些特点，正交矩在模式识别和图像分析领域[2,3]获得了较广泛的应用. Legendre 矩是一种常用的正交矩.

利用 Legendre 矩可以对二值图像进行重构. 重构后的值要进行二值化处理，常用的方法有直方图方法[4]、统计分布方法[5]、自适应方法[6]、亮度矩方法[7]等.

这些方法都是根据不同的算法选定某个单一阈值，然后把所有灰度值小于(或大于)该阈值的象素归类为目标，而灰度值大于等于(或小于等于)该阈值的象素归类为背景. 本文针对 Legendre 矩逆变换的特点，采用一种新的方法(多阈值法)对重构的值进行二值化处理，并且获得了较好的效果.

1 Legendre 正交矩及其反变换

对于一亮度函数为 $f(x,y)$ 的二维图像，其 $(p+q)$ 阶的 Legendre 矩定义如下[8]：

$$L_{pq} = \frac{(2p+1)(2q+1)}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_p(x)P_q(y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中 $P_n(x)$ 表示 n 阶的 Legendre 多项式，其定义如下：

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{(n-k)/2}\frac{1}{2^n}\frac{(n+k)!x^k}{\left(\frac{n-k}{2}\right)!\left(\frac{n+k}{2}\right)!k!}, \quad |x| \leqslant 1,\ (n-k)\text{ 为偶数。} \tag{2}$$

上式定义的 Legendre 多项式是由下式得到的：

收稿日期：2002-12-12

作者简介：王耀明(1945-)，男，上海师范大学数理信息学院教授.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \tag{3}$$

Legendre 多项式组成一个单位圆内的完备正交集,因此 $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{mn}$. 下式表示 Legendre 多项式的递归形式:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x)}{n}, \tag{4}$$

其中 $P_0(x)=1$; $P_1(x)=x$; $x \leqslant 1$; $n>1$.

为适应计算机处理,需要把式(1)积分式数字化. 为此把原积分区间离散成 $N \times N$ 个象素,i, j 表示象素的坐标,且 $1 \leqslant i, j \leqslant N$. 由于 Legendre 多项式在区间[-1,1]内正交,因此,需将原图像所在区域映射到[-1,1]×[-1,1]内. 对积分变量作相应变换后所得到的 Legendre 正交矩离散形式表示如下:

$$L_{pq} = \frac{(2p+1)(2q+1)}{(N-1)^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}P_p(x_i)P_q(y_j)f(i,j), \tag{5}$$

其中,x_i, y_j 表示在[-1,1]范围内的归一化象素坐标,定义如下:

$$x_i = \frac{2i-N-1}{N-1},\quad y_j = \frac{2j-N-1}{N-1}. \tag{6}$$

利用 Legendre 多项式的正交性容易推出:

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}L_{ij}P_i(x)P_j(y),\quad x,y \leqslant 1 \tag{7}$$

式(7)称为 Legendre 正交矩的逆变换. 从式(7)看出,我们必须计算出 i,j 趋向无穷的 Legendre 矩,这是不现实的. 从有限个 Legendre 矩中获得的近似图像亮度函数 $f'(x,y)$ 可重构如下:

$$f'(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}L_{i-j,j}P_{i-j}(x)P_j(y),\quad x,y \leqslant 1 \tag{8}$$

利用式(8)只需计算有限个 Legendre 矩就可以对亮度函数 $f(x,y)$ 进行重构,但是不可避免的会发生误差 $\delta(x,y)=f(x,y)-f'(x,y)$. 显然:

$$\delta(x,y) = \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}L_{i-j,j}P_{i-j}(x)P_j(y) = \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}Lb_{i-j,j}P_{i-j}(x)P_j(y) + \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}Lo_{i-j,j}P_{i-j}(x)P_j(y)\ . \tag{9}$$

上式中 Lb 和 Lo 分别为图像中的背景和目标对 Legendre 矩的贡献. 那么,(9)式中右边的第一项为缺少高次矩后背景所引起的误差,第二项为缺少高次矩后目标所引起的误差. 第一项误差是系统的,可用下面的方法消除.

2 重构图像的多阈值二值化方法及实验结果

对图像进行二值化的方法较多,这些方法都是选出一个固定的阈值,然后把所有灰度值小于(或大于)该阈值的象素归类为目标,而灰度值大于等于(或小于等于)该阈值的象素归类为背景. 利用式(5)对大小是 64×64 的二值化图像 A,B,C,D,E 进行 30 阶 Legendre 矩的正变化,然后利用式(8)进行重构,最后对重构的值采用直方图方法和亮度矩方法进行二值化处理,如图 2,3 所示.

从上图及文献[4, 7]可以看出,采用这些方法对普通灰度图像进行二值化处理具有较好的效果,但是对从有限个 Legendre 矩中获得的近似图像亮度函数 $f'(x,y)$ 进行二值化处理,则效果并不理想. 如何能减小甚至消除这种现象呢? 由(9)式可知,如果消除其系统误差,可能会解决这个问题. 对所有象素亮度值都是背景亮度图像计算其 30 阶 Legendre 矩的正变化并重构,且对重构值 $f_b'(x,y)$ 采用亮度矩二值化,如图 4 所示. 从图 2,3,4 中可以发现,误判的象素值对相同的有限阶 Legendre 矩的重构几乎是处

图 1　原始图像

图 2　采用直方图方法获得的 30 阶 Legendre 重构图像

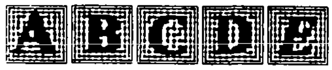

图 3　采用亮度矩方法获得的 30 阶 Legendre 重构图像

于固定位置，和图像中目标的形状并无明显的关系，即为系统误差. 因此启发了我们用 $f_b(x,y)$ 的值作为阈值进行判断，这就是多阈值方法. 具体方法是：采用某一阶 Legendre 矩对图像进行重构，把所获得的象素值和相同阶数全背景图像的重构值逐一进行比较. 如果对应象素值之差在一给定范围内，则判为背景，否则判为目标. 这样就可消除由单一固定阈值所产生的误判. 采用多阈值方法对重构的 A，B，C，D，E 进行二值化处理，得到的结果如图 5 所示. 从图 5 中可见，采用本文的方法可获得较好的重构二值图像.

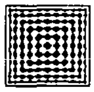

图 4　采用亮度矩方法获得的 30 阶 Legendre 全背景重构图像

图 5　采用多阈值方法获得的 30 阶 Legendre 重构图像

图 6 是对全背景图像进行 10，20 阶 Legendre 矩重构，并用亮度矩方法进行二值化. 图 7 是对二值化图像 A 进行 10，20 阶 Legendre 矩重构，并用亮度矩方法进行二值化. 图 8 是对二值化图像 A 进行 10，20 阶 Legendre 矩重构，并用多阈值方法进行二值化. 从图 7，8 可以看出，采用多阈值方法可根据阶数的不同，自适应地去除误判为目标的象素值. 通过图 5，8 我们还可以看出，字母边界平滑的程度与计算的矩阶数有关，矩阶数越高，边界平滑越小，重构图像与原图像的吻合就越好；否则，平滑效果就越显著. 一般讲，要重构的图像越不规则，采用矩的阶数就应越高.

图 6　采用亮度矩方法获得的 10，20 阶 Legendre 全背景重构图像

图 7　采用亮度矩方法获得的 10，20 阶 Legendre 重构图像

图 8　采用多阈值方法获得的 10，20 阶 Legendre 重构图像

3　结　论

由于矩具有旋转、平移、尺度不变性，所以矩函数在图像处理、图像分析、模式识别等领域得到广泛且有效的应用. 此外利用正交矩的正交性，可对图像进行重构. 本文采用多阈值法对重构的值进行二值化处理，打破了以往只用单一阈值进行二值化处理的束缚，并且获得了较好的效果.

参考文献:

[1] HU M K. Visual pattern recognition by moment invariants[J]. IRE Trans on Information Theory, 1962,8(2):179-187

[2] Prokop R J, Reeves A P. A survey of moment-based techniques for unexcluded object representation and recognition [C]. CVGIP: Graphical Models Image Process, 1992, 54:438-460.

[3] TEAGUE M R. Image analysis via the general theory of moments[C]. Journal of Optimal Society of American, 1980,70(8):920-930.

[4] SIERCKI M E. Evaluation of Automated threshold Selection Method for Accurately Sizing Microscopic Floupres-cent cells by image Analysis[J]. Applied and Environmental Microbiology, 1989,55(11).

[5] KIRSCH R A. Computer Determination of the Constituent Structure of Biological Image[J]. Computers & Biomedical Research, 1971, 4.

[6] CASTLEMAN K R. Digital image processing[M]. Prentice-Hall Inc, 1996.

[7] 王耀明,严炜. 图像的亮度矩和阈值分割[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 2001, 3(1):48-52.

[8] 王耀明. 图像的矩函数—原理、算法、及应用[M]. 华东理工大学出版社, 2002.4.

Multi-threshold Reconstruction of Binary Image Using the Legendre Orthogonal Moments

WANG Yao-Ming, SHEN Zhi-Chao

(College of Mathematics and Sciences, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: First the concept of Legendre moments and its inverse transform is introduced. Then a new method referred to as multi-threshold method can be used to convert reconstruction values into two values based on the characteristic of its inverse transform. Finally, some experiment results are presented to show the efficiency of the method.

Key words: Legendre polynomials; orthogonal moments; multi-threshold; bi-value