第18卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 18, No. 1
1992年1月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1992

一类非线性多变量系统的解耦线性化

陈 冲　王 炎　王广雄
(哈尔滨工业大学电气工程系 150006)

摘　要

本文讨论了非线性多变量系统的解耦和完全线性化问题. 利用微分几何理论中分布不变性的概念,提出并证明了当系统的相对阶次之和小于系统维数时,非线性解耦系统实现完全线性化并保持其解耦性不变的条件,还给出了这类系统完全线性化的具体求解方法.

关键词: 非线性系统,解耦,完全线性化.

一、前　言

近年来人们已将微分几何理论应用于非线性系统的研究. 文献[1,2]讨论了非线性系统状态方程的全局线性化问题. 文献[3]研究了非线性系统解耦控制律的特征. Tarn, T. J. 证明了当系统的相对阶次之和 $\sum_{i=1}^{m} r_i$ 等于系统维数 n 时系统可以被完全线性化[1]. 本文采用流形上能控不变分布的概念,研究 $\sum_{i=1}^{m} r_i < n$ 的非线性多变量系统的解耦及完全线性化问题.

二、非线性状态反馈解耦

设仿射非线性系统由下列方程描述:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i,$$
$$y = h(x), \tag{1}$$

其中 x 是 n 维 C^∞ 流形 M 上的局部坐标; f, g_i 是 M 上 C^∞ 向量场的局部坐标表示; h 是 M 上的 C^∞ 映射,即 $h: M \to R^m$, $u \in R^m$.

定义 1. 设 $r_i(i = 1, \cdots, m)$ 是满足

本文于 1991 年 1 月 29 日收到.

1) Tarn, T. J., 非线性控制,来华讲学讲稿,上海工业大学,1987.

$$L_g L_f^{r_i-1} h_i \triangleq (L_{g_1} L_f^{r_i-1} h_i, \cdots, L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i) \neq 0 \tag{2}$$

的最小整数,则称系统(1)有相对阶次向量 $(r_1, \cdots, r_m)$.

首先,构造 $(m \times m)$ 维和 $(m \times 1)$ 维函数矩阵

$$D(x) \triangleq \begin{bmatrix} L_g L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_g L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}, \ E(x) \triangleq \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

定理 1[4]. 非线性系统(1)在M上可解耦的充分必要条件是矩阵 $D(x)$ 在M上是非奇异的.

由定理 1,状态反馈解耦控制律

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\alpha}(x) + \beta(x)\boldsymbol{v} = -[D(x)]^{-1}E(x) + [D(x)]^{-1}\boldsymbol{v}, \tag{4}$$

使得闭环系统(5)在M上是输入/输出解耦的.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{\alpha}(x) + \boldsymbol{g}(x)\beta(x)\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{f}}(x) + \hat{\boldsymbol{g}}(x)\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{h}(x). \end{aligned} \tag{5}$$

根据(3),(4)和(5)式可推出下列结果:

$$\begin{aligned} L_{\hat{f}}^{k_i} h_i(x) &= \begin{cases} L_f^{k_i} h_i(x), & k_i < r_i, \\ 0, & k_i \geqslant r_i, \end{cases} \\ L_{\hat{g}_j} L_{\hat{f}}^{k_i} h_i(x) &= \begin{cases} 1, & k_i = r_i - 1 \ 且\ j = i, \\ 0, & 其它. \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

三、非线性系统的完全线性化

设 $T(M)$ 是M上所有 C^∞ 向量场的集合,定义 $\hat{F}, \hat{G}_j (j = 1, \cdots, m) \in T(M)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{F} &\triangleq \sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \hat{G}_j &\triangleq \sum_{i=1}^{n} \hat{g}_{ij}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_i}, \ (j = 1, \cdots, m), \end{aligned} \tag{7}$$

式中 $\hat{f}_i, \hat{g}_{ij}$ 分别是向量 $\hat{\boldsymbol{f}}, \hat{\boldsymbol{g}}_j$ 的第 i 个分量. 定义向量场 $V, W \in T(M)$ 的 Lie 导数 $[V, W]$ 为[5]

$$[V, W] \triangleq VW - WV. \tag{8}$$

设非线性解耦系统 (5) 满足能控性秩条件: $\dim(\Delta(x)) = n$, 即系统是能控的. 其中Δ是包含 $\mathrm{span}\{\hat{G}_1, \cdots, \hat{G}_m\}$ 且关于系统(5)不变的最小分布,即Δ满足 $[\hat{F}, \Delta] \subseteq \Delta$, $[\hat{G}_i, \Delta] \subseteq \Delta (i = 1, \cdots, m)$.

现构造一组M上的对合分布 $\Delta_i (i = 1, \cdots, m)$ 使得 Δ_i 是满足下列条件的最小分布:

1) Δ_i 包含 $\Delta_i^0 \triangleq \mathrm{span}\{\hat{G}_j : j \neq i\}$;

2) $[\hat{F}, \Delta_i] \subseteq \Delta_i$, $[\hat{G}_j, \Delta_i] \subseteq \Delta_i (j \neq i)$.

显然 Δ_i 是包含 Δ_i^0 且满足 $[\hat{F}, \Delta_i] \subseteq \Delta_i$ 的 $T(M)$ 的最小子代数, Δ_i 中的每个元素

可以表示为形如 $[V_{i_k}[V_{i_{k-1}}[\cdots[V_{i_2},V_{i_1}]\cdots]]]$ 的元素的有限线性组合，其中 $V_{i_r}\in\{\hat{F},\hat{G}_j(j\neq i)\}$，且至少包含有一个 $\hat{G}_j(j\neq i)$。如果 $\{\hat{G}_1,\cdots,\hat{G}_m\}$ 是对合的，则由系统满足能控性秩条件可以推得

$$\Delta_i(x)+\Delta_j(x)=\Delta(x)=T_x(M),(j\neq i).$$

由 Δ_i 可以定义余分布 $\Delta_i^\perp$ 为 Δ_i 的零化子，即

$$\Delta_i^\perp(x)\triangleq\{\omega(x)\in T_x^*(M):\langle\omega(x),\Delta_i(x)\rangle=0\},\tag{9}$$

由于 $\dim(\Delta_i(x)+\Delta_j(x))=n(i\neq j)$，根据 $\Delta_i^\perp$ 的定义可得

$$\Delta_i^\perp\cap\Delta_j^\perp=0,(i\neq j).\tag{10}$$

由(6)式和(7)式可得

$$\begin{aligned}&\hat{F}^{k_i}h_i(x)=L_f^{k_i}h_i(x)=0,\ k_i\geqslant r_i,\\&\hat{G}_j\hat{F}^{k_i}h_i(x)=L_{\hat{g}_j}L_f^{k_i}h_i(x)=0,\ (j\neq i,k_i=0,1,\cdots).\end{aligned}\tag{11}$$

从(8)式，(11) 式和 Δ_i 的构造特点可知，M上的 r_i 个微分 1-型 $d\hat{F}^{k_i}h_i(k_i=0,1,\cdots,r_i-1)$ 属于 $\Delta_i^\perp$，而且由(6)式可以证明它们是线性无关的，故有

$$d\hat{F}^{k_i}h_i=dL_f^{k_i}h_i\in\Delta_i^\perp,\ (k_i=0,1,\cdots,r_i-1;i=1,\cdots,m),\tag{12}$$

从而可得 $\dim(\Delta_i^\perp(x))\triangleq p_i\geqslant r_i$。当 $\sum\limits_{i=1}^m p_i=n$ 时，有 $\sum\limits_{i=1}^m r_i\leqslant n$。于是，可以推导出当 $\sum\limits_{i=1}^m r_i<n$ 时系统(5)完全线性化的求解方法。

设M上存在一个非线性坐标变换 $Z(x)$ 将系统(5)变换成如下形式：

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dot{Z}_1\\ \vdots\\ \dot{Z}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\ \vdots\\ Z_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b_m\end{bmatrix}v,\\&y=\begin{bmatrix}c_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & c_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\ \vdots\\ Z_m\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}&A_i=\left[\begin{array}{ccccc|c}0 & 1 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & 0\\ & 0 & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 & \\ \hline & & \Psi^i & & & \end{array}\right]\begin{matrix}\}r_i\\ \\ \}l_i\end{matrix},\quad b_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ \hline \lambda^i\end{bmatrix}\begin{matrix}\}r_i\\ \\ \}l_i\end{matrix},\\&c_i=[1\quad 0\cdots0].\end{aligned}\tag{14}$$

式(14) 中 $r_i+l_i=p_i$；Ψ^i 为任意 $(l_i\times p_i)$ 常数矩阵；λ^i 为任意 $(l_i\times 1)$ 常向量。显然，此时系统已被完全线性化，而且保留其解耦性不变，即系统被解耦成m个子系统，每个子系统 (A_i,b_i,c_i) 是线性能控的，但其中含有 l_i 个不能观振型。

由(10)式和(12)式可知，若 $p_i=r_i$，则可以选择 $Z_i^T(x)=(h_i(x),\ L_fh_i(x),\ \cdots,$

$L_f^{r_i-1}h_i(x)$)；若 $p_i - r_i = l_i > 0$，则在 $\Delta_i^\perp$ 内总可以找出 l_i 个线性无关的微分 1-型 $d\eta_1^i, \cdots, d\eta_{l_i}^i$，连同 $dL_f^{k_i}h_i(k_i = 0, 1, \cdots, r_i - 1)$ 一起构成 $\Delta_i^\perp$ 的一组基。令

$$Z_i^T(x) = (h_i(x), \cdots, L_f^{r_i-1}h_i(x), \eta_1^i(x), \cdots, \eta_{l_i}^i(x)), \tag{15}$$

于是，$Z(x) = [Z_1^T(x), \cdots, Z_m^T(x)]^T$ 定义了M上的一个局部坐标，在这个坐标下系统(5)可以表示成

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_i &= \frac{\partial Z_i}{\partial x}\hat{f}\circ Z^{-1} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial Z_i}{\partial x}\hat{g}_j\circ Z^{-1}\cdot v_j \\
&= \frac{\partial Z_i}{\partial x}\hat{f}\circ Z^{-1} + \frac{\partial Z_i}{\partial x}\hat{g}_i\circ Z^{-1}\cdot v_i \\
&= \begin{bmatrix} Z_{i2} \\ \vdots \\ Z_{ir_i} \\ 0 \\ \hline L_{\hat{f}}\eta_1^i\circ Z^{-1} \\ \vdots \\ L_{\hat{f}}\eta_{l_i}^i\circ Z^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hline L_{\hat{g}_i}\eta_1^i\circ Z^{-1} \\ \vdots \\ L_{\hat{g}_i}\eta_{l_i}^i\circ Z^{-1} \end{bmatrix}\cdot v_i, \quad (i = 1, \cdots, m).
\end{aligned} \tag{16}$$

将(16)式与(13),(14)式比较可得

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x}\hat{f}\circ Z^{-1} = A_i Z_i, \quad \frac{\partial Z_i}{\partial x}\hat{g}_i\circ Z^{-1} = b_i. \tag{17}$$

由 Δ_i 的构造可知 $\hat{G}_j \in \Delta_i (j \neq i)$，所以有

$$dZ_i(\hat{G}_j) = \frac{\partial Z_i}{\partial x}\hat{g}_j\circ Z^{-1} = 0, (j \neq i). \tag{18}$$

综合(17)和(18)式，可得出下列偏微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta_k^i}{\partial x}\hat{f}(x) = \displaystyle\sum_{s=1}^{p_i}\Psi_{ks}^i \cdot Z_{is}(x), \\ \dfrac{\partial \eta_k^i}{\partial x}\hat{g}_i(x) = \lambda_k^i, \ (k = 1, \cdots, l_i), \\ \dfrac{\partial \eta_k^i}{\partial x}\hat{g}_j(x) = 0, (j \neq i), \end{cases} \tag{19}$$

式中 Ψ_{ks}^i, λ_k^i 和 Z_{is} 分别是 Ψ^i, λ^i 和 Z_i 中的元素。这样，就有下列定理。

定理 2. 若非线性解耦系统(5)满足条件：

1) $\{\hat{G}_1, \cdots, \hat{G}_m\}$ 是对合的；

2) 满足能控性秩条件；

3) $\sum_{i=1}^{m} p_i = n$；

4) 在 $\Delta_i^\perp$ 中存在 l_i 个线性无关的微分 1-型 $d\eta_1^i, d\eta_2^i, \cdots, d\eta_{l_i}^i$ 满足方程(19)；则存在一个非线性坐标变换 $Z(x)$，将非线性系统(5)变换成能控、解耦的线性系统(13)。

参 考 文 献

[1] Hunt, L. R., Su, R. and Meyer, G., Global Transformations of Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **AC-28** (1983), 24—31.

[2] Cheng, D., Tarn, T. J. and Isidori, A., Global Linearization of Nonlinear Systems via Feedback, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **AC-30**(1985), 808—811.

[3] Ha, I. J. and Gilbert, E. G., A Complete Characterization of Decoupling Control Laws for a General Class of Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **AC-31**(1986), 823—830.

[4] Gras, L. C. J. M. and Nijmeijer, H., Decoupling in Nonlinear Systems, From Linearity to Nonlinear, *Proc. IEE*, **136**(1989), Part D, 53—62.

[5] 徐森林,流形和 STOKES 定理,人民教育出版社(1981).

DECOUPLING AND LINEARIZATION FOR A CLASS OF NONLINEAR MULTIVARIABLE SYSTEMS

Chen Chong Wang Yan Wang Guangxiong

(Dept. of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology 150006)

Abstract

The problem of the input/output decoupling and complete linearization for nonlinear multivariable systems is discussed. By means of the concept of distribution invariance in the differential geometric theory, this paper presents and proves the condition under which the nonlinear decoupled system with $\sum_{i=1}^{m} r_i < n$ can be completely linearized and kept decoupling. The method to linearize this class of systems is given.

Key words: Nonlinear systems; decoupling; complete linearization.