第27卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 27, No. 2
1998年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun. 1998

n 人合作对策的shapley值与最大熵法

倪中新

提　要　从概率论的角度给出了shapley值的证明，又以信息论中最大熵原理作依据给出了 n 人合作对策的另一种解决方法，这种方法的适用范围比shapley值要广，体现了实体活动中信息的重要性，易于理解.

关键词　合作对策的特征函数；shapley值；熵；最大熵原理
中图法分类号　O221.2

0　引　言

在经济或社会活动中，若干实体(如个人，公司等)相互合作结成联盟或集团，常能比他们单独行动获得更多的经济或社会效益. 譬如，几个人从事某项经济活动，对于他们之中若干人组合的每一种合作(特别的，单个人也视为一种合作)，都会得到一定的效益，当人们之间的利益是非对抗性时，合作中人数的增加不会引起效益的减少，这样几个人的合作将带来更大效益.

n 个人的集合及各种合作的效益，就构成了 n 人合作对策，由此也就提出了一个问题：怎样在这 n 个人之间分配所得的最大效益.

1　shapley值及证明

先给出几个基本概念.

定义　设集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，如果对于 I 中任一子集 S 都对应着一个实值函数 $v(S)$，满足

(1) $v(\varnothing)=0$,

收稿日期：1997-09-02
作者倪中新，男，研究生，上海师范大学数学系，上海，200234

(2) $v(S_1 \cup S_2) \geqslant v(S_1)+v(S_2)$，$S_1 \cap S_2=\varnothing$，

称$[I,v]$为 n 人合作对策，v 为对策的特征函数.

在上述经济活动中，I 定义为 n 人集合，S 为 n 人集合中的任一合作，$v(S)$定义为合作 S 的效益.

若用 x_i 表示 I 中成员 i 从合作的最大效益 $v(I)$中应得到的一份收入，$X=(x_1,\cdots,x_n)$ 叫做合作对策的分配(Imputation).

Shapley 在解决这一问题时，首先提出了看来毫无疑义的几条公理.

Shapley 公理　设 v 是定义在 $I=\{1,2,\cdots,n\}$上的特征函数，由 v 决定的一个分配 $\Phi(v)=(\varphi_1(v),\varphi_2(v),\cdots,\varphi_n(v))$应满足以下公理：

(1)对称性

设 π 是 $I=\{1,2,\cdots,n\}$的一个排列，即 I 到它自身的一一对应，如 π_i 是 i 的对应，π_S 是 S 的对应($S \subset I$). 若记 $v(\pi_S)=u(S)$，则对于 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $\varphi_{\pi_i}(v)=\varphi_i(u)$.

该公理表示，每人的分配与他被赋予的记号 i 无关.

(2)有效性

如果对于所有包含 i 的子集 S 都有 $v(S\backslash i)=v(S)$，其中 $S\backslash i=S-\{i\}$，则 $\varphi_i(v)=0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(v)=v(I)$.

该公理表示，若成员 i 对每个他参加的合作都没贡献，那么他不应从全体合作的效益中获得报酬. 另外，各成员分配之和应等于全体合作的效益.

(3)可加性

对于定义在 I 上的任意两个特征函数 v 和 u，$\Phi(v+u)=\Phi(v)+\Phi(u)$.

这个公理说明，当 n 人同时进行两项合作时，每人的分配是两项合作的分配之和.

可以认为把这 3 条公理作为分配合作效益的准则是合理的. Shapley 依据以上公理给出了 n 人合作对策的一种解法—— Shapley 值. Shapley 值由特征函数 v 确定，记作 $\Phi(v)=(\varphi_1(v),\varphi_2(v),\cdots,\varphi_n(v))$，是一种特定的分配，即 $\varphi_i(v)=x_i$. Shapley 值 $\Phi(v)=(\varphi_1(v),\varphi_2(v),\cdots,\varphi_n(v))$为：

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\in S_i} w(|S|)[v(S)-v(S\backslash i)],\ i=1,2,\cdots,n,$$

$$S\backslash i=S-\{i\},\quad w(|S|)=\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!},$$

其中，S_i 是 I 中包含 i 的所有子集组成的集类，$|S|$是子集 S 中的元素数目(人数)，$w(|S|)$是加权因子，$S\backslash i=S-\{i\}$.

下面将从概率论角度给出 Shapley 值满足上述 Shapley3 条公理的证明，并对 Shapley 值给出解释.

证明

(1)对称性　由 Shapley 值的公式知 $\varphi_i(v)$与其先后顺序无关，即对称性显然满足.

(2)有效性　如果对于所有包含 i 的子集 S 都有 $v(S\backslash i)=v(S)$，则 Shapley 值为：

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\in S_i}w(|S|)[v(S)-v(S\backslash i)]=$$

$$\sum_{S\in S_i}w(|S|)\times 0=0,$$

即 $\varphi_i(v)=0$.

下面证 $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v)=v(I)$.

首先证 $\sum_{S\in S_i}w(|S|)=1$. 由

$$w(|S|)=\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{C_{n-1}^{|S|-1}},$$

这里 $w(|S|)$ 可以解释为：某个人与其他某 $|S|-1$ 个人联盟或合作构成 $|S|$ 个人合作的概率. 而包含 i 的 $|S|$ 个人的合作即 i 与其他 $|S|-1$ 个人的合作方式共有 $C_{n-1}^{|S|-1}$ 种.

$$\therefore \sum_{S\in S_i}w(|S|)=\sum_{|S|=1}^{n}C_{n-1}^{|S|-1}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{C_{n-1}^{|S|-1}}\right)=\sum_{|S|=1}^{n}\frac{1}{n}=1.$$

以上的解释可知 $\varphi_i(v)=\sum_{S\in S_i}w(|S|)[v(S)-v(S\backslash i)]$ 为 i 对于他参加的各种合作的“贡献”的均值.

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{S\in S_i}w(|S|)[v(S)-v(S\backslash i)]=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}[v(I)-v(I\backslash i)]+\frac{1}{n(n-1)}[v(I\backslash 1)-v(I\backslash\{1,i\})+\cdots+\right.$$

$$\left.v(I\backslash n)-v(I\backslash\{n,i\})]+\cdots+\frac{1}{n}[v(i)-v(\varnothing)]\right\}. \qquad (*)$$

上式中将中间部分合并再简化得：$(*)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}v(I)=v(I)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=v(I)$.

(3)可加性　由对任意合作 S，$(v+u)(S)=v(S)+u(S)$，代入 Shapley 值式即可证明.

另外，由特征函数的定义知，对 $\forall\ S\in S_i$，$v(S)-v(S\backslash i)\geqslant 0$，所以

$$\varphi_i(v)=\sum_{S\in S_i}w(|S|)[v(S)-v(S\backslash i)]\geqslant$$

$$\sum_{\substack{S\in S_i\\ \text{且}S\neq(i)}}w(|S|)\times 0+v(i)-v(\varnothing)\geqslant 0+v(i)-0=v(i),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

即 n 个人合作时，各成员根据合作效益中的分配所获得的收入不小于他单干时的收入，这切合实际.

综上所述，可见 Shapley 值解决此问题是比较合理的.

2　n 人合作对策的最大熵法

2.1　熵

定义　设随机试验A只有有限个不相容的结果 $A_1, A_2, \cdots A_n$，其相应的概率为

$P(A_1)=p_1, P(A_2)=p_2, \cdots, P(A_n)=p_n$，每做一次试验，总能使 n 个结果之一发生，具体结果不确定，熵就是对这种不确定性的一种度量．其定义为：$H(p_1, p_2, \cdots, p_n)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$．

熵可以衡量随机试验得到的信息量的大小．

2.2 最大熵原理

一个系统状态的概率分布应在表征这个系统状态的约束条件下，熵为最大的那种分布．

2.3 建　模

从对 Shapley 值的证明及解释中，可以看到 n 人合作对策的效益的合理分配方案，应为满足一些约束条件下的最大值点．从这一思想出发，下面我们试用最大熵原理来建立模型．

设 n 个人合作的分配 $\Phi(v)=(\varphi_1(v), \varphi_2(v), , \varphi_n(v))$，其中 v 为特征函数，在这里将此问题离散化（可将报酬单位适当缩小，如以 1 元、100 元等为单位）．记 $P_i=\frac{\varphi_i(v)}{v(I)}$，则 P_i 可看作 n 人合作总效益分给第 i 个人的概率．则其概率分布的熵定义为：

$$H=-\sum_{i=1}^{n} P_i \ln P_i=-\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(v)}{v(I)} \ln \frac{\varphi_i(v)}{v(I)} \qquad (**)$$

约束条件为：

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(v)=v(I), \quad \sum_{j \in S} \varphi_j(v) \geqslant v(S),$$

这里 S 为任何一种合作，即 n 人合作后的每人所得效益或任意 $k(k \leqslant n)$ 个人的效益的和应不小于他们单独干或这 k 个人合作的效益．特别，$\varphi_i(v) \geqslant v(I)$ 即各成员根据合作效益中的分配所得的收入不应小于他单干时的收入．

对于（＊＊）式，即在约束条件下求使 H 最大的解，我们采用非线性规划的制约函数法，即序列无约束最小化技术（Sequential Unconstrained Minimization Technique 简记 SUMT）中的内点法来求解，即利用障碍函数将有约束条件极值问题转化为无约束极小值问题[4]．

2.4 例　题

甲乙丙 3 人经商，若单干，每人仅能获利 1 元；甲乙合作可获利 7 元；甲丙合作可获利 5 元；乙丙合作可获利 4 元；3 人合作则可获利 10 元．问 3 人合作时怎样合理地分配 10 元的收入．

此问题的 Shapley 值解法见[1]，这里用最大熵法解．

设甲乙丙 3 人各得 x_1, x_2, x_3 元，满足：

$$\max H=-\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{10} \ln \frac{x_i}{10},$$

$$s.t \begin{cases} x_1+x_2+x_3=10 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 1 \\ x_1+x_2 \geqslant 7 \\ x_1+x_3 \geqslant 5 \\ x_2+x_3 \geqslant 4 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \quad \min \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{10} \ln \frac{x_i}{10}$$

$$s.t \begin{cases} g_1(X) = x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0 \\ g_2(X) = x_1 - 1 \geqslant 0 \\ g_3(X) = x_2 - 1 \geqslant 0 \\ g_4(X) = x_3 - 1 \geqslant 0 \\ g_5(X) = x_1 + x_2 - 7 \geqslant 0 \\ g_6(X) = x_1 + x_3 - 5 \geqslant 0 \\ g_7(X) = x_2 + x_3 - 4 \geqslant 0 \end{cases}.$$

根据 SUMT 内点法可转化为：

$$\min_{X \in R_0} \overline{P}(X, r_k) \qquad (***),$$

其中

$$\overline{P}(X, r_k) = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{10} \ln \frac{x_i}{10} + r_k \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{g_j(X)} \ (r_k > 0),$$

$$R_0 = \{X \mid g_j(X) > 0, j = 1, 2, \cdots, 7\}.$$

迭代步骤为：

(1)取障碍因子 $r_1 = 1$，允许误差 $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$.

(2)在 R_0 内取初值 $X^{(0)} = (5, 3, 2)$，并令 $k = 1$.

(3)以 $X^{k-1} \in R_0$ 为初值始点障碍函数(* * *)进行无约束极小化，

$$\begin{cases} \min\limits_{X \in R_0} \overline{P}(X, r_k) = \overline{P}(X^{(k)}, r_k) \\ X^{(k)} = X(r_k) \in R_0 \end{cases},$$

其中 $\overline{P}(X, r_k)$ 见(* *).

(4)检验是否满足收敛准则

$$r_k = \sum_{j=1}^{7} \frac{1}{g_j(X^{(k)})} \leqslant \varepsilon.$$

如满足上述准则，则 $X^{(k)}$ 为原问题的近似极小解 $X_{\min}$，否则取 $r_{k+1} < r_k$，这里取 $r_{k+1} = r_k/10$，令 $k = k+1$ 转向第 3 步继续进行迭代.

以上算法经 8 次迭代后得 $X^{(8)} = (3.94, 3.46, 2.6)$，而用 Shapley 值方法所得解 $X = (4, 3.5, 2.5)$，显然两个结果是非常相近的.

2.5 评 注

Shapley 值在解决 n 人合作对策时简单易算，但实际合作中并不都满足特征函数的要求，所以有一定的局限性. 最大熵法对于上述情况仍旧适用，只需把约束条件适当变化一下即可，不过用最大熵法解决此类问题时计算量较大，要利用计算机程序实现.

感谢导师费鹤良教授对本文的指导和帮助.

参考文献

1 姜启源．数学模型(第二版)．上海：高等教育出版社，1991，8
2 复旦大学编．概率论(第一册，概率论基础)．上海：人民教育出版社，1979，4
3 高尚．席位分配的最大熵法．数学的实践与认识，1996，2(26)
4 钱颂迪主编．运筹学(修订版)．运筹学编写组．北京：清化大学出版社，1990，1
5 M 阿佛里耳著，李元熹等译．非线性规划——分析与方法．上海：科学技术出版社，1979
6 Mokhtar S. Bazaraa and C M Shetty, Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Wiley & Sons, 1979

Shapley Value and the Maximum Entropy Method for a Cooperative n-person Game

Ni Zhongxin
(Department of mathematics)

Abstract With the help of vantage points in probability, the proof of Shapley value is presented. Based on the maximum entropy principle, another approach to solving a cooperative n-person game is proposed. This approach is easy to understand and shows the importance of information in practical activities. And it has a wider scope of applications.

Key words characteristic function of a cooperative n-person game; Shapley value; entropy; the maximum entropy principle