第33卷 第17期 计 算 机 工 程 2007年9月
Vol.33 No.17 Computer Engineering September 2007

·软件技术与数据库· 文章编号：1000—3428(2007)17—0096—03 文献标识码：A 中图分类号：TP311

有效模-n S-不变量与不可达性判定

鲁法明[1]，包云霞[2]，岳 昊[1]

(1. 山东科技大学信息学院，青岛 266510；2. 山东科技大学理学院，青岛 266510)

摘 要：Hohn F E提出用S-不变量判定Petri网不可达性的一个方法。Desel J指出，存在某些标识，用S-不变量无法判定其不可达性，但利用模-n S-不变量却可加以判定。然而，对于一个给定的标识，是否存在模-n S-不变量能判定该标识的不可达性。如果存在的话，又该如何求取这些模-n S-不变量，Desel J并未就这两个问题给出答案。该文提出了有效模-n S-不变量的概念，将上述问题转化为有效模-n S-不变量的存在性问题，并借助矩阵的整数分解给出了寻找有效模-n S-不变量的方法，有效解决了利用模-n S-不变量进行不可达性判定的问题。

关键词：Petri网；模-n S-不变量；不可达性

Effective Modular-n S-invariant and Non-reachability Decidability

LU Fa-ming[1], BAO Yun-xia[2], YUE Hao[1]

(1. School of Information, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510;
2. College of Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510)

【Abstract】 A method to decide the non-reachability of a marking using S-invariants is provided by Hohn F E; In fact, there exists some markings, the non-decidability of which can not be decided with S-invariants. But it can be decided with modular-n S-invariants. Desel J points it out in reference two. However, whether or not there exists some modular-n S-invariant, which can be used to decide the non-reachability property of a marking? And if such modular-n S-invariant exists, how to find it? There is no answer to both of the questions. The definition of effective modular-n S-invarients is given, and both of the problems can be solved with effective modular-n S-invarients. Furthermore, a method to find the effective modular-n S-invarients using the matrix integral decomposition is presented.

【Key words】 Petri nets; modular-n S-invariant; non-reachability property

Petri网作为系统模拟和分析的工具已被广泛应用于多个领域，用于系统的建模、分析和控制[3~6]，而可达性是Petri网最基本的动态性质。常见的用于可达性分析的方法有可达树、状态方程及S-不变量。借助可达树[7]进行可达性分析时易出现“状态爆炸”的问题；借助状态方程与S-不变量常用以判定标识的不可达性。文献[2]指出，存在某些标识，用S-不变量无法判定其不可达性，但利用模-n S-不变量却可加以判定。然而，对于给定的标识，是否存在模-n S-不变量能判定该标识的不可达性？若存在，又如何求取这些模-n S-不变量？这两个问题至今没有明确答案。本文提出有效模-n S-不变量的概念，将上述问题转化为有效模-n S-不变量的存在性问题。利用本文给出的方法，一方面能判定是否存在有效的模-n S-不变量，证明其不可达；另一方面若存在的话还能具体构造出一个关于标识M的有效模-n S-不变量。从而，本文有效地解决了利用模-n S-不变量进行不可达性判定的问题。

1 Petri 网基本概念

定义 1[6] 所谓Petri网是一个四元组 $\Sigma=(S,T;F,\mathrm{M}_0)$，其中 S 称为库所集，T 称为变迁集，二者不相交，$F\subseteq(S\times T)\cup(T\times S)$ 称为网的流关系，$\mathrm{M}:S\rightarrow\{0,1,2,\ldots\}$ 是 Σ 的一个标识，对 $x\in S\cup T$，记

$${}^{\cdot}x=\{y\in S\cup T\mid(y,x)\in F\},\quad x^{\cdot}=\{y\in S\cup T\mid(x,y)\in F\}$$

Petri 网具有如下变迁发生规则：

(1)对于变迁 $t\in T$，若 $\forall s\in S: s\in{}^{\cdot}t\rightarrow \mathrm{M}(s)\geq 1$，则称标识 M 下变迁 t 可引发，记作 $\mathrm{M}[t>$。

(2)若 $\mathrm{M}[t>\mathrm{M}'$，则对 $\forall s\in S$，

$$\mathrm{M}'(s)=\begin{cases}\mathrm{M}(s)-1 & 当\ s\in{}^{\cdot}t-t^{\cdot}\\ \mathrm{M}(s)+1 & 当\ s\in t^{\cdot}-{}^{\cdot}t\\ \mathrm{M}(s) & 其他\end{cases}$$

定义 2[6] 设 $\Sigma=(S,T;F,\mathrm{M}_0)$ 为一个Petri网，若存在变迁序列 $t_1,t_2,\ldots,t_k$ 和标识 $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\ldots,\mathrm{M}_k$ 使得

$$\mathrm{M}_0[t_1>\mathrm{M}_1[t_2>\mathrm{M}_2\ldots\mathrm{M}_{k-1}[t_k>\mathrm{M}_k$$

则称 M_k 是从 M_0 可达的，否则称 M_k 从 M_0 不可达。从 M_0 可达的所有标识的集合记为 $R(\mathrm{M}_0)$。

Petri网的网结构可用关联矩阵来表示，矩阵的每列对应一个库所，每行对应一个变迁，若变迁的发生使得库所的标记增加或减少一个，则关联矩阵中对应元素的值为 1 或-1，否则为 0。用列向量来表示Petri网的标识，向量中元素的值对应相应库所中的标记数。根据定义 2，初始标识 M_0 下，对于任意可达标识M，总存在非负整数向量 $\boldsymbol{X}$ 使得方程 $\mathrm{M}=\mathrm{M}_0+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$ 成立，此方程称为Petri网的状态方程。

2 S-不变量

本节介绍 S-不变量在不可达性判定中的应用。

定义 3[4] 设 $N=(S,T;F)$ 为一个网，$\boldsymbol{A}$ 为网N的关联矩阵，如果非平凡的非负整数向量 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $\boldsymbol{AY}=\vec{0}$，则称 $\boldsymbol{Y}$ 为N的一个S-不变量。

基金项目：国家自然科学基金资助项目(60173053)

作者简介：鲁法明(1981－)，男，助教、硕士，主研方向：Petri 网理论与应用，算法设计与分析等；包云霞，助教、硕士；岳 昊，博士

收稿日期：2006-09-25 **E-mail**：lufaming@sdust.edu.cn

S-不变量有如下性质:

定理 1 对于Petri网 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$，若标识M从M_0可达，则任意S-不变量Y均满足 $Y^T(M-M_0)=0$。

证明 设关联矩阵为$\boldsymbol{A}$，若M_k从M_0可达则存在非负整数向量$\boldsymbol{X}$满足 $M=M_0+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}$。

设Y为S-不变量，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\vec{0}$。状态方程的两边同时左乘以行向量$\boldsymbol{Y}^T$ 则

$$\boldsymbol{Y}^T M=\boldsymbol{Y}^T M_0+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}$$

从而

$$\boldsymbol{Y}^T(M-M_0)=\boldsymbol{Y}^T M_0+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}^T X-\boldsymbol{Y}^T M_0$$
$$=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})^T\boldsymbol{X}=\vec{0}\boldsymbol{X}=0$$

如图 1 中 Petri网Σ_1，初始标识 $\boldsymbol{M}_0=[1,1,0,0,1,1,0,0]^T$，对于标识 $\boldsymbol{M}_d=[1,1,0,1,1,1,0,1]^T$，取 $\boldsymbol{Y}=[1,0,0,1,0,0,0,0]^T$，易验证Y是一个S不变量，但 $\boldsymbol{Y}^T[\boldsymbol{M}_d-\boldsymbol{M}_0]=1$，根据定理 1 可知标识$M_d$不可达。然而对于标识 $\boldsymbol{M}=[1,0,1,0,1,1,0,0]^T$ 而言，对于任意S-不变量Y，等式$Y^T(M_d-M_0)=0$ 恒成立，由此，无法借助S-不变量来判定标识M是否可达。然而，文献[2]指出，借助模-n S不变量可判定标识M不可达。

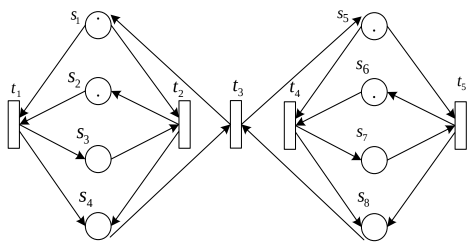

图 1 Petri网Σ_1

3 模-n S-不变量

下面介绍如何利用模-n S-不变量判定不可达性。

定义 4[2] 设 N=(S,T;F) 为一个网，$\boldsymbol{A}$为网N的关联矩阵，若存在正整数n>1 与非平凡的整数向量$\boldsymbol{Y}$满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\vec{0}\pmod{n}$，则称$\boldsymbol{Y}$为N的一个模-n S-不变量。

模-n S-不变量有如下性质:

定理 2 对Petri网 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$，若标识M从M_0可达，则任意模-n S-不变量Y满足

$Y^T(M-M_0)=0\pmod{n}$

证明 设关联矩阵为$\boldsymbol{A}$，由M_k从M_0可达知存在非负整数向量$\boldsymbol{X}$满足 $M_0+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}=M$。

设存在n使Y为模-n S-不变量，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\vec{0}\pmod{n}$成立。在状态方程两边同时左乘以行向量$\boldsymbol{Y}^T$ 则

$\boldsymbol{Y}^T M_0+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}^T X=\boldsymbol{Y}^T M$

从而$\boldsymbol{Y}^T(M-M_0)=\boldsymbol{Y}^T M_0+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}^T M_0$

$=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})^T\boldsymbol{X}=0\pmod{n}$ 。

对于图 1 所示Petri网，令 $Y=[1,1,0,0,1,1,0,0]^T$，易证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=[-2,0,2,-2,0]^T=\vec{0}\pmod{2}$，从而$\boldsymbol{Y}$为一个模-2 S-不变量。对于标识 $M=[1,0,1,0,1,1,0,0]^T$，因为 $Y^T(M-M_0)=1\neq 0\pmod{2}$，所以，据定理 2 可断定标识M不可达。然而，对于任意给定的标识M，是否存在模-n S-不变量可证明其不可达，若存在，又如何找到这样一个模-n S-不变量，这就是以下要解决的问题。

4 基于有效模-n S-不变量的不可达性判定

4.1 有效模-n S-不变量

定义 5 对于 Petri 网 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$，设 $\boldsymbol{A}$ 为关联矩阵，M 为待判定标识，若整数向量 $\boldsymbol{Y}$ 满足以下条件

(1)$\boldsymbol{Y}$为网(S,T;F)的一个模-n S-不变量

(2)$\boldsymbol{Y}^T(M-M_0)\neq 0\pmod{n}$

则称$\boldsymbol{Y}$为Petri网Σ关于标识M的一个有效模-n S-不变量。

关于有效模-n S-不变量有如下结论:

定理 3 设Petri网 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$，$\boldsymbol{A}$为关联矩阵，M为待判定的标识，若存在关于标识M的有效模-n S-不变量，则标识M不可达。

证明 根据定义 5 与定理 2，该结论显然成立。

此外，对于标识M，存在模-n S-不变量能证明其不可达，当且仅当存在关于该标识的有效模-n S-不变量。下面借助矩阵的整数分解方法给出求取有效模-n S-不变量的方法。

4.2 有效模-n S-不变量的求取算法

4.2.1 矩阵的整数分解理论

本节给出矩阵整数分解理论的相关结论，具体证明可参考文献[9]，本文不赘述。

定义 6[9] 所谓幺模矩阵是指行列式值为 1 或-1 的整数矩阵。

定理 4[9] 幺模矩阵的逆矩阵仍然是幺模矩阵。

定理 5[9] 对于任意整数矩阵$\boldsymbol{A}_{m*n}$，总存在整数矩阵$\boldsymbol{U}_{m*m}$、$\boldsymbol{V}_{n*n}$及$\boldsymbol{D}_{m*n}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}$，其中$\boldsymbol{U}$与$\boldsymbol{V}$为幺模矩阵，而矩阵$\boldsymbol{D}$主对角线以外的元素均为 0。

定理 6 设 $\boldsymbol{U}$ 为 n 阶幺模矩阵，$\boldsymbol{Z}$ 为 n 维整向量，则 k 为 $\boldsymbol{Z}$ 中各元素的公约数，当且仅当 k 为 $\boldsymbol{UZ}$ 各元素的公约数。

证明 用*表示数乘运算，用 · 表示矩阵乘法运算。

先证必要性。若 k 为 $\boldsymbol{Z}$ 中各元素的公约数，则存在 n 维整数向量 $\boldsymbol{Z}'$，使得 $\boldsymbol{Z}$=k*$\boldsymbol{Z}'$。从而 $\boldsymbol{UZ}=\boldsymbol{U}\cdot(k*\boldsymbol{Z}')=k*(\boldsymbol{UZ})$，由此可知 k 为 $\boldsymbol{UZ}$ 中各元素的公约数。

再证充分性。若k为$\boldsymbol{UZ}$中各元素的最大公约数，则存在n维整数向量$\boldsymbol{Z}'$使得$\boldsymbol{UZ}$=k*$\boldsymbol{Z}'$，从而$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{U}^{-1}\cdot(k*v')=k*(\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{Z}')$。由定理 4 可知，$\boldsymbol{U}^{-1}$也为整数矩阵，加之v'也为整数矩阵，从而$\boldsymbol{Z}=k*(\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{Z}')$中各元素能被k整除。

4.2.2 有效模-n S-不变量的求取

设Petri网 $\Sigma=(S,T;F,M_0)$，$\boldsymbol{A}_{m*n}$为关联矩阵，M为待判定标识，记$\triangle M=M-M_0$，并设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}$，其中$\boldsymbol{U}$与$\boldsymbol{V}$分别为m阶和n阶的幺模矩阵，而矩阵$\boldsymbol{D}$为m*n阶整数矩阵，其主对角线以外的元素均为 0。此外，令$\boldsymbol{W}=\triangle M^T\cdot\boldsymbol{V}^{-1}$，用$d_i(1\leq i\leq\min\{m,n\})$表示矩阵$\boldsymbol{D}$第i行i列的元素，用$w_j(1\leq j\leq n)$表示向量$\boldsymbol{W}$的第j个元素。

引理 1 若存在$1\leq i\leq\min\{m,n\}$，使$|d_i|>1$且$d_i\dagger w_i$(表示d_i不能整除w_i)，令n维向量$\boldsymbol{Z}$的第i个分量为 1，其余分量均为d_i，则$Y=\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{Z}$为关于标识M的有效模-$|d_i|$S-不变量。

证明 一方面，由 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 的定义知：m≤n 时，

$$\boldsymbol{DZ}=[d_1*d_i,\ldots,d_{i-1}*d_i,d_i,d_{i+1}*d_i,\ldots,d_m*d_i]^T$$
$$=d_i*[d_1,\ldots,d_{i-1},1,d_{i+1},\ldots,d_m]^T$$

而 m>n 时，

$$\boldsymbol{DZ}=[d_1*d_i,\ldots,d_{i-1}*d_i,d_i,d_{i+1}*d_i,\ldots,d_n*d_i,0,\ldots,0]^T$$
$$=d_i*[d_1,\ldots,d_{i-1},1,d_{i+1},\ldots,d_n,0,\ldots,0]^T$$

因此，$\boldsymbol{DZ}$ 中各元素必以 d_i 为公约数，又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{DZ})$，由定理 6 知AY各元素也以$d_i$为公约数，故$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\vec{0}\pmod{|d_i|}$，即$\boldsymbol{Y}=V^{-1}\cdot\boldsymbol{Z}$为模-$|d_i|$ S-不变量。

另一方面，$\triangle\boldsymbol{M}^T\cdot\boldsymbol{Y}=(\triangle\boldsymbol{M}^T\cdot\boldsymbol{V}^{-1})\cdot\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{Z}$

$$=\sum_{j=1}^{n} w_j z_j = d_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_j + w_i$$

因已知$d_i \dagger w_i$，故$\triangle M^T \cdot Y \neq 0 \pmod{|d_i|}$。

综上所述，$Y=V^{-1} \cdot Z$为关于M的有效模-$|d_i|$S-不变量。

引理 2 若存在$1 \leqslant i \leqslant \min\{m,n\}$使得$d_i=0$而$w_i \neq 0$，令n维向量$\boldsymbol{Z}=E_i$($E_i$表示第i个分量为 1，其余分量为 0 的单位向量)，则$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{Z}$为关于标识M的有效模-$(|w_i|+1)$ S-不变量。

证明 一方面，由 D 与 Z 的定义知

$$\boldsymbol{DZ}=[d_1*0,\ldots,d_{i-1}*0,0*1,d_{i+1}*0,\ldots,d_m*0]^T=\vec{0}$$

故

$$\mathbf{AY}=\mathbf{UDVY}=\mathbf{UDV}(\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{Z})=\mathbf{U}(\mathbf{DZ})=\vec{0}=\vec{0}(\bmod\ (|w_i|+1))$$

另一方面，$\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{Y}=(\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{V}^{-1}) \cdot \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Z}=\sum_{j=1}^{n} w_j z_j = w_i$ $\neq 0(\bmod\ (|w_i|+1))$。

综上，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{Z}$为关于M的有效模-$(|w_i|+1)$ S-不变量。

引理 3 当变迁个数小于库所个数即m<n时，若存在$m<i \leqslant n$使得$w_i \neq 0$，定义n维向量$\boldsymbol{Z}=E_i$(E_i表示第i个分量为 1，其余分量为 0 的单位向量)。则$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{Z}$为一个关于标识M的有效模-$(|w_i|+1)$ S-不变量。

证明 一方面，$\boldsymbol{D}$为m*n阶矩阵，且m<n，只有其主对角线元素$d_i(1 \leqslant i \leqslant m)$可能非 0，而$\boldsymbol{Z}$的前m个元素全 0，故

$$\boldsymbol{DZ}=[d_1*0,\ldots,d_i*0,\ldots,d_m*0]^T=\vec{0}$$

从而

$$\mathbf{AY}=\mathbf{UDVY}=\mathbf{UDV}(\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{Z})=\mathbf{U}(\mathbf{DZ})=\vec{0}=\vec{0}(\bmod\ (|w_i|+1))$$

另一方面，$\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{Y}=(\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{V}^{-1}) \cdot \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Z}=\sum_{j=1}^{n} w_j z_j = w_i$ $\neq 0(\bmod\ (|w_i|+1))$。

综上所述，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{Z}$为关于标识M的一个有效模-$(|w_i|+1)$S-不变量。

定理 7 关于标识M的有效模-$\mathbb{n}$ S-不变量不存在当且仅当D与W满足以下条件：

(1)对任意$1 \le i \le \min\{m,n\}$，$w_i \neq 0 \rightarrow d_i|w_i$(表示$d_i$能整除$w_i$)；

(2)当变迁数小于库所数即m<n时，对任意$m<i \leqslant n$，$w_i=0$。

证明 先证充分性。需证条件满足时，每个模-$\mathbb{n}$ S-不变量Y满足$\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{Y}=0 \pmod{\mathbb{n}}$。

设Y为模-$\mathbb{n}$ S-不变量，令$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{VY}$，则

$$AY=UDVY=UDV(V^{-1}Z)=U(DZ)=\vec{0} \pmod{\mathbb{n}}$$

这说明$\mathbb{n}$为向量$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{DZ})$各元素的公约数，由定理 6 知$\mathbb{n}$也是DZ各元素的公约数，即对任意的$1 \le i \le \min\{m,n\}$，$\mathbb{n}|(d_i*z_i)$成立。

由条件(1)知，对任意$1 \le i \le \min\{m,n\}$，或者$w_i=0$或者$d_i|w_i$。对于前者，$\mathbb{n}|(w_i*z_i)$显然成立；对于后者，因$\mathbb{n}|(d_i*z_i)$成立，而$d_i|w_i$，故$\mathbb{n}|(w_i*z_i)$也成立。由此可得，对任意$1 \le i \le \min\{m,n\}$，$\mathbb{n}|(w_i*z_i)$成立。

当变迁数不小于库所个数，即$m \geqslant n$时，$\min\{m,n\}=n$，如前所述，$\mathbb{n}$能整除$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Z}$的每个分量，从而$\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{Y}=(\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{V}^{-1}) \cdot \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Z}=0 \pmod{\mathbb{n}}$。若m<n，则$\mathbb{n}$能整除$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Z}$的前m个分量，再由条件(2)，W的第m+1 到最后一个分量均为 0，从而，$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Z}$第m+1 到最后一个分量均为 0，显然，$\mathbb{n}$能整除这些分量。综上所述，$\mathbb{n}$能整除$\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Z}$的全部分量，从而$\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{Y}=(\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{V}^{-1}) \cdot \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Z}=0 \pmod{\mathbb{n}}$。

再证必要性，用反证法。

假设不存在有效模-$\mathbb{n}$ S-不变量。若条件(1)不成立，则存在$1 \leqslant i \leqslant \min\{m,n\}$使得$w_i \neq 0$且$d_i \dagger w_i$。此时，或者$|d_i|>1$且$d_i \dagger w_i$，或者$d_i=0$而$w_i \neq 0$。对前者可按引理 1 的方法构造一个有效模-$\mathbb{n}$ S-不变量；对后者可按引理 2 的方法构造一个有效模-$\mathbb{n}$ S-不变量。这与假设矛盾，条件(1)的必要性得证。

条件(2)不成立意味着，m<n时存在$m<i \leqslant n$使得$w_i \neq 0$，如此则可按引理 3 的方法构造一个有效模-$\mathbb{n}$ S-不变量，这也与假设矛盾，条件(2)必要性得证。

综上所述，给定Petri网$\Sigma=(S,T;F,M_0)$，对于待判定标识M，只需将关联矩阵A进行整数分解，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UDV}$，并令$\boldsymbol{W}=(\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{V}^{-1})$，之后观察定理 7 的条件是否满足。不满足则说明该标识不可达，并可通过引理 1~引理 3 的方法具体构造出一个有效模-$\mathbb{n}$ S-不变量；否则，说明无法利用模-$\mathbb{n}$ S-不变量来证明该标识是否可达。

4.2.3 实例分析

下面举例说明用有效模-$\mathbb{n}$ S-不变量证明标识的不可达。

对于图 1 所示Petri网Σ_1，初始标识$M_0=[1,1,0,0,1,1,0,0]^T$，要判定标识$M=[1,0,1,0,1,1,0,0]^T$的可达性。

Σ_1的关联矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

利用初等整数变换将$\boldsymbol{A}$进行整数分解[9]可得幺模矩阵$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$及矩阵$\boldsymbol{D}$和向量$\boldsymbol{W}$如下：

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W}=\Delta \boldsymbol{M}^T \bullet \boldsymbol{V}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

显然i=4 时，$d_4=2, w_4 \neq 1$，这不满足定理 7 的条件(1)，因此标识M不可达。进一步，根据引理 1 的方法，令$\boldsymbol{Z}=[2,2,2,1,2,2,2,2]^T$，则$\mathbf{Y}=\mathbf{V}^{-1} \bullet \mathbf{Z}=[1,5,2,2,3,3,2,2]^T$，易证$\boldsymbol{AY}=[-2,4,0,-2,0]=\vec{0}\pmod 2$，而$\triangle \boldsymbol{M}^T \cdot \boldsymbol{Y}=-3 \neq 0 \pmod 2$，从而构造出一个关于标识M的有效模-2 S-不变量。

5 结束语

对给定的Petri网与一个待判定标识M，利用本文方法，既能判定是否存在模-$\mathbb{n}$ S-不变量证明其不可达，若存在还能具体构造出关于该标识的有效模-$\mathbb{n}$ S-不变量，从而，本文有效地解决了利用模-$\mathbb{n}$ S-不变量进行不可达性判定的问题。

参考文献

1 Hohn F E. Elementary Matrix Algebra[M]. New York: Macmillan, 1958.

2 Desel J. On the Power of Place-Invariants[Z]. Gesellschaft für Informatik Special Interest on Petri Nets and Related System Models, 1991-12.

（下转第 101 页）