第25卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 25, No. 2
1996年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun. , 1996

Kakutani不动点定理在数理经济学中的一个应用

邹辉文

提　要　描述一般经济均衡理论的主要内容,指出证明该理论的关键所在,简略讨论Kakutani不动点定理的泛函分析证法.

关键词　一般经济均衡理论;集值映射;上半连续;不动点

中图法分类号　F224.0

0 引　言

一般经济均衡理论是数理经济学的中心论题. 其问题的提出可追溯到Adam Smith 1776年在他的名著《国富论》中写下的那段名言:

"每个人都力图应用他的资本,来使其生产能得到最大的价值. 一般说来,他并不企图增进公共福利,也不知道他所增进的公共福利为多少,他所追求的仅仅是他个人的安乐,仅仅是他个人的利益. 他在这样做时,有一只无形的手引导他去促进一种他意想不到的目标. 由于追求他自身的利益,他也经常促进了社会利益,其效果要比他真正想促进社会利益时所得到的效果为大."

在这段讳莫如深的论述中,Walras L 发现了合理的内核. 他把"无形的手"理解为价格体系,把"社会利益"理解为供需平衡,提出用一组方程描述国家经济的数学模型,试图说明存在一种均衡价格体系,协调自由经济中的生产活动和消费活动,使得供需达到平衡. 这就是一般经济均衡理论的雏型. 但这部理论远不是尽善尽美的,因为数学远没有提供充足的工具去加以论证,关键的"存在性证明"就是一个悬而未决的大问题.

在此后的半个多世纪里,在这方面具有划时代意义的工作,当推一代数学大师Neumann J Von 在本世纪20年代开创的对策论,他与经济学家Morgenstern O 合作发表了著名的《对策论与经济行为》(1944)一书,澄清了经济的均衡理论和分配理论中许多含糊其词的概念,为经济活动的研究提供了恰当的数学模型,开辟了攻克经济均衡理论的道路. Arrow J K 和 Debreu G 在总结前人工作的基础上,成功地运用了Kakutani不动点定理这样一个纯数学的结果,最终

收稿日期: 1995-05-08

作者邹辉文,男,讲师,上海师范大学数学系,上海,200234

完成了一般经济均衡理论的数学论证(1954).他们分别于1972和1983年获得经济学诺贝尔奖的殊荣,其主要功绩盖源于此.

1　一般经济均衡理论及其证明关键所在

设完全竞争市场有两类经纪人,即消费者和生产者.消费者集合为

$$I = \{1,2,\cdots,n\},$$

他们的消费用正数表示,而生产(例如付出的劳动)用负数表示(从消费者的角度来看,生产是一种支出).第 i 个消费者的消费集合 $X^i \subset \mathbf{R}^l$(现在把 $\mathbf{R}^l$ 作为商品空间),他的效用函数为

$$u_i : X^i \to \mathbf{R}.$$

又设生产者集合为

$$J = \{1,2,\cdots,m\},$$

他们的投入用负数表示,产出用正数表示.第 j 个生产者的生产集合为 $Y^j \subset \mathbf{R}^l$,他的利润函数为

$$\pi_j(p) = \max\{p \cdot y \mid y \in Y^j\},$$

其中 $p \in \Delta^l$ 为规一化价格.生产者的特征在于他是生产活动的决策者,而消费者则不然,虽然他也可能从事生产活动.当然,不排除生产者也兼是消费者的可能.

为完全的描述市场的情况,还需要解释消费者财力的构成.假设第 i 个消费者的初始占有为 $w^i \in X^i$,他在生产者 j 处所拥有的股份(例如工资份额)为 θ_{ij},此处 $0 \leqslant \theta_{ij} \leqslant 1$,在价格 p 之下,第 i 个消费者的财产价值为

$$\beta_i(p) = p \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \pi_j(p).$$

为简单计,不妨设

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} = 1, j \in J,$$

意思是说,生产者 j 的全部利润都被消费者"瓜分".

综上所述,便构成市场经济体

$$\mathscr{E} = \{(X^i, u_i, w^i), (\theta_{ij}), Y^j\}_{i \in I, j \in J}.$$

当只考虑纯交易经济活动,而不考虑生产活动时,便得到自由市场

$$\mathscr{E} = \{X^i, u_i, w^i\}_{i \in I}.$$

市场 $\mathscr{E}$ 的一个状态 (x, y, p),是指 $x \in X, y \in Y, p \in \Delta^l$,此处

$$X = \prod_{i=1}^{n} X^i, Y = \prod_{j=1}^{m} Y^j.$$

在价格 p 之下,消费者 i 的预算集合为

$$B_i(p) = \{x \in X^i \mid p \cdot x \leqslant \beta_i(p)\}.$$

其中 $\beta_i(p)$ 为财产价值.在经济体内,生产者的行为准则是追求最大的利润;消费者的行为准则是在自身财力允许的情况下,实现其最大的消费效用.

定义1　在经济体 $\mathscr{E}$ 中,如果状态 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ 满足条件:

(1) 对于 $i \in I, \bar{x}^i \in B_i(\bar{p})$,而且

$$u_i(\overline{x}^i) = \max\{u_i(z) \mid z \in B_i(\overline{p})\};$$

(2) 对于 $j\in J$，$\overline{p}\cdot\overline{y}^j=\pi_j(\overline{p})=\max\{\overline{p}\cdot z \mid z\in Y^j\}$；

(3) $\tilde{z}=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^i-\sum_{j=1}^{m}\overline{y}^j-\sum_{i=1}^{n}w^i\leqslant 0$，且 $\overline{p}\cdot\tilde{z}=0$.

则称$(\overline{x},\overline{y},\overline{p})$为$\mathscr{E}$ 的自由处置均衡态.

倘若还满足条件：

(3)′ $\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^i-\sum_{j=1}^{m}\overline{y}^j-\sum_{i=1}^{n}w^i=0$.

由称$(\overline{x},\overline{y},\overline{p})$为$\mathscr{E}$ 的均衡态，并称$(\overline{x},\overline{y})$为均衡配置，$\overline{p}$ 为均衡价格.

这个定义表明，在均衡价格 $\overline{p}$ 之下，消费向量 $\overline{x}^i$ 是经纪人 i 在其自身财力允许的情况下的最满意的选择，生产向量 $\overline{y}^j$ 是经纪人 j 取得最大利润的选择，同时使市场的供需达到平衡，即市场处于一种最优的运营状态. 这就是 Adam Smith 的名言中所说的"无形的手"(价格)支配市场的规律.

为了把竞争经济纳入对策论的框架加以研究，Debreu 把多人对策模型作了进一步的推广，引进了所谓社会系统及其均衡态的概念，并给出了重要的均衡态存在定理. 下面引用其结论，不详之处请参阅文献[1].

定理1(Debreu，1952)　设社会系统 $\mathscr{E}=\{X^i,S_i,\Phi_i\}_{i\in I}$满足下列条件：

(1) 任给 $i\in I$，集合 $X^i\subset \boldsymbol{R}^l$是非空凸紧的；

(2) 集值映射 $S_i:X\rightrightarrows X^i$ 是连续的，取值非空凸闭集；

(3) 效用函数 Φ_i 是连续的，且关于第 i 个变元是拟凹的.

则社会系统$\mathscr{E}$ 有均衡态.

这个定理是继对策论中 Nash 定理之后，Debreu 作出的重大贡献，它是解决一般经济均衡理论的关键. 至今，在探讨许多与竞争机制有关的问题时，人们总还是想方设法引用这个定理，它的重要价值是不言而喻的.

利用定理1，Arrow-Debreu 先后完成了纯交易市场自由处置均衡态的存在定理(定理2)、完全竞争市场自由处置均衡态的存在定理(定理3)和均衡态的存在定理(定理4)的证明.

定理2　假设纯交易市场 $\mathscr{E}=\{X^i,u_i,w^i\}_{i\in I}$满足：

(1) 对于 $i\in I$，消费集合 $X^i\subset \boldsymbol{R}^l_+$是非空凸紧集；

(2) 对于 $i\in I$ 及 $p\in\Delta^l$，存在 $\tilde{x}^i\in X^i$，使 $p\cdot\tilde{x}^i<p\cdot w^i$；

(3) 对于 $i\in I$，效用函数 u_i 是连续的且拟凹的；

(4) 对于 $i\in I$，如果 $p\cdot X^i<p\cdot w^i$，则存在 $\tilde{x}^i\in X^i$，使得 $u_i(X^i)<u_i(\tilde{x}^i)$.

则市场$\mathscr{E}$ 有自由处置均衡态$(\overline{x},\overline{p})\in X\times\Delta^l$.

定理3　设完全竞争市场 $\mathscr{E}=\{(X^i,u_i,w^i),(\theta_{ij}),(Y^j)\}_{i\in I,j\in J}$满足定理2的假设条件(1)～(4)，且还满足

(5) 对于 $j\in J$，$0\in Y^j$，且 $Y^j\subset \boldsymbol{R}^l$是凸紧集.

则市场$\mathscr{E}$ 有自由处置均衡态$(\overline{x},\overline{y},\overline{p})$.

定理4　设经济体 $\mathscr{E}=\{(X^i,u_i,w^i),(\theta_{ij}),(Y^j)\}_{i\in I,j\in J}$满足如下条件

(A) 对于消费者 $i\in I$，

(1) 集合 $X^i\subset \boldsymbol{R}^l$是下方有界的凸闭集；

(2) 对于 $x^i \in X^i$ 及 $p \in \Delta^l$，如果 $p \cdot x^i < p \cdot w^i$，则存在 $x^{i\prime} \in X^i$，使得 $u_i(x^i) < u_i(x^{i\prime})$；

(3) 效用函数 $u_i: \boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}$ 是严格拟凹的；

(4) 对于 $p \in \Delta^l$，存在 $\tilde{x}^i \in X^i$，使得 $p \cdot \tilde{x}^i < p \cdot w^i$.

(B) 对于生产者 $j \in J$，

(1) $0 \in Y^j$；

(2) $Y' = \sum_{j=1}^{m} Y^j$ 是凸闭集；

(3) $Y' \cap (-Y') = \{0\}$；

(4) $Y' \supset (-\boldsymbol{R}^l_+)$.

则经济体 $\mathscr{E}$ 有均衡态 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$.

下面简略分析一下定理2～4的证明过程[1]，就可看出定理1的重要性.

定理4的证明主要是通过 $\mathscr{E}$ 并利用凸集理论构造一个新的经济体 $\mathscr{E}'$，使 $\mathscr{E}'$ 满足定理3的全部条件，从而得出结论.

定理2和定理3的证明都是通过 $\mathscr{E}$ 直接构造一个新的市场 $\mathscr{E}'$，使 $\mathscr{E}'$ 满足定理1的全部条件，从而得到所需的结论.

由此可见，正象前面已指出的那样，定理 1 是解决一般经济均衡理论的关键.

那么，证明定理1的关键是什么呢？只要看一下定理1 的证明就清楚了.

定理1的证明[1]　对于每个 $i \in I$，定义集值映射

$$M_i: X \rightrightarrows X^i,$$

$$M_i(a) = \{x \in S_i(a) \mid \Phi_i(x, \bar{p}^i) = \max[\Phi_i(y, \bar{p}^i) \mid y \in S_i(a)]\},\ a \in X.$$

因为 $S_i(a)$ 是紧集 X^i 中的闭子集，故 $S_i(a)$ 也是紧集，从而 $M_i(a)$ 是非空紧集.

由 Φ_i 的拟凹性可知，集合

$$\{x \in X^i \mid \Phi_i(x, \bar{p}^i) = \max[y, \bar{p}^i) \mid y \in S_i(a)]\}$$

是凸的，又集合 $S_i(a)$ 是凸集，故两者之交 $M_i(a)$ 必然也是凸集. 所以，对任何 $a \in X$，集合

$$M(a) = \prod_{i=1}^{m} M_i(a) \subset X$$

是非空的凸紧集.

不难验证，集值映射 $M_i(a)$ 是上半连续的，从而集值映射 $M: X \rightrightarrows X$ 也是上半连续的. 由 Kakutani 不动点定理，存在不动点

$$\bar{x} \in M(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} M_i(\bar{x}).$$

于是

$$\bar{x}^i \in M_i(\bar{x}), i = 1, 2, \cdots, n$$

这表明，$\bar{x}^i \in S_i(\bar{x})$，且

$$\Phi_i(\bar{x}^i, \bar{x}^{-i}) = \max\{\Phi_i(y, \bar{x}^i) \mid y \in S_i(\bar{x})\},$$

可见，

$$\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^n).$$

是社会系统 $\mathscr{E}$ 的均衡态. □

定理的证明方法具有典型意义，把均衡态归结为某集值映射的不动点，这几乎是解决这类

问题的通用技巧,它也正是证明定理1的关键所在.

综上可见,正确地认识和深入地分析竞争机制是揭示商品经济运行规律的钥匙,对策论的创立,理清了头绪纷杂的竞争问题,为使许多数理经济学的疑难问题获得解决开辟了道路,而最终完成一般经济均衡理论的“存在性”的证明,却得力于Kakutani不动点定理.

2 Kakutani不动点定理的证明

Kakutani不动点定理的证明方法一般可分为两大类,一类采用代数拓扑的观点,使用了单纯剖分的方法[1,5];另一类则纯粹使用泛函分析的方法[2~4].下面主要讨论后者.在文[4,5]中,已将$\boldsymbol{R}^n$上的Kakutani不动点定理(简称为$\boldsymbol{R}^n$-K定理)推广到了Banach空间,但$\boldsymbol{R}^n$-K定理不能作为该推广定理的一个推论,因为在证明该推广定理时,须用到$P_n\boldsymbol{H}_0$((P_n是l^2中的射影,$\boldsymbol{H}_0$是Hilbert立方体)具有Kakutani性质这一结论,而这一结论正是$\boldsymbol{R}^n$-K定理的内容.但是,在文[2,3]中,已将$\boldsymbol{R}^n$-K定理推广到局部凸拓扑空间,且$\boldsymbol{R}^n$-K定理可作为该推广定理的一个推论.遗憾的是,文[2,3]在证明该推广定理时,两处出现过“开集=有界闭集”的错误.虽然这些错误可以用其他办法来避免,但为了本文的完整起见,下面仍给出$\boldsymbol{R}^n$-K定理的简略证明.

引理 设$\boldsymbol{R}^n\supset M\supset X$且$M\neq X$,$X$为凸紧集,集值映射$f:X\rightrightarrows X$是上半连续的,则存在集值映射$\tilde{f}:M\rightrightarrows M$,使$\tilde{f}$在$M$上是上半连续的,且$\tilde{f}|_X=f$.

证明 由文[5]例2.14和文[1]定理1.5.6即知.

Kakutani定理 设$X\subset\boldsymbol{R}^n$为凸紧集,$f:X\rightrightarrows X$是上半连续的点闭且凸的集值映射,则f有不动点.

证明 设定理结论是错误的,则对每个$u\in X$,0不是$f(u)-u$的元素.令$g:X\rightrightarrows X$,$g(u)=f(u)-u$,因为$f(u)$是凸闭的,故集值映射$g(u)$也是凸闭的.于是由$\boldsymbol{R}^n$中关于凸集分离定理,推得存在一个$\delta>0$和$\psi\in\boldsymbol{R}^{n*}$,使得

$$\psi(v)\geqslant\delta,\text{对所有 } v\in g(u).$$

因f是上半连续的,由文[1]命题1.4.4可推知,g在X上也是上半连续的.又因为X是凸紧的,所以存在开球$B\supset X$,而$\bar{B}$也是凸紧集.由引理,存在集值映射$\tilde{g}:\bar{B}\rightrightarrows\bar{B}$,使$\tilde{g}$在$\bar{B}$上是上半连续的,且$\tilde{g}|_X=g$.

现在对每个$\psi\in\boldsymbol{R}^{n*}$,令

$$N_\psi=\{x\in B\,|\,\psi(y)>0,y\in\tilde{g}(x)\}$$

$$H_\psi=\{x\in B\,|\,\psi(x)>0\}$$

因ψ连续,故H_ψ为开集.设$u\in X$,由上述知,存在$\psi\in\boldsymbol{R}^{n*}$,使$u\in N_\psi$,且$\tilde{g}(u)=g(u)\subset H_\psi$.由$\tilde{g}$在$\bar{B}$上的上半连续性及文[3]定义10.2.1和定理10.2.4可知,存在开集$V_u\ni u$,对每个$v\in V_u$,有$\tilde{g}(v)\subset H_\psi$,从而$v\in N_\psi$,推知$V_u\subset N_\psi$.设$\dot{N}_\psi$为$N_\psi$的内点集,则$u\in\dot{N}_\psi$.于是

$$\{\dot{N}_\psi\,|\,\psi\in\boldsymbol{R}^{n*},\dot{N}_\psi\neq\varphi\}$$

构成X的覆盖,但X是紧集,故存在有限子覆盖:$\bigcup\limits_{i=1}^{m}\dot{N}_{\psi_i}\supset X$

由文[3]定理10.3.3,考虑从属于此覆盖的分离函数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$.每个$\alpha_i$在$X$上连续,$X$紧,故$\alpha_i$有界,由Tietze-Urysohn延拓定理[6],存在$\boldsymbol{R}^n$到$\boldsymbol{R}$的连续映射β_i,使$\beta_i|_X=\alpha_i(i=1,2,$

$\cdots,m)$. 令

$$P(x)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i(x)\psi_i, x\in B.$$

因为诸 β_i 均连续，故 P 是 B 上的连续映射. 由文[3]定理10.3.7(注：这里已将 P 的定义域从 X 扩大到 B，从而可以避免证明定理10.3.7时出现的错误)，存在一点 $u_0\in X$，使对所有 $u\in X$，

$$P(u_0)(u_0-u)\geqslant 0.$$

特别地，取 $w_0\in f(u_0)\subset X$，则 $P(u_0)(u_0-w_0)\geqslant 0$.

另一方面，当 $\alpha_i(u_0)\neq 0$ 时，必 $u_0\in \dot{N}_{\psi_i}$，又

$$w_0-u_0\in f(u_0)-u_0=g(u_0)=\tilde{g}(u_0),$$

故 $\psi_i(w_0-u_0)>0$，所以

$$P(u_0)(u_0-w_0)=-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(u_0)\psi_i(w_0-u_0)<0,$$

矛盾. 这说明定理结论正确. □

感谢导师施永兵教授和任课教师项家祥副教授的热心指导和帮助.

参 考 文 献

1 潘吉勋. 数理经济学原理. 长春：吉林大学出版社，1989

2 Istratescu Vasile I. Fixed Point Theory (An Introduction). D Reidel Publishing Company, 1981

3 [美]Istratescu Vasile I 著. 不动点理论及其应用. 王灌缨等译. 上海：科技文献出版社，1991

4 张石生. 不动点理论及应用. 重庆出版社，1984

5 [英]Smart D R 著. 不动点定理. 张石生等译. 重庆出版社，1982

6 [法]Dieudonné 著. 现代分析基础(第一卷). 郭瑞芝等译. 北京：科学出版社，1982

7 史树中. 一般经济均衡理论的数学问题. 数学的实践与认识，1986(3)

Application of Kakutani Fixed Point Theorem to Mathematic Economics

Zou Huiwen

(Department of Mathematics)

Abstract We describe the main contents of the theory of general economic equilibrium, point out the key to its proof, and discuss briefly the functional analysis methods of proving Kakutani fixed point theorem.

Key words theory of general economic equilibrium; set value mapping; upper semicontinuity; fixed point