Multiple Type-II 截尾样本的统计方法

费鹤良

(上海师范大学 数学科学学院，上海 200234)

摘　要：Multiple Type-II 截尾样本或称为带有缺失的定数截尾样本在实际中常会遇到，最近十多年来有关它的统计分析方法有了较多的研究结果，作者作了综述，并对进一步需要研究的问题提出一些看法.

关键词：带有缺失的定数截尾样本；指数分布；威布尔分布；极大似然估计；区间估计

中图分类号：O213.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2001)03-0006-08

1　介　绍

Multiple Type-II 截尾(或称为带有缺失的定数截尾或多重定截尾)样本，在实际中经常遇到. 例如，在寿命试验中，由于机理或试验的困难，使有些样品的失效时间无法观察到. 有许多情况是不知道某些样品的确切的失效时间，但知道它们在某两个观察值之间. Multiple Type-II 截尾是 Type-II 截尾的一种推广，其中双边定数截尾是其特殊情况. 设 n 个产品进行寿命试验，仅观察到第 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 个失效产品的失效时间：

$$t_{r_1,n} \leqslant t_{r_2,n} \leqslant \cdots \leqslant t_{r_k,n}, \tag{1.1}$$

其中 $1 \leqslant r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leqslant n$，在它们之间失效的产品的确切失效时间未观察到，这种样本称为 Multiple Type-II 截尾样本.

20 世纪 70 年代对 Multiple Type-II 截尾样本的统计方法开始有了研究，主要用图估法和回归方法[1]. 到 90 年代以后，研究成果有了较快的发展. BALASUBRAMANIANT 和 BALAKRISHNAN(1992)给出了二参数指数分布的 MLE，AMLE 和 BLUE. FEI 和 KONG(1994)提出了指数分布参数的区间估计和近似区间估计，FEI 和 KONG(1995)，BALAKRISHNAN，GUPTA 和 PANCHAPAKESAN(1995)给出了 Weibull 和极值分布的 MLE，AMLE，BLUE 和 BLIE. KONG 和 FEI(1996)给出了 MLE 的渐进正态性的条件，这些条件对 Weibull、Gamma、Logistic 分布等都适用. 赵培东(1999)给出对数正态分布恒加试验的 AMLE 的解析表达式. SHEN 和 FEI(1999)讨论了两个二参数指数分布位置参数有序约束的估计.

2　指数分布

2.1　单参数指数分布

单参数指数分布的概率密度函数

收稿日期：2001-01-12

基金项目：国家自然科学基金(69971016)；上海科学技术发展基金(00JC14507).

作者简介：费鹤良(1938-)，男，上海师范大学数学科学学院教授，博士生导师.

$$f(t;\theta)=\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{t}{\theta}),\ t\geqslant 0,\ \theta>0. \tag{2.1}$$

分布函数

$$F(t,\theta)=1-\exp(-\frac{t}{\theta}),\ t\geqslant 0,\ \theta>0. \tag{2.2}$$

设数据(1.1)为来自指数分布(2.1)的 Multiple Type-II 样本，为简单起见，令

$$t_i=t_{r_i,n},\quad i=1,\cdots,k. \tag{2.3}$$

2.1.1 最好线性无偏估计(BLUE)[2]

指数分布次序统计量的期望和协方差：

$$\alpha_i=E(t_i/\theta)=E(Xr_i,n/\theta)=\sum_{h=n-r_i+1}^{n}1/h=s_1(n-r_i,n) \tag{2.4}$$

和
$$\beta_{i,j}=\mathrm{cov}(t_i/\theta,t_j/\theta)=\sum_{h=n-r_i+1}^{n}1/h^2=s_2(n-r_i,n),\quad i\leqslant j. \tag{2.5}$$

容易得到 θ 的 BLUE 的显式表示：

$$\theta^*=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k}(g_i-g_{i+1})t_i. \tag{2.6}$$

在此

$$g_i=c_is_1(n-r_i,n-r_{i-1}),\quad c_i=\frac{1}{s_2(n-r_i,n-r_{i-1})},\quad i=1,2,\ \ ,k.$$

$$r_0=0,\ g_{k+1}=0,\quad K=\sum_{i=1}^{k}\frac{s_1^2(n-r_i,n-r_{i-1})}{s_2(n-r_i,n-r_{i-1})}.$$

θ^* 的方差为：

$$\mathrm{Var}(\theta^*)=\theta^2/K. \tag{2.7}$$

2.1.2 极大似然估计 MLE 和近似极大似然估计 AMLE

基于 Multiple Type-II 样本的似然方程：

$$k\theta+\frac{(r_1-1)t_1e^{-t_1/\theta}}{1-e^{-t_1/\theta}}-\sum_{i=1}^{k}t_i-(n-r_k)t_k-\sum_{i=1}^{k-1}[r_{i+1}-r_i-1]\frac{t_ie^{-t_i/\theta}-t_{i-1}e^{-t_{i-1}/\theta}}{e^{-t_i/\theta}-e^{-t_{i+1}/\theta}}=0. \tag{2.8}$$

方程(2.8)可用数值方法得到 θ 的极大似估计．用[2]的方法，利用 Taylor 展开，得到：

$$\frac{\frac{t_i}{\theta}e^{-t_i/\theta}-\frac{t_{i+1}}{\theta}e^{-t_{i+1}/\theta}}{e^{-t_i/\theta}-e^{-t_{i+1}/\theta}}\approx\gamma_i+\delta_i\frac{t_i}{\theta}+(1-\delta_i)\frac{t_{i-1}}{\theta}. \tag{2.9}$$

在此
$$\delta_i=\frac{q_i}{q_i-q_{i-1}}-\frac{q_iq_{i+1}}{(q_i-q_{i+1})^2}\ln(\frac{q_i}{q_{i+1}}),$$

$$\gamma_i=\frac{q_{i+1}\ln q_{i-1}-q_i\ln q_i}{q_i-q_{i+1}}+\delta_i\ln q_i-(1-\delta_i)\ln q_{i+1}.$$

其中 $p_i=\frac{r_i}{n+1}$，$q_i=1-p_i$．将(2.9)代入(2.8)，得到关于 θ 的近似似然方程，并得到 θ 的 AMLE

$$\hat\theta=\frac{\sum_{i=1}^{k}t_i+\sum_{i=0}^{k-1}(r_{i+1}-r_i-1)[\delta_it_i+(1-\delta_i)t_{i+1}]+(n-r_k)t_k}{k-\sum_{i=0}^{k-1}(r_{i+1}-r_i-1)\gamma_i}. \tag{2.10}$$

易知，$\hat\theta$ 是 t_i 的线性函数、其方差可以用(2.5)得到．

2.2 二参数指数分布

2.2.1 BLUE

二参数指数分布

$$F(t;\mu,\theta) = 1 - e^{-(t-\mu)/\theta}, \quad t \geqslant \mu,\ \theta > 0. \tag{2.11}$$

参数 μ,θ 的 BLUE 为:

$$\mu^* = \frac{1}{k^*}\sum_{i=1}^{k} b_i t_i, \tag{2.12}$$

$$\theta^* = \frac{c_1}{k^*}\sum_{i=1}^{k} g_i (t_i - t_{i-1}). \tag{2.13}$$

在此

$$K^* = \frac{1}{s_2(n-r_1,n)}\sum_{i=2}^{k}\frac{s_1^2(n-r_i,n-r_{i-1})}{s_2(n-r_i,n-r_{i-1})}$$

$$b_1 = K^* + g_1 g_2, \quad b_i = g_1(g_{i+1} - g_i),\ i = 2,\cdots,k-1, \quad b_k = -g_1 g_k.$$

μ^*,θ^* 的方差和协方差为

$$\mathrm{Var}(\mu^*) = \theta^K/K^*, \quad \mathrm{Var}(\theta^*) = \theta^2/\{K^* s_2(n-r_1,n)\}, \quad \mathrm{cov}(\mu^*,\theta^*) = -\theta^2 g_1/K^*.$$

2.2.2 AMLE

类似于单参数指数分布可以得到 μ,θ 的 AMLE:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} t_i + (n-r_k)t_k + \sum_{i=1}^{k-1}(r_{i+1} - r_i - 1)[\delta_i t_i + (1-\delta_i)t_{i+1}] - (n - r_1 + 1)t_1}{k - \sum_{i=1}^{k-1}(r_{i+1} - r_i - 1)\gamma_i}. \tag{2.14}$$

$$\hat{\mu} = t_1 + \hat{\theta}\ln\left(\frac{n - r_1 + 1}{n}\right). \tag{2.15}$$

2.3 区间估计

FEI 和 KONG(1994)给出了指数分布参数的区间估计.

2.3.1 单参数指数分布的区间估计

(1) 近似方法 1

设

$$Q_k = 2\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{\theta}. \tag{2.16}$$

易知:

$$\mu_k = EQ_k = 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\frac{k+1-i}{n-j+1}, \tag{2.17}$$

$$V_k = \mathrm{var}(Q_k) = 4\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\frac{(k+1-i)^2}{(n-j+1)^2}. \tag{2.18}$$

由下列近似分布:

$$\frac{2\mu_k Q_K}{V_k} \sim \chi^2\left(\frac{2\mu_k^2}{V_k}\right), \tag{2.19}$$

可得到 θ 的 $1-\alpha$ 区间估计,例如 θ 的 $1-\alpha$ 置信下限

$$\theta_2 = \frac{4\mu_k\sum_{i=1}^{k} t_i}{V_k \chi_{1-\alpha}^2\left(\frac{2\mu_k^2}{V_k}\right)}. \tag{2.20}$$

(2) 近似方法 2

GABLER 和 WOLFF(1987)证明下列结果:

引理 1 设 $X_1,\cdots,X_n$ iid $N(0,1)$, $d_1,\cdots,d_n$ 为正数,且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 1$,则 $X = \sum_{i=1}^{n} d_i X_i^2$ 的密度函数近似地为

$$g_d(x)=\frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x}{2d_i}\right)^{1/2d_i-1}e^{-x/2d_i}}{\Gamma\left(\frac{1}{2d_i}\right)},\quad x>0. \tag{2.21}$$

利用指数分布次序统计量的性质，可将(2.16)的 Q_k 定义为：

$$Q_k=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\frac{(k+1-i)(X_{j,1}^2+X_{j,2}^2)}{n-j+1}.$$

其中 $X_{j,1}$、$X_{j,2}$ 是独立 $N(0,1)$ 变量，取 $M_k=\mu_k/2$，则 $\frac{Q_k}{2M_k}$ 是 $2r_k$ 个 iid 的 $N(0,1)$ 变量的平方的加权和，权为：

$$d_{ij}=\frac{k+1-i}{2M_k(n-j+1)},\quad i=1,\cdots,k,\quad j=r_{i-1}+1,\cdots,r_i.$$

由引理1，可知 $\frac{Q_k}{2M_k}$ 有近似概率密度函数

$$g_d(x)=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\left(\frac{x}{2d_{ij}}\right)^{1/2d_{ij}-1}e^{-x/2d_{ij}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2d_{ij}}\right)}. \tag{2.22}$$

假设 $u_{1-\alpha}$ 为 $\frac{Q_k}{2M_k}$ 的 $1-\alpha$ 分位数，于是 θ 的 $1-\alpha$ 置信下限为

$$\theta_I=\frac{\sum_{i=1}^{k}t_i}{M_k u_{1-\alpha}}. \tag{2.23}$$

(3) 精确方法

KAMPS(1990)证明了下列结果：

引理2 $Z_1,\cdots,Z_n\ iid\sim\exp(\theta)$，$a_1,\cdots,a_n$ 为 n 个不同的正数，则 $T=\sum_{i=1}^{n}Z_i/a_i$ 的分布函数为

$$G_n(t)=1-(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}a_i\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}\prod_{j=1,j\neq k}^{n}(a_k-a_j)^{-1}e^{-a_kt/\theta},t>0. \tag{2.24}$$

令
$$Q_k^*=\frac{Q_k}{2}=\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{\theta}\overset{d}{=}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\frac{k+1-i}{n-j+1}Z_j, \tag{2.25}$$

其中 $Z_j\ iid\sim\exp(1)$，$j=1,\cdots,r_1,\cdots,r_2,\cdots,r_k$，定义

$$a_j=\begin{cases}(n-j+1)/k, & j=1,\cdots,r_1\\ (n-j+1)/(k-1), & j=r_1+1,\cdots,r_2\\ \vdots & \vdots\\ n-j+1 & j=r_{k-1}+1,\cdots,r_k\end{cases} \tag{2.26}$$

由引理2，Q_k^* 的分布函数为

$$G_{r_k}(t)=1-(-1)^{r_k-1}\prod_{i=1}^{r_k}a_i\sum_{h=1}^{r_k}a_h^{-1}\prod_{j=1,j\neq h}^{r_k}(a_h-a_j)^{-1}e^{-a_ht},\ t>0, \tag{2.27}$$

记 $t_{1-\alpha}$ 为 $G_{r_k}(t)$ 的 $1-\alpha$ 分位数，则 θ 的 $1-\alpha$ 置信下限为

$$\theta_I=\frac{\sum_{i=1}^{k}t_i}{t_{1-\alpha}}. \tag{2.28}$$

2.3.2 二参数指数分布的参数的区间估计

(1) 参数 θ 的区间估计

令
$$Q_1=\frac{2(t_{r_1,n}-\mu)}{\theta}=\frac{2(t_1-\mu)}{\theta},\tag{2.29}$$
$$Q_{k,1}=2\sum\frac{t_{r_i,n}-t_{r_1,n}}{\theta}=\frac{2}{\theta}\Big[\sum_{i=1}^{k}t_i-(k-1)t_1\Big].\tag{2.30}$$
由于 $t_{r_2,n}-t_{r_1,n},\cdots,t_{r_k,n}-t_{r_1,n}$ 来自样本大小为 $n-r_1$ 的 $\exp(\theta)$ 的第 $r_2-r_1,\cdots,r_k-r_1$ 的次序统计量，$Q_{K,1}$ 与参数 μ 无关，用于单参数指数分布的三种方法得到 θ 的区间估计.

(2) 参数 μ 的区间估计

方法 1，近似 F 分布的方法.

记
$$\mu_1=EQ_1=2\sum_{j=1}^{r_1}\frac{1}{n-j+1},\quad V_1=\mathrm{Var}(Q_1)=4\sum_{j=1}^{r_1}\frac{1}{(n-j+1)^2},$$
$$\mu_{k,1}=2\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\frac{K+1-i}{n-j+1},\quad V_{k,1}=4\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i}\frac{(K+1-i)^2}{(n-j+1)^2},$$
$$f_1=\frac{2\mu_1^2}{V_1},\quad f_2=\frac{2\mu_{k,1}^2}{V_{k,1}},\tag{2.31}$$
从下列近似分布
$$F=\frac{\mu_{k,1}}{\mu_1}\cdot\frac{Q_1}{Q_{k,1}}\sim F(f_1,f_2),\tag{2.32}$$
得到位置参数 μ 的区间估计，例如 μ 的 $1-\alpha$ 置信下限
$$\mu_L=t_{r_1,n}-\frac{\mu_1}{\mu_{k,1}}F_{1-\alpha}(f_1,f_2)\Big[\sum_{i=1}^{k}t_{i,n}-kt_{r_1,n}\Big].\tag{2.33}$$
方法 2，由引理 1，可导出 $Q_1/2M_1$ 和 $Q_{k,1}/2M_{k,1}$ 的近似分布，进一步可获得它们的商的分布.

定理　设 $X_1,\cdots,X_{n_1},Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ iid $N(0,1)$，$c_i>0$，$i=1,\cdots,n_1$，$d_j>0$，$j=1,\cdots,n_2$，且 $\sum_{i=1}^{n_1}c_i=1$，$\sum_{j=1}^{n_2}d_j=1$，当 $X=\sum_{i=1}^{n_1}c_iX_i^2$，$Y=\sum_{j=1}^{n_2}d_jY_j^2$ 时，则 $Z=X/Y$ 的概率密度函数为
$$f(z)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(\frac{1}{2c_i})^{\frac{1}{c_i}-1}(\frac{1}{2d_j})^{\frac{1}{d_j}-1}}{B(\frac{1}{2c_i},\frac{1}{2d_j})}\cdot\frac{z^{\frac{1}{2c_i}}}{(\frac{z}{2c_i}+\frac{1}{2d_j})^{\frac{1}{2c_i}+\frac{1}{2d_j}}},\quad z>0,\tag{2.34}$$
现在，令 $E=\frac{M_{k,1}Q_1}{M_1Q_{k,1}}$，由定理 1，可得其概率密度并由此获得 μ 的置信区间.

方法 3，精确方法. 由引理 2，我们定义 $Q_1^*=Q_1/2$，$Q_{k,1}^*=Q_{k,1}/2$，设 $Z=Q_1^*/Q_{k,1}^*$，则 Z 的分布函数为
$$G(z)=1-(-1)^{r_k}\prod_{i=1}^{r_1}a_i\prod_{j=r_1+1}^{r_k}b_j\sum_{k=1}^{r_1}\sum_{h=r_1+1}^{r_k}\prod_{j=1,j\neq k}^{r_1}(a_k-a_j)^{-1}\times\prod_{l=r_1+1,l\neq h}^{r_k}(b_h-b_l)^{-1}\frac{1}{a_kz+b_h},\tag{2.35}$$
其中 $a_i=n-i+1$，$i=1,\cdots,r_1$，$b_j=\frac{n-j+1}{k+i+1}$，$r_{i-1}\leqslant j\leqslant r_i$，$i=2,\cdots,k$. 若 $t_{1-\alpha}$ 是 $G(z)$ 的 $1-\alpha$ 分位数，则 μ 的 $1-\alpha$ 置信下限为
$$\mu_L=t_{r_1,n}-t_{1-\alpha}\Big[\sum_{i=1}^{k}t_{r_i,n}-kt_{r_1,n}\Big].\tag{2.36}$$
上面介绍的方法，涉及加权 χ^2 变量之和的分布问题，方法 1 是用中心 χ^2 分布去近似，使其一、二阶矩与加权 χ^2 分布的一、二阶矩相等，方法 2 的近似分布从理论上来说比方法 1 要好一些，但计算复杂. 方法 3 给出精确解，但计算更为复杂.

3　威布尔分布和极值分布

设寿命 T 为威布尔分布，其分布函数

$$G(t,\theta,\beta) = 1 - \exp\{-(\frac{t}{\theta})^{\beta}\},\ t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

在此 $\theta > 0$，$\beta > 0$ 分别为尺度和形状参数. 令 $X = \ln T$，则 X 服从极值分布

$$F(x,\mu,\sigma) = 1 - \exp\{-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\},\ -\infty < x < \infty, \tag{3.3}$$

其中 $\mu = \ln\theta$，$\sigma = 1/\beta$ 分别为分布的位置和尺度参数.

文献[7]导出了 μ，σ 的 BLUE 和 BLIE，从而导出相应的 θ，β 的估计和 β 的近似无偏估计. 文献[7,8]导出了 μ，σ 的近似无偏估计 $\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}$ 的显式表示及其渐近方差和协方差为：

$$\hat{\mu} = B - C\hat{\sigma},$$

$$\hat{\sigma} = \{-D + \sqrt{D^2 + 4E}\}/2A. \tag{3.4}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{m}\{\frac{V^2}{V_2 - V_1^2}\}, \tag{3.5}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{m}\{\frac{1}{V_2 - V_1^2}\}, \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Cos}(\hat{\mu},\hat{\sigma}) = -\frac{2}{m}\{\frac{V_1}{V_2 - V_1^2}\}. \tag{3.7}$$

其中 A,B,C,D,E,m 仅与 n,r_i，$\ln t_{i,n}$，$i = 1,2,\cdots,k$ 及标准极值分布次序统计量的一、二阶矩有关. 其表达式可见[7].

对于其他的一些分布，例如对数正态分布 AMLE 和恒定应力加速寿命试验下的 AMLE，文[9]给出了有关参数估计的显式表示.

4　Multiple 定数截尾样本 MLE 的极限定理

对于定数截尾和双边定数截尾样下的 MLE 的渐近性质可见 HALPERIN(1952)，BHATTACHARYYA(1985)等文章. 对于一般的 Multipy type-II 截尾样本的 MLE 的极限定理，FEI 和 KONG(1996)给出了 MLE 的一致性，渐近正态性和有效性的条件，具体条件见[12]，这些条件对 Gamma 分布、Weibull 和二参数指数分布等都适用. 文[9]验证了对数正态分布也满足定理的条件.

5　两个指数分布位置参数有顺序约束的估计

设 $X \sim \exp(\mu_1,\sigma_1)$，密度函数为

$$f_1(x;\mu_1,\sigma_1) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1}\exp\{-\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\}, & x \geqslant \mu_1 \\ 0, & x < \mu_1 \end{cases},\quad \sigma_1 > 0 \tag{5.1}$$

和 $Y \sim \exp(\mu_2,\sigma_2)$，密度函数为

$$f_n(y;\mu_2,\sigma_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_2}\exp\{-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\}, & y \geqslant \mu_2 \\ 0, & y < \mu_2 \end{cases},\quad \sigma_2 > 0. \tag{5.2}$$

且 X 与 Y 相互独立.

考虑位置参数 μ_1, μ_2 有顺序约束情况下的估计问题,对完全样本和定数截尾样本下已有不少文献,例如 JIN 和 PAL(1991),PAL 和 KUSHARG(1992),沈亦可和费鹤良(1995),汤银才(1995,1997)等. 对于 Multipile 定数截尾样本,沈亦可和费鹤良(1999)用 Bayes 方法和补充数据法给出位置参数有顺序约束的估计.

设 $x_{(r_1)},\cdots,x_{(r_{k_1})}$ 为来自 $\exp(\mu_1,\sigma_1)$ 的样本大小为 m 的 Multiple 定数截尾样本,$y_{(t_1)},\cdots,y_{(t_{l})}$ 为来自 $\exp(\mu_2,\sigma_2)$ 的样本大小为 n 的 Multiple 定数截尾样本,设 $\mu_1 \leqslant \mu_2$.

SINHA 和 GUTTMAN(1976)对两参数指数分布提出一个退化的无信息先验分布:

$$g(\mu,\sigma,v_0) = \frac{1}{\sigma^{v_0+1}},\ \sigma > 0,\ 0 < \mu < t_{(1)}. \tag{5.3}$$

这里 $t_{(1)}$ 是第一个失效时间. 对 σ_1,σ_2 已知时,(μ_1,μ_2) 先验分布为

$$g(\mu_1,\mu_2) \propto \frac{1}{c}, c \text{ 为某常数}. \tag{5.4}$$

对于 Multiple Type-II 截尾样本,令 $t = \min(x_{(r_1)}, y_{(t_1)})$,记先验信息 z. 因为 $\mu_1 \leqslant \mu_2 < y_{(t_1)}$, $0 < \mu_1 < t$,容易得到后验密度 $g(\mu_1,\mu_2|z)$ 和 μ_1,μ_2 后验边际密度 $g_1(\mu_1|z)$ 和 $g_2(\mu_2|z)$, 从而得到平方损失下的 Bayes 估计 $E(\mu_1|z)$ 和 $E(\mu_2|z)$,表达式详见[18]. 由于对 μ_1,μ_2 的限制分别从 $x_{(1)}$ 扩大到 $x_{(r_1)}, y_{(1)}$ 扩大到 $y_{(t_1)}$,当 r_1, t_1 较大时,对 μ_1, μ_2 估计的偏差会变得较大. WHITTEN 等人(1988)提出了一种补充数据法,这是一种将截尾样本补充成完全样本的一种迭代方法,我们将此法推广用于 Multiple 截尾样本进行缺失数据补充,得到伪完全样本,在此基础上可以用完全样本的方法作有约束的估计.

参考文献:

[1] BAIN L J, ENGELHARDT M. Statistical analysis of reliability and life-testing modles[M]. Theory and Methods, Marcel Dekker, New York, 1991.

[2] BALASUBRAMANIAN K, BALAKRISHNAN N. Estimation for one-and two-parameter exponential distributions under multiple type-II censoring[J]. Statistical Papers, 1992, 33: 203-216.

[3] BALAKRISHNAN N. On the maximum likelihood estimation of the location and scale parameters of exponetial distribution based on multiply Type-II censored samples[J]. J Appl Statist, 1990, 17: 55-61.

[4] FEI H, KONG F. Interval estimations for one- and two-parameter exponetial distributions under multiple type II censoring[J]. Commun Statist Theory and Meth, 1994, 23: 1717-1733.

[5] GABLER S, WOLFF C. A quick and easy approximation to the distribution of a sum of Weighted Chi-square variables[J]. Statistical papers, 1987, 28: 317-323.

[6] KAMPS U. Characterizations of the exponential distribution by weighted sums of iid randon variables[J]. Statistical papers, 1990, 31: 233-237.

[7] FEI H, KONG F, TANG Y. Estimation for two-parameter Weibull distribution and extreme-value distribution under multiply Type-II censoring[J]. Commun Statist Theory and Meth, 1995, 24: 2087-2104.

[8] BALAKRISHNAN N, GUPTA S S, PANCHAPAKESAN S. Estimation of the mean and standard deviation of the normal distribution based on multiply Type-II censored samples[M]. J Ital Statist Soc, 1995.

[9] 赵培东. 对数正态分布场合下恒定应力加速寿命试验的多重 Type-II 截尾样本的 AMLE[D]. 上海师范大学数学科学学院硕士论文,1999.

[10] HALPERIN M. Maximun likelihood estimation in truncated samples[J]. Ann Math Statist, 1952, 23: 226-238.

[11] BHATTACHARYYA G K. The asymptotics of maximum likelihood and related estimators based on Type II

censored data[J]. J Am Statist Assoc, 1995, 80: 398-404.

[12] KONG F, FEI H. Limit theorems for the maximum likelihood estimate under general multiply type II censoring [J]. Ann Inst Statist Math, 1996, 48(4): 731-755.

[13] JIN C, PAL N. A note on the location parameters of two exponential distributions under order restrictions[J]. Comm Statist Theory Methods, 1991, 20(10): 3147-3158.

[14] PAL N, KUSHARY D. On order restricted location parameters of two exponential distributions[J]. Statist Decisions, 1992, 10: 133-152.

[15] 沈亦可,费鹤良. 位置参数有序的两个两参数指数分布在 Type-II 截尾样本下的参数估计[A]. 全国第五届可靠性学术会议论文集[C]. 北京:机械工业出版社,1995.

[16] 汤银才. 二参数指数分布有序约束位置参数的保序估计[J]. 上海师范大学学报(自然科学版),1995(2).

[17] 汤银才. 基于 Gibbs 抽样带约束参数指数分布的 Bayes 统计推断[A]. 全国第五届可靠性学术会议论文集[C]. 北京:机械工业出版社,1995,58-60.

[18] 汤银才. 指数分布场合多总体带约束参数的估计与比较[J]. 数理统计与管理(增刊),1997,101-104.

[19] SHEN Y, FEI H. Estimating of order-restricted location parameters of two exponential distributions under multiple type II censoring[J]. Appl Math JCU, 1999, 14: 51-56.

[20] WHITTEN B J, COHEN A C, SUNDARAIYER V. A pseudoe complete technique for estimation from censored Samples[J]. Commun Statist Theory Meth, 1988, 17(7): 2239-2258.

Statistical Methods for Multiple Type-II Censoring

FEI He-liang

(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Multiply type-II censoring samples occur frequently in practice. In the past ten years, statistical methods have been studied by many researchers. We give an overview of the results about the statistiocal methods for the multiple type-II censoring.

Key words: multiple type-II; exponential; Weibull distribution; MLE; interval estimate