第31卷第3期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 31, No. 3
2002年9月 Journal of Shanghai Teachers University(Natural Sciences) Sep. 2002

关于给定偶图的圈长分布的计算

施永兵

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘　要：阶为 ν 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1, c_2, \cdots, c_\nu)$，其中 c_i 是 G 中长为 i 的圈的数目．得到了计算给定简单偶图 G 的圈长分布的公式．

关键词：偶图；圈长分布；计算

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2002)03-0018-03

阶为 ν 的图 G 的圈长分布是序列 $(c_1, c_2, \cdots, c_\nu)$，其中 c_i 是 G 中长为 i 的圈的数目．计算给定图 G 的圈长分布是一个很困难的问题，即使计算图 G 的 Hamilton 圈还是一个未解决的问题[1]．在文[2]和文[3]中，作者给出了计算给定图和给定偶图的 Hamilton 圈数公式．本文将推广这些公式，给出计算给定偶图的圈长分布的一般公式．

设 G 是简单偶图且 $V(G) = X \cup Y$ 使 G 的每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中．本文约定 $|X| = |Y| = n$．令 $\bar{G} = K_{n,n} - E(G)$，$|E(\bar{G})| = k$ 且 $H \subseteq \bar{G}$，$|E(H)| = j$．用 $\mu(H)$ 表示 $K_{n,n}$ 中包含 H 的所有边的长为 $2m$ 的圈数．

若 $\Delta(H) \geqslant 3$ 或 H 是一个长小于 $2m$ 的圈，则易知 $\mu(H) = 0$；若 H 是长为 $2m$ 的圈，则 $\mu(H) = 1$．若 $\Delta(H) \leqslant 2$ 且 H 不是圈，则 H 的每个连通分支均是路．为了方便我们将长为奇数的路称为奇路，长为偶数($\neq 0$)的路称为偶路，并设 H 中有 p 条奇路和 q 条偶路，且有 q_1 条偶路的端点在 X 中，这样的 H 被称为 $\bar{G}$ 的一个 (j, p, q, q_1) 子图．以下计算 $\mu(H)$．

容易计算 $|V(H) \cap X| = \frac{1}{2}(j + p) + q_1$，$|V(H) \cap Y| = \frac{1}{2}(j + p) + q - q_1$，$|X - V(H)| = n - \frac{1}{2}(j + p) - q_1$，$|Y - V(H)| = n - \frac{1}{2}(j + p) - q + q_1$．令 $X_1 \subseteq X - V(H)$ 且 $|X_1| = m - \frac{1}{2}(j + p) - q_1$，$Y_1 \subseteq Y - V(H)$ 且 $|Y_1| = m - \frac{1}{2}(j + p) - q + q_1$．令 $V_1 = V(H) \cup X_1 \cup Y_1$，$G_1 = K_{n,n}[V_1]$．现在计算 G_1 中含 H 的所有边的长为 $2m$ 的圈数．我们把 X_1 中每个顶点看作 X 中的一颗彩珠，端点在 X 中的每条偶路也看作 X 中的一颗彩珠，这样 X 中有 $m - \frac{1}{2}(j + p)$ 颗彩珠；同理，把 Y_1 中每个顶点和端点在 Y 中的每条偶路都看作 Y 中的彩珠，于是 Y 中也有 $m - \frac{1}{2}(j + p)$ 颗彩珠．这 $2[m - \frac{1}{2}(j + p)]$ 颗彩珠穿成珠圈使 X 和 Y 中的彩珠交替地出现在珠圈上的穿法数为

收稿日期：2002-03-24

基金项目：上海市高校科技发展基金(02DK08)．

作者简介：施永兵(1947-)，男，上海师范大学数理信息学院教授．

$$\frac{1}{2}\left[m-\frac{1}{2}(j+p)\right]\cdot\left[\left(m-\frac{1}{2}(j+p)-1\right)!\right]^2.$$

由于每条偶路有两个不同的端点,因此上述穿法数实际应为

$$2^q\cdot\frac{1}{2}\left[m-\frac{1}{2}(j+p)\right]\left[\left(m-\frac{1}{2}(j+p)-1\right)!\right]^2$$
$$=2^{q-1}\left[m-\frac{1}{2}(j+p)\right]\left[\left(m-\frac{1}{2}(j+p)-1\right)!\right]^2.$$

当 $p=1$ 时,将 H 中唯一的奇路看作一颗固定的彩珠,将它插入到已穿成珠圈的 $2(m-\frac{1}{2}(j+p))$ 个位置上,得到不同的珠圈数为 $2^q[(m-\frac{1}{2}(j+p))!]^2$.

当 $p>1$ 时,把 H 中余下的 $p-1$ 条奇路也看作彩珠,虽然每条奇路有两个端点,但因在偶图中,这些奇路的端点已在 X 和 Y 中固定,所以每条奇路看作一颗普通的彩珠. 现把这些彩珠($p-1$ 颗)进行全排列,然后分成 i 组嵌入到已穿成珠圈的 $2[m-\frac{1}{2}(j+p)]+1$ 颗彩珠之间(共有 $2[m-\frac{1}{2}(j+p)]+1$ 个位置)的 i 个位置上的方法数有

$$\left[\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-2}{i-1}\binom{2m-(j+p)+1}{i}\right](p-1)!$$

因此 G_1 中含 H 的所有边的长为 $2m$ 的圈数为

$$2^q\cdot\left[\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-2}{i-1}\binom{2m-(j+p)+1}{i}\right][(p-1)!]\cdot\left[\left(m-\frac{1}{2}(j+p)\right)!\right]^2.$$

由于从 $X-V(H)$ 的 $n-\frac{1}{2}(j+p)-q_1$ 个顶点中取出 $m-\frac{1}{2}(j+p)-q_1$ 个顶点构成集合 X_1 的方法数为 $\binom{n-\frac{1}{2}(j+p)-q_1}{m-\frac{1}{2}(j+p)-q_1}$,而从 $Y-V(H)$ 的 $n-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1$ 个顶点中取出 $m-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1$ 个顶点构成集合 Y_1 的方法数为 $\binom{n-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1}{m-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1}$

所以

$$\mu(H)=2^q\binom{n-\frac{1}{2}(j+p)-q_1}{m-\frac{1}{2}(j+p)-q_1}\binom{n-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1}{m-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1}\cdot$$
$$\left[\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-2}{i-1}\binom{2m-(j+p)+1}{i}\right][(p-1)!]\cdot\left[\left(m-\frac{1}{2}(j+p)\right)!\right]^2$$

用 $N(j,p,q,q_1)$ 表示 $\bar{G}$ 中 (j,p,q,q_1) 子图的数目. 定义 $N(0,0,0,0)=1$ 且用 $c_{2m}(G)$ 表示 G 中长为 $2m$ 的圈数,$c_{2m}(\bar{G})$ 表示 $\bar{G}$ 中长为 $2m$ 的圈数. 令 $S_j=\{H\mid H\subseteq\bar{G}$ 且 $|E(H)|=j\}$. 应用容斥原理得到

$$c_{2m}(G)=\sum_{j=0}^{\min\{2m,k\}}(-1)^j\sum_{H\in S_j}\mu(H)=$$
$$\sum_{j=0}^{\min\{2m-1,k\}}(-1)^j\sum_{p=0}^{j}\sum_{q=0}^{[j/2]}\sum_{q_1=0}^{q}N(j,p,q,q_1)2^q\binom{n-\frac{1}{2}(j+p)-q_1}{m-\frac{1}{2}(j+p)-q_1}\binom{n-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1}{m-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1}\cdot$$

$$\left[\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-2}{i-1}\binom{2m-(j+p)+1}{i}\right][(p-1)!]\cdot[(m-\frac{1}{2}(j+p))!]^2+c_{2m}(\overline{G}).$$

综合上述讨论,得到下述定理.

定理 设简单偶图 G 的圈长分布为 $(c_1,c_2,\cdots,c_{2n})$,则当 $m=2,3,\cdots,n$ 时,有

$$c_{2m}=c_{2m}(\overline{G})+\sum_{j=0}^{\min\{2m+1,k\}}(-1)^j\sum_{p=0}^{j}\sum_{q=0}^{[j/2]}\sum_{q_1=0}^{q}N(j,p,q,q_1)2^q\binom{n-\frac{1}{2}(j+p)-q_1}{m-\frac{1}{2}(j+p)-q_1}\binom{n-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1}{m-\frac{1}{2}(j+p)-q+q_1}\cdot$$

$$\left[\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-2}{i-1}\binom{2m-(j+p)+1}{i}\right][(p-1)!]\cdot[(m-\frac{1}{2}(j+p))!]^2;$$

当 $m=1,2,\cdots,n$ 时,有 $c_{2m-1}=c_2=0$.

其中定义 $N(0,0,0,0)=1$;当 $p=0$ 时,$\left[\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-2}{i-1}\binom{2m-(j+p)+1}{i}\right][(p-1)!]=\frac{1}{2m-(j+p)}$;当 $p=1$ 时,$\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-2}{i-1}\binom{2m-(j+p)+1}{i}=1$.

作为定理的应用,下面用一个例子结束本文.

例 设 $G=K_{n,n}-E(\overline{G})$,其中 $n\geqslant 3$ 和 $\overline{G}\cong C_4\cup K_{n-4}^C$. 试计算 G 的圈长分布.

解 设 G 的圈长分布为 $(c_1,c_2,\cdots,c_{2n})$,则应用定理,立得

$$c_{2m}=\frac{1}{2}\binom{n}{m}^2\cdot m[(m-1)!]^2-4\binom{n-1}{m-1}^2[(m-1)!]^2+$$

$$\left[2\binom{n-2}{m-2}^2(2m-3)+2\binom{n-2}{m-2}\binom{n-1}{m-1}+2\binom{n-1}{m-1}\binom{n-2}{m-2}\right][(m-2)!]^2-$$

$$4\binom{n-2}{m-2}^2[(m-2)!]^2+1,\qquad m=2,3,\cdots,n;$$

$c_{2m+1}=c_2=0$, $m=1,2,\cdots,n$.

特别当 $n=3$ 时,$c_4=0$;当 $n=4$ 时,$c_4=11$.

参考文献:

[1] BERMOND J C. Hamilton Graph, in Selected Topics in Graph Theory[M]. Edited by Beinke and Wilson, 1978, 127-167

[2] 施永兵. 一个给定图中 Hamilton 圈数的计算定理[J]. 数学研究与评论,1986,6(1):173-177.

[3] 施永兵. 关于给定偶图的 Hamilton 圈数的计算[J]. 上海师范大学学报(自然科学版),1987,16(4):1-4.

On Counting the Cycle Length Distribution of a Given Even Graph

SHI Yong-bing

(Mathematical and Science College, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: The cycel length distribution of a graph of order ν is $(c_1,c_2,\cdots,c_\nu)$, where c_i is the number of cycles of length i. In this paper, we derive a formula for counting the cycle length distribution of a given simple even grpah G.

Key words: even graph; cycle length distribution; count