关于 n 阶完全图的 5 色 K_4 问题

方 影,孙庆文

(第二军医大学 数理教研室)

摘 要:设 K_n 是具有 n 个顶点的完全图,$f(n)$ 是满足下列条件的最小正整数:对于任意的正整数 $m \geqslant f(n)$,存在 K_n 的一个 m 边着色,使得 K_n 中的任一个 K_4 至少含5种颜色. Erdös 和 Gyárás

给出了$f(n)$的上下界:$\frac{2}{3}n < f(n) < n$;并且证明了$f(9)=8$.唐在[3]中证明了$f(10)=9$;并且改进了 $f(n)$ 的下界:$f(n) > \frac{2}{3}n+1$.作者进一步改进了 $f(n)$ 的下界:当 $n \geqslant 20$ 时,$f(n) > \frac{1}{8}(6n-5)$,同时证明了$f(11)=10$.

关键词:花形图;正规花形图;5 色 K_4 条件

中图分类号:O157 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-5137(2004)03-0030-04

0 引 言

设 G 是一个有限、无向的简单图,$V(G)$ 表示 G 的顶点集,$E(G)$ 表示 G 的边集,$\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 分别表示 G 的顶点数和边数.如果图 H 满足:$V(H) \subseteq V(G)$,$E(H) \subseteq E(G)$,则称 H 是 G 的一个子图;如果 $V(H)=V(G)$,则称 H 是 G 的一个生成子图.如果 V_1是 $V(G)$ 的一个非空子集,由 V_1导出的 G 的子图记为 $G[V_1]$.如果 E_1是 $E(G)$ 的一个非空子集,由 E_1导出的 G 的子图记为 $G[E_1]$.其他没有出现的术语和记号参见[1]. Paul Erdös 在[2]的问题 12 中提出下列问题:设 K_n 是具有 n 个顶点的完全图,$f(n)$ 是满足下列条件的最小正整数:对于任意的正整数 $m \geqslant f(n)$,存在 K_n 的一个 m 边着色,使得 K_n 中的任一个 K_4 至少含 5 种颜色,求$f(n)$. Erdös 和 Gyárfás 给出了$f(n)$ 的上下界:$\frac{2}{3}n < f(n) < n$,显然要求n满足:$n \geqslant 6$;并且指出,已经证明了$f(9)=8$.唐在[3]中将$f(n)$ 的下界改进为:$f(n) > \frac{2}{3}n+1$,$(n \geqslant 7)$,并且证明了$f(10)=9$;本文进一步改进了 $f(n)$ 的下界:$f(n) > \frac{1}{8}(6n-5)$,$(n \geqslant 20)$,同时证明了$f(11)=10$,即文中的定理 1 和定理 2.

1 基本概念和引理

下面的几个定义和引理均引自[3].

定义 1([3] 定义 1) 设 K_n 是具有 n 个顶点的完全图,m 是一个正整数,如果存在 K_n 的一个 m 边着色,使得 K_n 中的任一个 K_4 至少含 5 种颜色,则称 K_n 关于 m 满足 5 色 K_4 条件,相应的 m 边着色称为满

收稿日期: 2003-09-27

作者简介:方 影(1965-),女,第二军医大学数理教研室副教授.

足5色 K_4 条件的 m 边着色.

按照定义1，$f(n)$ 即为使 K_n 满足5色 K_4 条件的最小正整数.为了方便起见，我们称求 $f(n)$ 的问题为 n 阶完全图的5色 K_4 问题.

定义2（[3] 定义2）　设图G有一个 m 边着色，$u \in V(G)$，如果存在 $v \in V(G)$，使得 $uv \in E(G)$，并且 uv 着色 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$，则称色 i 在顶点 u 上表现，并记为 $uv = i$.

定义3（[3] 定义3）　设 $T_i = uv_i w_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 n 个三角形，由上述 n 个三角形关于顶点 u 粘合而成的图，称为具有 n 片花瓣的花形图，（简称为 n 瓣花形图）记为 F，顶点 u 称为花心，$T_i = uv_i w_i$ 称为花瓣，边 uv_i 和 uw_i 称为花的内边，简称为内边，边 $v_i w_i$ 称为花的外边，简称为外边.

设 F 是具有 n 片花瓣的花形图，显然，$F = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$，$\nu(F) = 2n + 1$，$\varepsilon(F) = 3n$.

定义4（[3] 定义4）　设 $F = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$ 是具有 n 片花瓣的花形图，$T_i = uv_i w_i$ 是一片花瓣，如果 T_i 的两条内边都着相同的颜色，即 $uv_i = uw_i$，则称 T_i 是一片正规花瓣；如果对于 F 的每一片花瓣 $T_i(i = 1,2,\cdots,n)$，都是正规花瓣，则称 F 是一个正规花形图.

引理1（[3] 引理1）　设 m 是一个正整数，K_n 是 n 个顶点的完全图，并进行了 m 边着色，如果 K_n 关于上述 m 边着色满足5色 K_4 条件，那么：

(1)对于任一种颜色 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$，在 K_n 的每一个顶点上至多表现两次；

(2)对任意 $u \in V(K_n)$，$T = uvw$ 是一片以 u 为花心的正规花瓣，设 $uv = uw = i$，$vw = j$，则 $i \neq j$，并且 i 和 j 都不能再一次在 u,v,w 中的任意一个顶点上表现.

引理2（[3] 引理2）　设 m 是一个正整数，K_n 是 n 个顶点的完全图，并进行了 m 边着色，如果 K_n 关于上述 m 边着色满足5色 K_4 条件，那么每一种颜色至多着色 K_n 的 $\left[\frac{2}{3}n\right]$ 条边.

引理3（[3] 引理3）　设 K_n 是 n 个顶点的完全图，m 是一个正整数（$m \leqslant n - 2$），那么对于 K_n 的任何一个满足5色 K_4 条件的 m 边着色，下列结论成立：

(1)对于任意的 $u \in V(K_n)$，存在以 u 为花心的2瓣正规花形图，且2条外边具有相同的边着色；

(2)设 F_1 和 F_2 是两个2瓣正规花形图，花心分别为 u_1 和 u_2（$u_1 \neq u_2$），并且4条外边具有相同的边着色，则 F_1 和 F_2 是不相交的.

2　下界的改进

定理1　设 K_n 是 n 个顶点的完全图，$m = \left[\frac{1}{8}(6n - 5)\right]$，那么当 $n \geqslant 6$ 时，K_n 关于 m 不满足5色 K_4 条件，即有 $f(n) > \frac{1}{8}(6n - 5)$，并且 $\frac{1}{8}(6n - 5) > \frac{2}{3}n + 1$ 当且仅当 n ⩾ 20.

证明　考察 K_n 的任一 m 边着色，设 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ 是 K_n 的一个 m 边色分类.如果 K_n 关于该 m 边着色满足5色 K_4 条件，按引理2，对每一个 E_i，都有 $|E_i| \leqslant \left[\frac{2}{3}n\right](i = 1,2,\cdots,m)$，从而 K_n 中最多可着色边数为 $m \times \left[\frac{2}{3}n\right]$，而 $\varepsilon(G) = \frac{n(n-1)}{2}$.下面对 n 分12种情况讨论：

(1) $n = 12k$，则 $m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k - 1)8k$，$\varepsilon(G) = 6k(12k - 1)$.有 $m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$，即满足5色 K_4 条件的 m 边着色不存在.

(2) $n = 12k + 1$，则 $m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k)(8k)$，$\varepsilon(G) = 6k(12k + 1)$.故 $m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(3) $n = 12k + 2$，则 $m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = 9k(8k + 1)$，$\varepsilon(G) = (6k + 1)(12k + 1)$.有 $m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(4) $n = 12k + 3$,则$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k+1)(8k+2)$,$\varepsilon(G) = (6k+1)(12k+3)$.有$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(5) $n = 12k + 4$,则$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k+2)(8k+2)$,$\varepsilon(G) = (6k+2)(12k+3)$.有$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(6) $n = 12k + 5$,则$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k+3)(8k+3)$,$\varepsilon(G) = (6k+2)(12k+5)$.有$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(7) $n = 12k + 6$,则$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k+3)(8k+4)$,$\varepsilon(G) = (6k+3)(12k+5)$.有$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(8) $n = 12k + 7$,则$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k+4)(8k+4)$,$\varepsilon(G) = (6k+3)(12k+7)$.有$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(9) $n = 12k + 8$,则$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k+5)(8k+5)$,$\varepsilon(G) = (6k+4)(12k+7)$.有$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

将$n = 12k + 9$的情况放在最后讨论.

(10) $n = 12k + 10$,则$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k+6)(8k+6)$,$\varepsilon(G) = (6k+5)(12k+9)$.有$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(11) $n = 12k + 11$,则$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] = (9k+7)(8k+7)$,$\varepsilon(G) = (6k+5)(12k+11)$.有$m \times \left[\frac{2}{3}n\right] < \varepsilon(G)$.

(12) $n = 12k + 9$.如果K_n有一个满足5色K_4条件的m边着色,注意到当$n \geqslant 6$时,有$m \leqslant \frac{1}{8}(6n - 5) \leqslant n - 2$,因此按引理3(1),对于$K_n$的$n$个顶点相应的有$n$个2瓣正规花形图,且每一个的外边都具有相同的颜色.由于$n > m$,所以至少有两个2瓣正规花形图的外边具有相同的颜色,设为F_1和F_2,它们的外边同着1号色,由引理3(2)知F_1和F_2是不相交的,所以$\nu(F_1 \cup F_2) = 10$,因此K_n中还有$n - 10$个顶点,再结合引理1和引理2,1号色在K_n中着色的边数最多为:$4 + \left[\frac{2}{3}(n-10)\right] = 8k + 3$.而其余的颜色,每一种最多为$K_n$着色$\left[\frac{2}{3}n\right] = 8k + 6$条.这样,$m$种颜色最多可为$K_n$着$8k + 3 + (m-1)(8k+6) = 8k + 3 + (9k+5)(8k+6) = 72k^2 + 102k + 33$条边,而$\varepsilon(G) = (6k+4)(12k+9) = 72k^2 + 102k + 36$.显然,这是不可能的.

这样,对K_n满足5色K_4条件的m边着色不存在,即$f(n) > m$,故有$f(n) > \frac{1}{8}(6n-5)$.

另一方面,简单计算即可知$\frac{1}{8}(6n-5) > \frac{2}{3}n + 1$当且仅当$n \geqslant 20$. □

因此,定理1的结果要好于[3]中给出的下界.

3 $f(11)$的计算

定理2 $f(11) = 10$.

证明 假定K_{11}有一个满足5色K_4条件的9边着色,按引理3(1),对于K_{11}的11个顶点相应的有11个2瓣正规花形图,且每一个的外边都具相同的颜色.由于是9边色的,所以至少有两个2瓣正规花形图的外边具相同的颜色,设为F_1和F_2,它们的外边同着1号色,由引理3(2)知F_1和F_2是不相交的,所以$\nu(F_1 \cup F_2) = 10$,而$\nu(K_{11}) = 11$,再按引理1(2)可知,此时1号色只能着4条边.由于还有9个外边同色的2瓣正规花形图,但只有8种颜色,因此必定还有2个外边同色的2瓣正规花形图,设为F_3和F_4,它们的外边同着2号色,同样2号色也只能着4条边.此时,还剩下7个外边同色的2瓣正规花形图和7种颜色.如果其中还有两个2瓣正规花形图的外边是同色的,设为F_5和F_6,它们的外边同着3号色,因此3号色也只能着4条边.那么,还剩下6种颜色,按引理2,每种颜色至多可着$\left[\frac{2}{3} \times 11\right] = 7$

条边.所以，K_{11}满足5色K_4条件的9边着色最多可为K_{11}着$7 \times 6 + 3 \times 4 = 54$条边，但$K_{11}$有55条边，这是一个矛盾.所以，对于剩下的7个外边同色的2瓣正规花形图，其外边恰好具有7种颜色.设$F_1 = T_{11} \cup T_{12}$，$F_2 = T_{21} \cup T_{22}$，这里$T_{ij} = u_i v_{ij} w_{ij}$，满足：$v_{ij} w_{ij} = 1$ (i, j=1,2).因为F_1和F_2是2瓣正规花形图，所以$u_i v_{ij} = u_i w_{ij}$，并且$u_i v_{ij} \neq u_i v_{ik} (j \neq k)$.不妨设$u_1 v_{11} = u_1 w_{11} = 3$，$u_1 v_{12} = u_1 w_{12} = 4$.下面再分两种情况讨论.

（1）如果F_2含3号色.设$u_2 v_{21} = u_2 w_{21} = 3$，按引理1(2)，3号色不能再在顶点$u_1, v_{11}, w_{11}, u_2, v_{21}, w_{21}$上表现.因此还剩下5个顶点：$u, v_{12}, v_{22}, w_{12}, w_{22}$，其中$u = K_{11} - (F_1 \cup F_2)$.由于存在外边为3号色的2瓣正规花形图，设为$F$，如果$u$是$F$的花心，那么$F$的外边在$G[v_{12}, v_{22}, w_{12}, w_{22}]$ ($= K_4$)中，而$v_{12} w_{12} = v_{22} w_{22} = 1$，这样$G[v_{12}, v_{22}, w_{12}, w_{22}]$至多含4种颜色，矛盾.因此$u$不是$F$的花心，按对称性可设$v_{12}$是F的花心，由于$v_{12} w_{12} = 1$，按正规花瓣的定义，可知1号色必须再一次的在$v_{12}$上表现，但是按引理1(2)，1号色不能再在顶点$v_{12}$上表现，又产生矛盾.所以此种情况是不可能的.同理，F_2也不含4号色.

（2）F_2不含3号色.设F是外边为3号色的2瓣正规花形图，$F = T_1 \cup T_2$，$T_i = u v_i w_i$，则$v_i w_i = 3 (i = 1,2)$.此时，已有4条边着3号色($u_1 v_{11} = u_1 w_{11} = v_1 w_1 = v_2 w_2 = 3$).由于3号色不能再在下列8个顶点$u_1, v_{11}, w_{11}, u, v_1, w_1, v_2, w_2$上表现，且$\nu(K_{11}) = 11$，所以还剩下3个顶点，相应的导出子图是一个三角形，最多有两条边着3号色，所以K_{11}最多有6条边着3号色.由于F_2也不含4号色，因此可设$u_2 v_{21} = u_2 w_{21} = 5$，$u_2 v_{22} = u_2 w_{22} = 6$.而$F_1$不含5号色和6号色，按对称性，4、5、6号色在$K_{11}$上也最多只能着6条边.而剩下的3种颜色，按引理2，每一种最多着7条边.这样，K_{11}的满足5色K_4条件的9边着色最多可为K_{11}着色的边数为：$3 \times 7 + 4 \times 6 + 2 \times 4 = 53$，这与$K_{11}$有55条边矛盾.

综上所述，对于K_{11}，满足5色K_4条件的9边着色不存在，即$f(11) \geqslant 10$，而$f(11) < 11$，故$f(11) = 10$. □

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. The Macmillan Press, 1976.

[2] ERDÖS P. Some old and new problems in various branches of combinatorics[J]. Discrete Math, 1997, 165/166: 227-231.

[3] 唐明元. 满足5色K_4条件的完全图的边着色[J].上海师范大学学报(自然科学版),2003(3):21-25.

On the five-color K_4 problem of the n-order complete graph

FANG Ying, SUN Qin-wen

(Second Military Medical University, Shanghai 200433, China)

Abstract: Let K_n be a complete graph with n vertices, $f(n)$ the smallest positive integer satisfying the following condition: for any positive integer $m \geqslant f(n)$, there is an m-edge coloring of the K_n such that every K_4 in K_n gets at least 5 colors. Erdös and Gyárfás gave the upper-lower bound of $f(n)$: $\frac{2}{3}n < f(n) < n$ and proved $f(9) = 8$. In [3] Tang proved $f(10) = 9$ and improved the lower bound of $f(n)$: $f(n) > \frac{2}{3}n + 1$. In this paper, we prove $f(11) = 10$ and improve the lower bound of $f(n)$ further: $f(n) > \frac{1}{8}(6n - 5)$ $(n \geqslant 20)$.

Key words: flower graph; normal flower graph; five-color K_4 condition