第29卷第4期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 29. No. 4
2000年12月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Dec. 2000

18-23 (4) O221.1

关于单纯形方法的一点注记

陆宗元
(上海师范大学 数学科学学院，上海 200234)

摘 要：通过高斯-约当消元法，对极小化的标准形式的线性规划问题，求得某个单位矩阵的基 B 对应的基本解，但此基本解既不是原始问题的可行解，也不是对偶问题的可行解．在此情形下作者给出了直接求解某一类线性规划问题的扩充的单纯形法．

关键词：线性规划；单纯形方法；扩充的单纯形法
中图分类号：O221.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-5137(2000)06-0018-06

0 引 言

对极小化的标准形式的线性规划问题，如果约束等式的系数矩阵中已含有一个单位矩阵，但此单位矩阵的基所对应的基本解既不是可行解，也不是对偶可行解，通常的做法是在约束条件中再添加一个人工约束条件，得到原始问题的一个扩充问题，再求解该扩充问题，从而得到原问题的解．下面我们给出在此情形下直接求解某一类原始问题的扩充的单纯形方法．

本文仅对如下极小化的标准形式的线性规划问题(1)进行论述．

$$
\begin{aligned}
\min z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,\cdots,n)
\end{aligned} \qquad (1),
$$

$$
\begin{aligned}
\min z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + a_{1\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& x_2 + a_{2\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \qquad \vdots \\
& x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,\cdots,n)
\end{aligned} \qquad (2).
$$

定义 1 在线性规划的标准形式中，如果约束等式左边的系数矩阵中，含有一个单位矩阵(约束等式右端的常数项不必全大于等于零)则称此线性规划为典则形式的线性规划．

定义 2 $\lambda_j = C_B B^{-1} p_j - c_j$ 称为对应于基 B 的变量 x_j 的检验数．其中 p_j 为变量 x_j 在约

收稿日期：2000-03-02
作者简介：陆宗元(1944-)，男，上海师范大学数学科学学院副教授．

束等式中的系数列向量，c_j 为 x_j 在原始问题的目标函数中的系数.

定义 3　对应于基 B 所有变量的检验数 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$ 都小于等于零，则此基 B 对应的基本解称为正则解，此时基 B 称为对偶可行基.

1　主要结果

若原始线性规划问题已化为(2)的典则形式，为了简单起见，不妨设基变量为 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$，且典则形式中的系数仍用 a_{ij} 和 b_j 来表示.

定理 1　在标准形式的线性规划问题(1)中，若某个 $b_t<0$ 而所有的 $a_{tj}\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)$ 则该线性规划问题无可行解.

证明（反证法）　设该线性规划有可行解 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\geqslant 0$，代入标准形式的线性规划问题(1)中第 t 个等式 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{tj}x_j=b_t$，其等式的左边 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{tj}x_j^0\geqslant 0$，这与 $b_t<0$ 矛盾.

∴ 该线性规划问题没有可行解. 类似地可以证得当 $b_t>0$，而所有的 a_{tj} 时，该线性规划问题也无可行解.　□

定理 2　在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中，若 $b_t<0$，而某一个非基变量 x_k 的系数 $a_{tk}\geqslant 0$，则以非基变量 x_k 代替任一基变量 $x_l(l\in\{1,2,\cdots,m\})$，而其余的基变量不变，得到的新基 $\bar{B}$ 必为不可行基.

证明　情形 1　$a_{tk}=0$：则以任一个不等于零的 a_{pk}，$p\in\{1,2,\cdots,t-1,t+1,\cdots,m\}$ 为主元作旋转运算，所得到的新基 $\bar{B}$ 对应的基本解显然是不可行解.

情形 2　$a_{tk}>0$：

(1) 若以 a_{tk} 为主元作旋转运算，得到新基 $\bar{B}$ 及对应的基本解

$$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_{t-1},\bar{x}_k,\bar{x}_{t+1},\cdots,\bar{x}_m,0,\cdots,0)，\text{其中 }\bar{x}_k=\frac{b_t}{a_{tk}}<0,$$

∴ $\bar{x}$ 不是可行解，因此新基 $\bar{B}$ 不是可行基.

(2) 若 $a_{lk}=0\ (l\neq t)$：则以非基变量 x_k 代替基变量 x_l，其余的基变量不变，得到的这组变量，不构成基变量，因为矩阵 $\bar{B}=(P_1,P_2,\cdots,P_{l-1},P_k,P_{l+1},\cdots,P_m)$ 对应的行列式的值为零，所以 $\bar{B}=(P_1,P_2,\cdots,P_{l-1},P_k,P_{l+1},\cdots,P_m)$ 不构成一个基，当然 $\bar{B}$ 不是可行基.

(3) 若 $a_{lk}\neq 0\ (l\neq t)$：则以 a_{lk} 为主元作旋转运算，由非基变量 x_k 代替基变量 x_l 得到新基 $\bar{B}$ 及对应的基本解 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_{l-1},\bar{x}_k,\bar{x}_{l+1},\cdots,\bar{x}_m,0,\cdots,0)$，

(a) 若 $b_l=0$：∵ $\bar{x}_t=b_t<0$，∴ $\bar{x}$ 不是可行解.

(b) 若 $b_l<0$：(i) 当 $a_{lk}>0$ 时 ∵ $\bar{x}_k=\dfrac{b_l}{a_{lk}}<0$，∴ $\bar{x}$ 不是可行解.

(ii) 当 $a_{lk}>0$ 时 ∵ $\bar{x}_t=b_t-\dfrac{b_l}{a_{lk}}a_{tk}<b_t<0$，∴ $\bar{x}$ 不是可行解.

(c) 若 $b_l>0$：(i) 当 $a_{lk}<0$ 时 ∵ $\bar{x}_t=b_t-\dfrac{b_l}{a_{lk}}a_{tk}<b_t<0$，∴ $\bar{x}$ 不是可行解.

(ii) 当 $a_{lk}<0$ 时 ∵ $\bar{x}_k=\dfrac{b_l}{a_{lk}}<0$，∴ $\bar{x}$ 不是可行解.

综上所述当 $a_{ik}\neq 0$ 时以 a_{ik} 为主元作旋转运算，得到的新基 $\bar{B}$ 不是可行基. □

定理 3 在典则形式的线性规划问题(2)对应的单纯形表中，对小于零的所有常数 b_i，存在某个 k，都有 $a_{ik}<0$，设 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\middle| b_i<0,\ a_{ik}<0\right\}=\frac{b_r}{a_{rk}}$，$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\middle| b_i\geqslant 0,\ a_{ik}>0\right\}=\frac{b_p}{a_{pk}}$.

(1) 若 $\frac{b_r}{a_{rk}}\leqslant\frac{b_p}{a_{pk}}$ 则以非基变量 x_k 代替基变量 x_p(或 x_r) 得到的新基 $\bar{B}$ 必为可行基.

(2) 若 $\frac{b_r}{a_{rk}}>\frac{b_p}{a_{pk}}$ 则以非基变量 x_k 代替任一基变量 x_t，$t\in\{1,2,\cdots,m\}$，得到的新基 $\bar{B}$ 必为不可行基.

证明 (1) $\frac{b_r}{a_{rk}}\leqslant\frac{b_p}{a_{pk}}$.

情形 1 以 a_{pk} 为主元作旋转运算，从而由非基变量 x_k 代替基变量 x_p 得到新基 $\bar{B}$ 及相应的基本解 $\bar{x}=(\bar{x}_{j1},\bar{x}_{j2},\cdots,\bar{x}_{jm},0,\cdots,0)$.

$$\bar{x}_{jp}=\frac{b_p}{a_{pk}}\geqslant 0\ (\because b_p\geqslant 0,\ a_{pk}>0).$$

(a) 若 $b_i<0\ (i\neq p)$：由题设 $a_{ik}<0$，且 $\frac{b_i}{a_{ik}}\leqslant\frac{b_r}{a_{rk}}\leqslant\frac{b_p}{a_{pk}}\Rightarrow b_i\geqslant\frac{b_p}{a_{pk}}a_{ik}$，

$$\therefore\ \bar{x}_{ji}=b_i-\frac{b_p}{a_{pk}}a_{ik}\geqslant 0.$$

(b) 若 $b_i\geqslant 0(i\neq p)$：(i) 设 $a_{ik}>0$，$\because\ \frac{b_i}{a_{ik}}\geqslant\frac{b_p}{a_{pk}}$，$b_i\geqslant\frac{b_p}{a_{pk}}a_{ik}$，

$$\therefore\ \bar{x}_{ji}=b_i-\frac{b_p}{a_{pk}}a_{ik}\geqslant 0.$$

$$\text{(ii) 设 } a_{ik}\leqslant 0,\ \bar{x}_{ji}=b_i-\frac{b_p}{a_{pk}}a_{ik}\geqslant b_i\geqslant 0.$$

情形 2 以 a_{rk} 为主元作旋转运算，从而由非基变量 x_k 代替基变量 x_r 得到新基 $\bar{B}$ 及相应的基本解 $\bar{x}=(\bar{x}_{j1},\bar{x}_{j2},\cdots,\bar{x}_{jm},\cdots,0)$.

$$\bar{x}_{jr}=\frac{b_r}{a_{rk}}>0\ (\because b_r<0,\ a_{rk}<0).$$

(a) 若 $b_i<0\ (i\neq r)$：由题设 $a_{ik}<0$，$\frac{b_i}{a_{ik}}\leqslant\frac{b_r}{a_{rk}}$，$b_i\geqslant\frac{b_r}{a_{rk}}a_{ik}$，

$$\therefore\ \bar{x}_{ji}=b_i-\frac{b_r}{a_{rk}}a_{ik}\geqslant 0,\ i\in\{1,2,\cdots,r-1,r+1,\cdots,m\}.$$

(b) 若 $b_i\geqslant 0\ (i\neq r)$：

(i) 设 $a_{ik}>0$，$\because\ \frac{b_i}{a_{ik}}\geqslant\frac{b_p}{a_{pk}}\geqslant\frac{b_r}{a_{rk}}\Rightarrow b_i\geqslant\frac{b_r}{a_{rk}}a_{ik}$，

$$\therefore\ \bar{x}_{ji}=b_i-\frac{b_r}{a_{rk}}a_{ik}\geqslant 0.$$

(ii) 设 $a_{ik}\leqslant 0$，$\bar{x}_{ji}=b_i-\frac{b_r}{a_{rk}}a_{ik}\geqslant b_i\geqslant 0\ (\because b_r<0,\ a_{rk}<0)$.

综合上述两种情形 $\bar{x}=(\bar{x}_{j1},\bar{x}_{j2},\cdots,\bar{x}_{jm},0,\cdots,0)$ 是可行解，故新基 $\bar{B}$ 为可行基.

证明 (2) $\frac{b_r}{a_{rk}}>\frac{b_p}{a_{pk}}$.

若 $a_{tk} \neq 0$ 则以非基变量 x_k 代替任一基变量 x_t，$t \in \{1,2,\cdots,m\}$ 可得到新基 $\bar{B}$，此时以 a_{tk} 为主元作旋转运算可得到相应的解

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{t-1}, \bar{x}_k, \bar{x}_{t+1}, \cdots, \bar{x}_m, 0, \cdots, 0),$$

(a) 若 $x_t = x_r$；此时以 a_{rk} 为主元作旋转运算，$\because \dfrac{b_r}{a_{rk}} > \dfrac{b_p}{a_{pk}}$，$a_{pk} > 0$，$\therefore b_p < \dfrac{b_r}{a_{rk}} a_{pk}$，因此 $\bar{x}_p = b_p - \dfrac{b_r}{a_{rk}} a_{pk} < 0$，故 $\bar{x}$ 不是可行解，$\bar{B}$ 不是可行基.

(b) 若 $x_t = x_p$；此时以 a_{pk} 为主元作旋转运算，$\because \dfrac{b_r}{a_{rk}} \geqslant \dfrac{b_p}{a_{pk}}$，$a_{rk} < 0$，$\therefore b_r < \dfrac{b_p}{a_{pk}} a_{rk}$，因此 $\bar{x}_r = b_r - \dfrac{b_p}{a_{pk}} a_{rk} < 0$，故 $\bar{x}$ 不是可行解，$\bar{B}$ 不是可行基.

(c) 若 $x_t \neq x_r$ 且 $x_t \neq x_p$；

(i) 设 $b_t < 0$；由题设 $a_{tk} < 0$，$\because \dfrac{b_t}{a_{tk}} < \dfrac{b_r}{a_{rk}}$，$a_{rk} < 0$，$\therefore b_r < \dfrac{b_t}{a_{tk}} a_{rk}$，因此 $\bar{x}_r = b_r - \dfrac{b_t}{a_{tk}} a_{rk} < 0$，故 $\bar{x}$ 不是可行解，$\bar{B}$ 不是可行基.

(ii) 设 $b_t > 0$；① $a_{tk} > 0$；$\because \dfrac{b_t}{a_{tk}} > \dfrac{b_p}{a_{pk}}$，$a_{pk} > 0$，$\therefore b_p < \dfrac{b_t}{a_{tk}} a_{pk}$，因此 $\bar{x}_p = b_p - \dfrac{b_t}{a_{tk}} a_{pk} < 0$，故 $\bar{x}$ 不是可行解，$\bar{B}$ 不是可行基.

② $a_{tk} < 0$；$\bar{x}_t = \dfrac{b_t}{a_{tk}} < 0$，故 $\bar{x}$ 不是可行解，$\bar{B}$ 不是可行基.

(iii) 设 $b_t = 0$；$\bar{x}_r = b_r - \dfrac{b_t}{a_{tk}} a_{rk} = b_r < 0$，故 $\bar{x}$ 不是可行解，$\bar{B}$ 不是可行基.

综上所述，若 $\dfrac{b_r}{a_{rk}} \geqslant \dfrac{b_p}{a_{pk}}$，则以非基变量 x_k 代替任一基变量 x_t 得到的新基 $\bar{B}$ 必为不可行基. □

推论 1　在典则形式的线性规划问题(2)中，若所有的常数 b_i 都小于零，且都有 $a_{ik} < 0$ $(i = 1,2,\cdots,m)$，设 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \dfrac{b_i}{a_{ik}} \middle| b_i < 0, a_{ik} < 0 \right\} = \dfrac{b_r}{a_{rk}}$，则以非基变量 x_k 代替基变量 x_r 得到的新基 $\bar{B}$ 必为可行基.

推论 2　在典则形式的线性规划问题(2)中，若所有的常数 $b_i \geqslant 0$ $(i = 1,2,\cdots,m)$，设 $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \dfrac{b_i}{a_{ik}} \middle| b_i \geqslant 0, a_{ik} > 0 \right\} = \dfrac{b_p}{a_{pk}}$，则以非基变量 x_k 代替基变量 x_p 得到的新基 $\bar{B}$ 必为可行基.

2　应用举例

例 1　求解下列线性规划：

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 3x_1 - x_2 \geqslant 3 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

解 先化为典则形式的线性规划

$$\min_{s.t.} z = x_1 - 2x_2$$
$$-3x_1 + x_2 + x_3 = -3$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1 - x_2 + x_5 = 3$$
$$x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,\cdots,5).$$

表 1 例 1 的迭代过程

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-3^*	1	1	0	0	-3
x_4	1	1	0	1	0	4
x_5	1	-1	0	0	1	3
λ_j	-1	2	0	0	0	0
x_1	1	$-1/3$	$-1/3$	0	0	1
x_4	0	$4/3^*$	1/3	1	0	3
x_5	0	$-2/3$	1/3	0	1	2
λ_j	0	5/3	$-1/3$	0	0	1
x_1	1	0	$-1/4$	1/4	0	7/4
x_2	0	1	1/4	3/4	0	9/4
x_5	0	0	1/2	1/2	1	7/2
λ_j	0	0	$-3/4$	$-5/4$	0	$-11/4$

$$\because \max_{1\leqslant i\leqslant 3}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\,\middle|\, b_i < 0,\ a_{ik} < 0\right\} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{-3}{-3} = 1,$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\,\middle|\, b_i > 0,\ a_{ik} > 0\right\} = \min\left\{\frac{b_2}{a_{21}},\frac{b_3}{a_{31}}\right\} = \min\left\{\frac{4}{1},\frac{3}{1}\right\} = 3,\ \text{而}\ 1 < 3,$$

∴ 由定理 3 可知第一次迭代应将非基变量 x_1 代替基变量 x_3(或 x_5),在此以 $a_{11} = -3$ 为主元作旋转运算. 第二次迭代就是单纯形迭代, 以 $\bar{a}_{22} = 4/3$ 为主元作旋转运算. 具体迭代过程见表 1.

由表 1 最后的单纯形表可知最优解为 $x_1 = 7/4$, $x_2 = 9/4$, 最优值 $z^* = -11/4$.

例 2 求解下列线性规划:

$$\min_{s.t.} z = x_1 - x_2 + x_3$$
$$3x_1 - 3x_2 - x_3 \geqslant 15$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant 9$$
$$x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,3).$$

解 先化为典则形式的线性规划

$$\min_{s.t.} z = x_1 - x_2 + x_3$$
$$-3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -15$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = -9$$

$$x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,\cdots,5).$$

表 2　例 2 的迭代过程

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	-3	3	1	1	0	-15
x_5	-1^*	-1	2	0	1	-9
λ_j	-1	1	-1	0	0	0
x_4	0	6^*	-5	1	-3	12
x_1	1	1	-2	0	-1	9
λ_j	0	2	-3	0	-1	9
x_2	0	1	$-5/6$	1/6	$-1/2$	2
x_1	1	0	$-7/6$	$-1/6$	$-1/2$	7
λ_j	0	0	$-4/3$	$-1/3$	0	5

$$\because \max_{1\leqslant i\leqslant 2}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| b_i < 0,\ a_{ik} < 0\right\} = \max\left\{\frac{-15}{-3},\frac{-9}{-1}\right\} = 9,$$

$\therefore$ 由推论 1 可知第一次迭代应将非基变量 x_1 代替基变量 x_5，即以 $a_{21} = -1$ 为主元作旋转运算可得到一个基本可行解. 第二次迭代就是单纯形迭代，以 $\bar{a}_{12} = 6$ 为主元作旋转运算. 具体迭代过程见表 2.

由表 2 最后的单纯形表可知最优解为 $x_1 = 7$，$x_2 = 2$，$x_3 = 0$，最优值为 $z^* = 5$.

参考文献：

[1] SRINATH L S. Linear Programming Principles and Applications (Second Edition) [M]. The Macmillan Press Limited, 1982.

[2] 高旅端，陈志，史明仁，等. 线性规划—原理与方法[M]. 北京：北京工业大学出版社，1989.

A Note on the Simplex Method

LU Zong-yuan

(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Presents an expanded simplex method of directly solving a linear programming problem to which the basic solution is neither a feasible solution to the primal problem nor a feasible solution to the dual problem.

Key words: linear problem; simplex method; expanded simplex method