关于平稳随机过程线性内插问题的一个注记

何　声　武

在[1]中讨论了下列平稳随机过程的线性内插问题：

设 $\{x(t), -\infty<t<\infty\}$ 为连续参数平稳随机过程，已经观察到该过程在格子点列上的值 $\{x(nh), -\infty<n<\infty\}$，其中 h 为一固定的正数（称为步长），要求用观察值的线性泛函 ξ 估计过程在非格子点上的值 $x(t)$，$t\neq nh$，$-\infty<n<\infty$，使估计的均方误差 $E|x(t)-\xi|^2$ 达到最小的线性泛函 ξ 称为 $x(t)$ 的最佳线性内插值，记为 $\hat{x}(t)$。$\sigma^2(t)=E|x(t)-\hat{x}(t)|^2$ 称为线性内插误差，由平稳性易见，$\sigma^2(t)$ 是以 h 为周期的函数，且 $\sigma^2(0)=0$。

若平稳随机过程 $\{x(t)\}$ 的谱测度 dF 集中在区间 $\left(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h}\right)$ 上，则有

$$x(t)=\sum_{n\to-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{h}(t-nh)}{\frac{\pi}{h}(t-nh)}x(nh),\quad -\infty<t<\infty$$

这即著名的平稳随机过程的采样定理，这时显然有 $\sigma^2(t)\equiv 0$。[1]中断言上述谱条件对于 $\sigma^2(t)\equiv 0$ 也是必要的（该书的第三章 §6 定理9）："设平稳随机过程 $\{x(t)\}$ 具有谱密度 $f(\lambda)$，则 $\sigma^2(t)\equiv 0$ 的充要条件是 $f(\lambda)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{h},\ \frac{\pi}{h}\right)$之外等于零。"然而这个结论是错误的，即它的必要性部分是不成立的。这篇短文的目的就是纠正这个错误，并给出使 $\sigma^2(t)\equiv 0$ 的正确的谱条件（充要条件）。

$\sigma^2(t)\equiv 0$ 即表示每个 $x(t)$ 可用过程在格子点上的值 $\{x(nh), -\infty<n<\infty\}$ 的线性泛函精确地表示出来。用平稳随机过程理论中惯用的方法，以 H 及 H_h 分别表示由 $\{x(t), -\infty<t<\infty\}$ 及 $\{x(nh), -\infty<n<\infty\}$ 张成的闭线性空间，那么 $\sigma^2(t)\equiv 0$ 即等价于 $H=H_h$。我们用到的有关平稳随机过程的概念及记号都可参照[1]及[2]。

设 $F(\lambda)$ 为平稳随机过程 $\{x(t)\}$ 的谱函数，定义一列 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $F_n(\lambda)$，$-\infty<n<\infty$，如下：

$$F_n(\lambda)=F\left(\frac{\lambda+2n\pi}{h}\right)-F\left(\frac{(2n-1)\pi}{h}\right),\quad \lambda\in[-\pi,\pi]$$

显然，dF_n 是 $[-\pi,\pi)$ 上的一个有限测度，它就是 dF 限制在 $\left[(2n-1)\frac{\pi}{h},(2n+1)\frac{\pi}{h}\right)$ 上的测度平移到 $[-\pi,\pi)$ 上而得到的。

定理　$\sigma^2(t)\equiv 0$ 的充要条件是 $\{dF_n, -\infty<n<\infty\}$ 为 $[-\pi,\pi)$ 上一列互相正交的测度。

证明　设 $0\leqslant\tau<h$，令

$$x_\tau(k)=x(kh+\tau),\quad -\infty<k<\infty。$$

则 $\{x_\tau(k)\}$ 为平稳随机序列：

$$Ex_\tau(k+m)\overline{x_\tau(m)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikh\lambda}dF(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{(2n-1)\frac{\pi}{h}}^{(2n+1)\frac{\pi}{h}}e^{ikh\lambda}dF(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}dF_n(\lambda)$$

即 $\{x_\tau(k)\}$ 的谱函数为 $G(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n(\lambda)$。对 $0<\tau<h$，

$$Ex_\tau(k+m)\overline{x_0(m)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(kh+\tau)\lambda}dF(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}e^{i\tau\frac{\lambda+2n\pi}{h}}dF_n(\lambda)$$

所以 $\{x_\tau(k)\}$ 与 $\{x_0(k)\}$ 平稳相关，且交互谱函数为

$$G_\tau(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\lambda}e^{i\tau\frac{\lambda+2n\pi}{h}}dF_n(\lambda)$$

我们的线性内插问题相当于 $\{x_\tau(k)\}$ 对于 $\{x_0(k)\}$ 的线性滤波问题，而且观察到的是全部 $\{x_0(k),-\infty<k<\infty\}$。这是最简单的滤波问题，熟知

$$\sigma^2(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\left|\frac{dG_\tau}{dG}\right|^2\right)dG。$$

若 $\{dF_n,-\infty<n<\infty\}$ 为一列 $[-\pi,\pi)$ 上的互相正交的测度，则 $[-\pi,\pi)=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}A_n$，使得 $\{A_n,-\infty<n<\infty\}$ 为一列互不相交的可测集，且测度 dF_n 集中在集合 A_n 上。因此，对 $0<\tau<h$，

$$\frac{dG_\tau}{dG}(\mu)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}I_{A_n}(\mu)e^{i\tau\frac{\mu+2n\pi}{h}}\qquad a.e.\ dG.$$

从而 $\left|\frac{dG_\tau}{dG}\right|=1$，$a.e.\ dG$，$\sigma^2(\tau)=0$，即 $\sigma^2(t)\equiv0$，充分性得证。

设 $Z(\lambda)$ 为平稳随机过程 $\{x(t)\}$ 的随机谱函数，对任意整数 n，令

$$y_n(k)=\int_{(2n-1)\frac{\pi}{h}}^{(2n+1)\frac{\pi}{h}}e^{ik\lambda}dZ(\lambda),\quad -\infty<k<\infty,$$

则 $\{y_n(k)\}$ 为平稳随机序列，且与 $\{x_0(k)\}$ 平稳相关，它的谱函数即 $F_n(\lambda)$。

若 $\sigma^2(t)\equiv0$，即 $H=H_h$，则 $\{y_n(k)\}$ 从属于 $\{x_0(k)\}$（参阅[2]），从而存在 $\varphi_n(\lambda)$，使 $\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_n(\lambda)|^2dG(\lambda)<\infty$，

$$y_n(k)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{jk\lambda}\varphi_n(\lambda)dW(\lambda),\quad -\infty<n,k<\infty,$$

其中 $W(\lambda)$ 为 $\{x_0(k)\}$ 的随机谱函数：

$$W(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[Z\left(\frac{\lambda+2n\pi}{h}\right)-Z\left(\frac{(2n-1)\pi}{h}\right)\right],\quad \lambda\in[-\pi,\pi]。$$

由于 $n\neq m$ 时 $\{y_n(k)\}$ 与 $\{y_m(k)\}$ 正交，因此

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}\varphi_n(\lambda)\overline{\varphi_m(\lambda)}dG(\lambda)=0,\quad -\infty<k<\infty,$$

所以关于 dG 几乎处处 $\varphi_n(\lambda)\overline{\varphi_m(\lambda)}=0$，但

$$F_n(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}|\varphi_n(\lambda)|^2 dG(\lambda), \qquad F_m(\lambda)=\int_{-\pi}^{\lambda}|\varphi_m(\lambda)|^2 dG(\lambda)$$

因此 dF_n 与 dF_m 正交，必要性得证。

现在很容易指出前面引述的[1]中的结论是错误的了。事实上，若平稳过程 $\{x(t)\}$ 的谱密度 $f(\lambda)$ 在 $\left(\frac{\pi}{h},3\frac{\pi}{h}\right)$ 之外都等于零，则由定理可知同样有 $\sigma^2(t)\equiv 0$，利用采样定理还可写出精确的线性内插公式。

参考文献

[1] Hannan, E. J. Multiple Time Series. John-Wiley. New York-London-Sydney-Toronto.(1970)

[2] 何声武：平稳随机函数的线性理论(上海师范大学讲义,1979)

A Note on the Linear Interpolation of Stationary Stochastic Processes

He Sheng-wu

Abstract

In this note we show the following Theorem. Let $\{x(t),\ -\infty<t<\infty\}$ be a continuous parameter stationary stochastic process with spectral function $F(\lambda)$, $h>0$, H and H_h be closed linear spaces spanned by $\{x(t), -\infty<t<\infty\}$ and $\{x(nh),\ -\infty<n<\infty\}$ respectively. Then $H=H_h$ if and only if $\{dF_n, -\infty<n<\infty\}$ is a sequence of mutually perpendicular measures on $[-\pi,\pi)$, where

$$F_n(\lambda)=F\left(\frac{\lambda+2n\pi}{h}\right)-F\left(\frac{(2n-1)\pi}{h}\right), \qquad \lambda\in[-\pi,\pi]$$

By this result we disprove a theorem in [1].