

进入耗散介质的平面 电磁波——纵椭圆偏振波

张 梦 心

摘 要

本文分析了导电物质和有损介质中电磁波的偏振性质,指出在一般情况下,电场或磁场是处于纵椭圆偏振状态。文章还讨论了这类电磁波的传播速度,电场与磁场之间的相位关系以及坡印亭矢量等问题。

一、一般教材中对平面电磁波的讨论

在普通物理电磁学中,有关平面电磁波的内容,一般只讨论在真空或无限均匀介质中的传播性质。根据麦克斯韦方程组,结合具体条件,证明平面电磁波具有下列特点:(1)它是 $\vec{E}, \vec{B}, \vec{v}$ 三者互相垂直的横波 *TEM* 波,(2)场中任意一点的 \vec{E} 和 \vec{B} 在任何时刻都是同位相。(3)坡印亭矢量 \vec{S} 和波的传播方向是一致的。这些性质往往可以用图 1 的瞬时波形来表示。在电动力学中,虽然进一步讨论平面电磁波在导体中的传播性质,但有些教材往往只限于讨论传播方向垂直于界面的情况。根据边界条件,证明了这样传播的电磁波仍然是横波, \vec{S} 的方向与传播方向也是一致的,只是 \vec{E}, \vec{B} 并不同相,并且振幅是随距离作指数衰减(见图 2)。

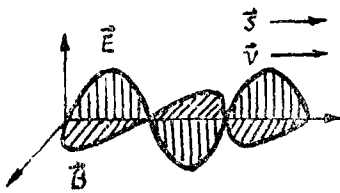


图 1

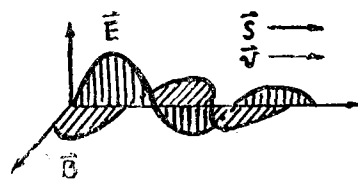


图 2

由于以上二种平面波都是横波,所以不少学生就认为横波是平面电磁波的普遍性质。显然,这样的推论是片面的,因为(1)实际介质都存在介质损耗,虽然在多数情况下可以忽略不计,但在某些情况下必须加以考虑,(2)电磁波进入导体后,除了可以在界面的垂直方向传播外,还可沿任意方向传播。所以为了全面了解平面电磁波的性质,有必要在普通条件下进行分析讨论,这样的讨论,一般说来,往往要涉及较为繁复的数学运算,但我们也可以结合教材中常用的处理方法,采用较为简单的步骤来分析平面电磁波的一般性质。

本文于 1982 年 9 月 20 日收到

二、耗散介质中的不均匀平面波

当电磁波在一般导体中传播时，就会产生传导电流，因此要引进复介电常数 ϵ' ($\epsilon' = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$) 和复波矢 \vec{k}' ($\vec{k}' = \vec{k} + i\vec{s}$)。这类电磁波也存在平面波的解：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\vec{s} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{-\vec{s} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2)$$

由于在一般情况下， \vec{k} 和 \vec{s} 的方向并不一致，所以它的衰减方向和传播方向并不相同，也就是说，虽然它的等相面和等幅面也是平面，但互不平行，这就是所谓“不均匀平面波”。为了确定 \vec{s} 和 \vec{k} ，可以设想有一列平面波以入射角 θ_0 自真空射向导体表面（图3）。根据波矢量的边值关系

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r}$$

就可求出 \vec{k} 和 \vec{s} 的各分量为

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta_0 \quad k_y = 0$$

$$k_z^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\mu \epsilon \omega^2 - \frac{\omega^2}{C^2} \sin^2 \theta_0 \right)^2 + (\mu \sigma \omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\mu \epsilon \omega^2 - \frac{\omega^2}{C^2} \sin^2 \theta_0 \right) \quad (3)$$

$$s_x = 0 \quad s_y = 0$$

$$s_z^2 = s^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\mu \epsilon \omega^2 - \frac{\omega^2}{C^2} \sin^2 \theta_0 \right)^2 + (\mu \sigma \omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\mu \epsilon \omega^2 - \frac{\omega^2}{C^2} \sin^2 \theta_0 \right) \quad (4)$$

因此 (1)(2) 两式可以改写成

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-s_z z} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \quad (5)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{-s_z z} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} \quad (6)$$

(5)(6) 两式说明以任意入射角 θ_0 射向导体的电磁波进入导体以后总是沿着界面的垂直方向衰减，而以折射角 θ ($\theta = \tan^{-1} \frac{k_x}{k_z}$) 在导体中传播。

电磁波在有损耗的介质中传播时，由于在介质极化过程中所产生的阻尼作用以及在某些

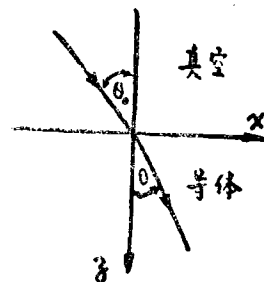


图 3

某些材料的 (ϵ''/ϵ) 值 表 1

材料名称	频 率		
	60	10^6	10^{10}
胶木云母板	0.098	0.036	0.0400
尼 龙	0.018	0.022	0.0110
有 机 玻 璃	0.064	0.014	0.0050
钛 酸 钡	0.056	0.010	0.60
聚 乙 烯	小于 0.0002	小于 0.0002	0.0005
蒸 馏 水	—	0.040	0.200

频率出现的谐振现象都会引起能量的损耗, 所以也需要引入复介电常数 ϵ' ($\epsilon' = \epsilon + j\epsilon''$), 表示介质损耗大小的量 ϵ'' 与材料和频率有关, 当 $\epsilon'' \ll \epsilon$ 时, ϵ'' 可以忽略不计, 但由表 1 可以看出, 某些介质的 ϵ'' 与 ϵ 的比值在一定的频率附近是不能忽略的。

关于介质损耗现象, 可以应用克罗特—济仑兹 (Krude-Lorentz) 的阻尼振子模型* 来分析。当电磁波的频率远离振子的谐振频率时, 电磁波只有少量的损耗, 接近谐振频率时, 就有较强的吸收, 但在整个作用过程中, 带电粒子只在平衡位置附近振动, 对任何一点, 都不会引起宏观的电荷积累, 也就是说, 在任何时刻都能满足 $\rho = 0$ 的条件, 因此有损耗介质和导体中的电磁波方程在形式上是相同的, 可以认为有损耗的介质具有等效电导率 $\sigma = \omega\epsilon''$ 。所以在以下讨论中, 对这二类物质不加区分, 统称为“耗散介质”。

三、不均匀平面波的相速度和偏振状态

根据 (3) 式, 可知由界面进入耗散介质中平面波的折射角 θ 满足下列关系

$$\tan^2\theta = \frac{k_x^2}{k_z^2} = \frac{\frac{\omega^2}{C^2} \sin^2\theta_0}{\frac{1}{2} \left[\left(\mu\epsilon\omega^2 - \frac{\omega^2}{C^2} \sin^2\theta_0 \right)^2 + (\mu\sigma\omega)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\mu\epsilon\omega^2 - \frac{\omega^2}{C^2} \sin^2\theta_0 \right)} \quad (7)$$

上式表明, 折射角的大小, 也即平面波在耗散介质中的传播方向, 不但与入射角 θ_0 有关, 也随电磁波的频率而改变。如果垂直入射 $\theta_0 = 0$, 那么, θ 也为零, 即传播方向与衰减方向一致, 等相面与等幅面重合。在良导体中, 若 $\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon}$, 那么, 不论入射角 θ_0 为多大, θ 也总接近于零。

对于理想介质, 因 $\sigma = 0$, 通过简单换算, 可将 (7) 式化为常见的折射定律 $\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} = n$ 。

不均匀平面波相速的大小可以从下式计算

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \frac{\omega}{k_z \sqrt{1 + \tan^2\theta}}$$

此式表明, 在耗散介质中电磁波相速的大小是与传播方向有关, 而在理想介质中, 它与传播方向无关的。

为了讨论不均匀平面波的偏振状态, 我们先假定入射波的 \vec{B} 矢量垂直于入射面 ($x-z$ 平面), \vec{E} 矢量平行于入射面的线偏振波。根据边界条件, 可知进入耗散介质中的电磁波的 \vec{B} 矢量也必垂直于 $x-z$ 平面, 因而也垂直于波矢的实部分 \vec{k} , 所以不均匀平面波中的 \vec{B} 矢量是横向的。但是进入媒质中的 \vec{E} 矢量具有分量 E_x 和 E_z , 它们应满足关系式 $\vec{k}' \cdot \vec{E} = 0$, 所以

$$k'_x E_x + k'_z E_z = 0$$

由于

$$E_x = E_{0x} e^{-\alpha z} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

$$E_z = E_{0z} e^{-\alpha z} e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$$

因而

$$\frac{E_z}{E_x} = -\frac{k'_x}{k'_z} = -\frac{k_x - i s_x}{k_z + i s_z} = -\frac{k_x}{k_z + i s_z} = m e^{i\phi} \quad (8)$$

* 由该模型导出的色散规律能较好地符合实验结果。

式中
$$m = \frac{k_x}{(k_x^2 + s^2)^{1/2}} \quad \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{s}{k_x}\right) \quad (8')$$

由(8)式可知 E_z 与 E_x 之比是一复数, 表明二者之间存在位相差 ϕ 。假设在某一点的实数振幅为 \mathcal{E}_0 , 那么该点的 E_x 和 E_z 的实数形式为

$$E_x = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

$$E_z = m \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \alpha + \phi)$$

消去上面二式中的变量 t , 就可得 \vec{E} 矢量端点的轨迹方程

$$\frac{\vec{E}_x^2}{\mathcal{E}_0^2} + \frac{E_z^2}{m^2 \mathcal{E}_0^2} - \frac{2E_x E_z}{m \mathcal{E}_0^2} \cos \phi = \sin^2 \phi \quad (9)$$

这是一个平行于 $x-z$ 平面的椭圆方程, 表明进入耗散介质中的 \vec{E} 矢量不再是线偏振波, 而是椭圆偏振波。又因椭圆平面平行于 $x-z$ 平面, 也即平行于波矢量的实数部份 \vec{k} , 所以这样的 \vec{E} 和 \vec{B} 结成的电磁波不再是横波。为了区别于一般介质中具有横波性质的椭圆偏振波, 这类电磁波可称为“纵椭圆偏振波”。

(9)式椭圆方程中存在 $E_x E_z$ 项, 所以它的长短半轴并不分别平行于 x, z 坐标轴, 应用旋转坐标变换, 可以求得椭圆半轴与坐标轴之间夹角 δ 满足下列关系

$$\tan 2\delta = \frac{2m \cos \phi}{1 - m^2} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta + s^2/k_x^2}$$

式中 θ 就是平面波的折射角, 由于

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \tan 2\theta$$

所以 δ 总是小于 θ (图4), 只有当 $s=0$ (理想介质) 及 $\theta=0$ (垂直入射) 的二种情况下, δ 才等于 θ 。

(9)式中椭圆方程的长半轴 a 和短半轴 b 的大小, 可以通过旋转坐标变换证明满足下列关系

$$a^2 = \frac{2m^2 \mathcal{E}_0^2 \sin^2 \phi}{(m^2 + 1) - 2m \cos \phi / \sin 2\delta} \quad (11)$$

$$b^2 = \frac{2m^2 \mathcal{E}_0^2 \sin^2 \phi}{(m^2 + 1) + 2m \cos \phi / \sin 2\delta} \quad (12)$$

以上二式表明 a 和 b 的大小是随 E_z 和 E_x 的振幅以及它们之间的相位差 ϕ 而改变。如果是理想介质, 根据(8)式, $\phi=0$, 再由(12)式或直接可以看出短半轴 $b=0$ 。因此, 纵椭圆偏振波又退化为线偏振横波。振幅 a 的大小, 可利用(8')和(10)式, 化为

$$a^2 = \frac{2m^2 \mathcal{E}_0^2 \sin^2 \phi}{(m^2 + 1) \left[1 - \sqrt{1 - 4 \frac{m^2 \sin^2 \phi}{(m^2 + 1)^2}} \right]}$$

再将分母中根式用级数展开, 并略去 $m^2 \sin^2 \phi$ 的高次项, 就可得

$$a^2 = \frac{2m^2 \mathcal{E}_0^2 \sin^2 \phi}{(m^2 + 1) \left[1 - \left(\frac{2m^2 \sin^2 \phi}{(m^2 + 1)^2} \right) \right]} = \mathcal{E}_0^2 (m^2 + 1) = |E_{0z}|^2 + |E_{0x}|^2$$

这就是线偏振波的振幅与其分量的一般关系式。因此, 我们可以认为表示纵椭圆偏振波的方程式(9)(10)(11)和(12)是适用于任何媒质的。

通过以上分析, 可知 \vec{B} 矢量垂直于入射面的线偏振电磁波进入耗散介质后就成为不均匀

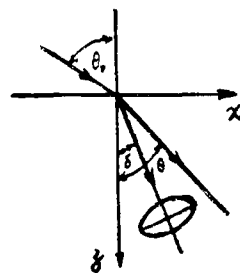


图4

平面波, 它的 \vec{B} 矢量仍是横向的, 但 \vec{E} 矢量却是纵椭圆偏振的, 因此这类电磁波不是 TEM 波, 而是 TM 波。

如果入射波中的 \vec{E} 矢量垂直于入射面, 即 \vec{B} 矢量平行于入射面, 那么, 采用和上面完全类似的步骤后, 可以得到如下结论: 进入耗散介质后的电磁波中的 \vec{E} 矢量仍是线偏振横向的, 但 \vec{B} 矢量都是纵椭圆偏振的。因此, 这类电磁波也不是 TEM 波, 而是 TE 波。

四、不均匀平面波中的 \vec{E} 和 \vec{B} 的相位关系和坡印亭矢量

由于不均匀平面波不是横波, 因此 \vec{E} , \vec{B} 间的相位关系和坡印亭矢量的分析远比理想介质中的电磁波要复杂得多。

(1) 先假定不均匀平面波是 TE 波, 即 $E_x = E_z = 0$, $E = E_y$, 而 \vec{B} 是纵椭圆偏振的。根据 \vec{B} 与 \vec{E} 之间的一般关系 $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k}' \times \vec{E}$, 可得

$$B_x = \frac{1}{\omega} (k'_y E_z - k'_z E_y) = -\frac{1}{\omega} (k'_z E_y) = -\frac{1}{\omega} (k_z + is_z) E = ae^{i\phi_1} E$$

式中
$$a = -\frac{\sqrt{k_z^2 + s_z^2}}{\omega} \quad \phi_1 = \tan^{-1} \frac{s_z}{k_z}$$

$$B_z = \frac{1}{\omega} (k'_x E_y - k'_y E_x) = \frac{1}{\omega} (k_x + is_x) E_y = \frac{1}{\omega} k_x E$$

以上二式说明 \vec{B} 矢量的 B_x 分量与 E 之间有相位差, 而 B_z 分量与 E 是同相位的。

(2) 假定不均匀平面波是 TM 波, 即 $B_x = B_z = 0$, $B = B_y$, 而 \vec{E} 是纵椭圆偏振的, 根据 \vec{E} 和 \vec{B} 的一般关系 $\vec{E} = -\frac{1}{\omega \mu \epsilon'} \vec{k}' \times \vec{B}$, 可得

$$E_x = \frac{1}{\omega \mu (\epsilon + i\sigma/\omega)} (k_z + is) B_y = a_2 e^{i\phi_2} B_y$$

式中
$$a_2 = \frac{\sqrt{(k_z \epsilon + \frac{\sigma}{\omega} s)^2 + (s \epsilon - \frac{k_z \sigma}{\omega})^2}}{\mu \omega (\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2})} \quad \phi_2 = \tan^{-1} \frac{\epsilon s - \frac{k \sigma}{\omega}}{k_z \epsilon + \frac{\sigma s}{\omega}}$$

$$E_z = -\frac{1}{\omega \mu (\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega})} k_x B_y = a_3 e^{i\phi_3}$$

式中
$$a_3 = \frac{-k_x}{\omega \mu (\epsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2})} \quad \phi_3 = \tan^{-1} \left(-\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)$$

以上结果说明当 $B = B_y$ 时, 不论 E_x 或 E_z , 都与 B 之间存在相位差。

由于不均匀平面波中 \vec{E} 矢量和 \vec{B} 矢量之间有相位差, 因而坡印亭矢量 \vec{S} 也有所不同。我们主要讨论平均坡印亭矢量 \vec{S} 。利用 $\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H})$, 就可分析在上述二种情况下 \vec{S} 的大小和方向。

(1) $E = E_y$

$$\bar{S}_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_y^* H_z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{k_x}{\omega \mu} E_y^* E_y \right) = \frac{1}{2} \frac{k_x}{\omega \mu} |E_y|^2$$

$$\bar{S}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-E_y^* H_x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[E_y^* \frac{1}{\omega \mu} (k_z + is) E_y \right] = \frac{1}{2} \frac{k_z}{\omega \mu} |E_y|^2$$

$$\tan \theta' = \frac{\bar{S}_x}{\bar{S}_z} = \frac{k_x}{k_z} = \tan \theta$$

根据上式, 可知 $\theta' = 0$, 也就是说, 在 $E = E_y$ 条件下, 不均匀平面波的平均坡印亭矢量的方向是与相速度方向一致的。

(2) $B = B_y$

$$\bar{S}_x = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_x^* H_y) = \frac{1}{2} \frac{k_x}{\omega} \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}\right)} |H|^2$$

$$\bar{S}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_x^* H_x) = \frac{1}{2} \frac{\left(k_z \varepsilon + \frac{\sigma}{\omega}\right)}{\omega \left(\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}\right)} |H|^2$$

$$\tan \theta' = \frac{\varepsilon k_x}{\varepsilon k_z + \frac{\sigma}{\omega}} < \frac{k_x}{k_z} = \tan \theta$$

上式表示在 $B = B_y$ 的条件下, 平均坡印亭矢量的方向既不平行于振幅衰减方向也不平行于相速方向, 这与理想介质中的 TEM 波相比, 有很大的差异。

五、结 论

通过以上讨论, 我们可以看出, 进入耗散介质中的电磁波, 与真空中或理想介质中的电磁波相比, 是有其特殊的性质, 除了垂直入射外, 一般都不是 TEM 波, 只能是非横波型的纵椭圆偏振波。

对于多数绝缘介质, 介电常数的复数部份与实数部份相比是很小的, 只要电磁波的频率不在谐振频率附近, 就可看作是理想介质。因此可以认为一般情况下, 在均匀无界介质中传播的电磁波都是横波。当然, 从严密的理论来分析, 这只是一种近似说法。

然而, 即使在理想介质中, 不均匀平面波也是可以存在的。例如, 当电磁波由光密介质射向光疏介质时, 只要入射角大于临界角, 就会产生全反射现象。这时, 还会在光疏介质中引起垂直界面方向衰减, 平行界面方向传播的电磁波, 可以证明, 它可以是 TE 波, 也可以是 TM 波, 但不能是 TEM 波。

参 考 文 献

- [1] P. Halevi Am. J. Phys. 48 (1980) 861-867.
- [2] J. A. Stratton Electromagnetic Theory (1941) 499-502.
- [3] 朗道, 连续媒质电动力学 (1963) 362-366.

Plane Electromagnetic Waves in Dissipative Media-electromagnetic Waves of Longelliptical Polarization

Zhang Mengxin

Abstract

This article studies polarization properties of the electromagnetic waves in conducting material and dissipative insulating media. Analyses show that electric field or magnetic field has, in general case, longelliptical polarization.

The article deals also with phase velocities of the electromagnetic waves under consideration, and with relative phase between electric field and magnetic field. A discussion of Poyting's vector of the wave also under consideration.