第32卷第1期
2003年3月

上海师范大学学报(自然科学版)
Journal of Shanghai Teachers University(Natural Sciences)

Vol. 32, No. 1
2003, Mar.

分组数据下简单步进应力加速寿命试验的极大似然估计

李艳冰，费鹤良

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘　要：寿命分布为指数分布的场合下，对于简单步进应力加速寿命试验下所获得的寿命数据为分组数据的情形下，给出了加速方程中未知参数的极大似然估计(MLE)，从而可计算出常应力下产品的平均寿命.

关键词：指数分布；分组数据；步进应力加速寿命试验；参数估计

中图分类号：O213.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2003)01-0015-06

0 引　言

步进应力加速寿命试验(简称步加试验)是将一定数量的产品在一组逐步升高的应力水平下进行寿命试验，每步应力下停留一段时间或做到有一定数量产品失效后，下一步对未失效的产品提高应力后继续试验，直到最高应力下做到预定时间或预定失效数为止. 对定数截尾情形，茆诗松(1985)给出了指数分布场合下步加试验的统计分析方法，仲崇新，张志华(1991)给出了改进方法，费鹤良(1995)给出了区间估计方法、本文讨论分组数据情形. 分组数据是获得产品寿命数据的一种常见方式，随机抽取 n 个产品，在同一时刻投入试验，定期进行检测，如发现失效就不再检测，这种检测只能获得产品在某一区间内失效而不知其精确失效时间，这类数据就是分组数据. 本文基于指数分布情形，简单步加试验(即两步步加试验)下获得的分组数据，对加速方程中参数进行了估计. 给出了两种有精确解情形的极大似然估计.

1 简单分组数据情形的 MLE

本文在下列假定下讨论简单步加试验的参数估计:

假定1　在常应力水平 $s(s>0)$ 下，产品的寿命分布为单参数指数分布，分布函数为:

$$F_S(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta_s}}, \quad t > 0$$

其中 $\theta_s > 0$ 为平均寿命.

收稿日期：2002-08-30

基金项目：国家自然科学基金(10271079)；上海高校科技发展基金(01D01-2)资助项目

作者简介：李艳冰(1977-)，女，上海师范大学数理信息学院硕士研究生. 费鹤良(1938-)，男，上海师范大学数理信息学院教授.

假定 2 参数 θ_s 与应力 s 有关系:

$$\ln\theta_s = a + b\varphi(s)$$

其中 a, b 为参数, $\varphi(s)$ 为关于 s 的已知函数.

假定 3 产品的剩余寿命仅依赖于当时已累积失效的部分和当时的应力水平,而与累积的方式无关[4]. 假设在应力 s_i 下的工作时间 t_i 的失效概率相当于在 s_j 下的工作时间 t_j 的失效概率,即 $F_{s_i}(t_i) = F_{s_j}(t_j)$,则可得折算后时间:

$$t_j = \frac{\theta_j}{\theta_i} t_i$$

将 n 个产品进行简单步加试验, n 个产品在应力 s_1 下做寿命试验到 t_1 时为止,只知有 $r_1(r_1 > 0)$ 个产品失效,同时将应力由 s_1 上升到 s_2 ,余下的未失效产品在 s_2 下继续做试验,到 t_2 时停止试验,观测到在 s_2 下有 r_2 个失效. 这种步加试验称为简单分组数据步加试验.

由假定 3,将 s_1 下工作时间折算到 s_2 下工作时间后为 $\frac{\theta_2}{\theta_1} t_1$.

令 $c_0 = \frac{n!}{r_1! r_2! (n - r_1 - r_2)!}$, 可以得到似然函数:

$$L(\theta_1, \theta_2) = c_0 (1 - e^{-\frac{t_1}{\theta_1}})^{r_1} (e^{-\frac{t_1}{\theta_1}} - e^{-\frac{t_2 - t_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} t_1}{\theta_2}})^{r_2} (e^{-\frac{t_2 - t_1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} t_1}{\theta_2}})^{n - r_1 - r_2}$$

将加速方程代入,可得对数似然函数:

$$\ln L(a, b) = \ln c_0 + r_1 \ln\left(1 - \exp(-\frac{t_1}{e^{a+\varphi_1}})\right) + r_2 \ln\left(\exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}) - \exp\left(-\frac{t_2 - t_1 + e^{b(\varphi_2 - \varphi_1)} t_1}{e^{a+b\varphi_2}} -\right)\right)$$
$$(n - r_1 - r_2)\left(\frac{t_2 - t_1}{e^{a+b\varphi_2}} + \frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}\right)$$

其中, $\varphi_1 = \varphi(s_1)$, $\varphi_2 = \varphi(s_2)$. 对数似然方程为:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = r_1 \frac{-(\exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}))\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}}{1 - e^{-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}}} + r_2 \frac{(\exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}))\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}}{E} -$$
$$r_2 \frac{(\exp(-\frac{t_2 - t_1 + e^{b(\varphi_2 - \varphi_1)} t_1}{e^{a+b\varphi_2}}))(\frac{t_2 - t_1}{e^{a+b\varphi_2}} + e^{-b\varphi_1 - a} t_1)}{E} +$$
$$(n - r_1 - r_2)(\frac{t_2 - t_1}{e^{a+b\varphi_2}} + e^{-a-b\varphi_1} t_1) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = r_1 \frac{-(\exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}))\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}\varphi_1}{1 - e^{-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}}} + r_2 \frac{(\exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}))\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}\varphi_1}{E} +$$
$$r_2 \frac{\exp(-\frac{t_2 - t_1 + e^{b(\varphi_2 - \varphi_1)} t_1}{e^{a+b\varphi_2}}) e^{-a-b\varphi_1} t_1 (\varphi_2 - \varphi_1)}{E} -$$
$$r_2 \frac{\exp(-\frac{t_2 - t_1 + e^{b(\varphi_2 - \varphi_1)} t_1}{e^{a+b\varphi_2}})(\frac{t_2 - t_1}{e^{a+b\varphi_2}} + e^{-a-b\varphi_1} t_1)\varphi_2}{E} -$$
$$(n - r_1 - r_2) e^{-a-b\varphi_1} t_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + (n - r_1 - r_2)(\frac{t_2 - t_1}{e^{a+b\varphi_2}} + e^{-a-b\varphi_1} t_1)\varphi_2 = 0. \tag{2}$$

其中 $E = \exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}) - \exp(-\frac{t_2 - t_1 + e^{b(\varphi_2-\varphi_1)}t_1}{e^{a+b\varphi_2}})$, $\varphi_1 = \varphi(s_1)$, $\varphi_2 = \varphi(s_2)$.

将(1) $\times \varphi_1 - (2)$，并将 E 代入，经化简可得：

$$\exp(-\frac{t_2 - t_1 + e^{b(\varphi_2-\varphi_1)}t_1}{e^{a+b\varphi_2}}) = \frac{n - r_1 - r_2}{n - r_1}\exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}), \varphi_1 = \varphi(s_1), \varphi_2 = \varphi(s_2).$$

两边取对数并经化简可得：

$$e^a = \frac{t_2 - t_1}{\ln\frac{n - r_1}{n - r_1 - r_2}}e^{-b\varphi_2} \triangleq ce^{-b\varphi_2}, \tag{3}$$

其中 $c = \dfrac{t_2 - t_1}{\ln\frac{n - r_1}{n - r_1 - r_2}}$. 将(3)式两边分别同乘以 $e^{b\varphi_2}$ 及 $e^{b\varphi_1}$ 可得以下两个式子：

$$e^{a+b\varphi_2} = c. \tag{4}$$

$$e^{a+b\varphi_1} = ce^{b(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{5}$$

(1) $\times \varphi_2 - (2)$ 并化简可得：

$$-\frac{r_1}{n - r_1}\exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}})\exp(\frac{t_2 - t_1 + e^{b(\varphi_2-\varphi_1)}t_1}{e^{a+b\varphi_2}}) +$$

$$(1 - \exp(-\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}))\exp(\frac{t_2 - t_1 + e^{b(\varphi_2-\varphi_1)}t_1}{e^{a+b\varphi_2}}) - \exp(\frac{t_1}{e^{a+b\varphi_1}}) + \frac{r_1}{n - r_1} + 1 = 0.$$

将(4)，(5)代入上式并解方程可得 b 的 MLE：

$$\hat{b} = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2}\ln\left(\frac{t_1}{t_2 - t_1}\frac{\ln\frac{n - r_1}{n - r_1 - r_2}}{\ln\frac{n}{n - r_1}}\right). \tag{6}$$

将 $\hat{b}$ 代入(3) 可得到 a 的 MLE：

$$\hat{a} = \ln\left(\frac{t_2 - t_1}{\ln\frac{n - r_1}{n - r_1 - r_2}}\right) - \frac{\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}\ln\left(\frac{t_1}{t_2 + t_1}\frac{\ln\frac{t_1}{t_2 - t_1}}{\ln\frac{n}{n - r_1}}\right), \tag{7}$$

故加速方程的估计为：

$$\ln\hat{\theta}_s = \hat{a} + \hat{b}\varphi(s).$$

假设常应力水平为 s_0，由此可得在常应力下的平均寿命为：

$$\hat{\theta}_{s_0} = e^{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)}.$$

2　多个分组数据情形的 MLE

将 n 个产品进行简单步加试验，在应力 s_1 下，假定检测时刻为 $t_{1,1}, t_{1,2}, \ldots, t_{1,m_1}$，发现在 $(t_{1,i-1}, t_{1,i}]$ 内有 $r_{1,i}$, $i = 1, 2, \ldots, m_1$ 个产品失效，其中 $t_{1,0} = 0$，且记 $r_1 = r_{1,1} + r_{1,2} + \cdots + r_{1,m_1}$，在 t_{1,m_1} 时刻将应力升高至 s_2，在 s_2 下设定检测时刻为 $t_{2,1}, t_{2,2}, \ldots, t_{2,m_2}$，试验到时刻 t_{2,m_2} 停止，发现在 $(t_{2,i-1}, t_{2,i}]$ 内有 $r_{2,i}$, $i = 1, \ldots, m_2$ 个产品失效，其中 $t_{2,0} = t_{1,m_1}$，且记 $r_2 = r_{2,1} + r_{2,2} + \cdots + r_{2,m_2}$. 则总失效数为 $r_1 + r_2$. 将 s_1 下工作时间 t_{1,m_1} 折算到 s_2 下工作时间后为 $\frac{\theta_2}{\theta_1}t_{1,m_1}$. 则似然函数：

$$L(\theta_1,\theta_2)=\frac{n!}{r_{1,1}!r_{1,2}!\dots r_{1,m_1}!r_{2,1}!r_{2,2}!\ \dots\ r_{2,m_2}!}\times\prod_{i=1}^{m_1}(e^{-\frac{t_{1,i-1}}{\theta_1}}-e^{-\frac{t_{1,i}}{\theta_1}})^{r_{1,i}}\times$$

$$\prod_{i=1}^{m_2}(e^{-\frac{t_{2,i-1}-t_{1,m_1}+\frac{\theta_2}{\theta_1}t_{1,m_1}}{\theta_2}}-e^{-\frac{t_{2,i}-t_{1,m_1}+\frac{\theta_2}{\theta_1}t_{1,m_1}}{\theta_2}})^{r_{2,i}}\times(e^{-\frac{t_{2,m_2}-t_{1,m_1}+\frac{\theta_2}{\theta_1}t_{1,m_1}}{\theta_2}})^{(n-r_1-r_2)}$$

将加速方程代入,求得对数似然方程为:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial a}=\sum_{i=1}^{m_1}r_{1,i}\frac{\exp(-t_{1,i-1}e^{-a-b\varphi_1})(t_{1,i-1}e^{-a-b\varphi_1})-\exp(-t_{1,i}e^{-a-b\varphi_1})(t_{1,i}e^{-a-b\varphi_1})}{\exp(-t_{1,i-1}e^{-a-b\varphi_1})-\exp(-t_{1,i}e^{-a-b\varphi_1})}+$$

$$\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}\frac{\exp(-(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})[(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}+t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1}]}{\exp(-(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})-\exp(-(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})}-$$

$$\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}\frac{\exp(-(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})[(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}+t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1}]}{\exp(-(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})-\exp(-(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})}+$$

$$(n-r_1-r_2)((t_{2,m_2}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}+t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial b}=\sum_{i=1}^{m_1}r_{1,i}\frac{\exp(-t_{1,i-1}e^{-a-b\varphi_1})(t_{1,i-1}e^{-a-b\varphi_1})\varphi_1-\exp(-t_{1,i}e^{-a-b\varphi_1})(t_{1,i}e^{-a-b\varphi_1})\varphi_1}{\exp(-t_{1,i-1}e^{-a-b\varphi_1})-\exp(-t_{1,i}e^{-a-b\varphi_1})}+$$

$$\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}\frac{\exp(-(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})[(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}\varphi_2+t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1}\varphi_1]}{\exp(-(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})-\exp(-(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})}-$$

$$\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}\frac{\exp(-(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})[(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}\varphi_2+t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1}\varphi_1]}{\exp(-(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})-\exp(-(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}-t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1})}+$$

$$(n-r_1-r_2)((t_{2,m_2}-t_{1,m_1})e^{-a-b\varphi_2}\varphi_2+t_{1,m_1}e^{-a-b\varphi_1}\varphi_1)=0 \tag{9}$$

(8) $\times\varphi_1$ − (9) 并经化简可得:

$$\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}\frac{(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})-\exp((t_{2,i-1}-t_{2,i})e^{-a-b\varphi_2})(t_{2,i}-t_{1,m_1})}{1-\exp((t_{2,i-1}-t_{2,i})e^{-a-b\varphi_2})}+(n-r_1-r_2)(t_{2,m_2}-t_{1,m_1})=0.$$

若等间隔, 即 $t_{1,i}-t_{1,i-1}=t_{2,j}-t_{2,j-1}=h(h>0)$, $i=1,\dots,m_1$; $j=1,\dots,m_2$, 则上式变形为:

$$\exp(-he^{-a-b\varphi_2})=1-\frac{\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}}{\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}i+(n-r_1-r_2)m_2}. \tag{10}$$

两边取对数后可得到:

$$e^{-a}=\frac{\ln\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}}{\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}i+(n-r_1-r_2)m_2}\right)}{-h}e^{b\varphi_2} \tag{11}$$

将(8)变形可得:

$$\sum_{i=1}^{m_1}r_{1,i}\frac{t_{1,i-1}-\exp(-he^{-a-b\varphi_1})t_{1,i}}{1-\exp(-he^{-a-b\varphi_1})}+$$

$$\sum_{i=1}^{m_2}r_{2,i}\frac{(t_{2,i-1}-t_{1,m_1})e^{-b(\varphi_2-\varphi_1)}+t_{1,m_1}-\exp(-he^{-a-b\varphi_2})[(t_{2,i}-t_{1,m_1})e^{-b(\varphi_2-\varphi_1)}+t_{1,m_1}]}{1-\exp(-he^{-a-b\varphi_2})}+$$

$$(n-r_1-r_2)((t_{2,m_2}-t_{1,m_1})e^{-b(\varphi_2-\varphi_1)}+t_{1,m_1})=0.$$

将(10)式及(11)式代入上式经化简可得:

$$\sum_{i=1}^{m_1} r_{1,i}i - \frac{r_1}{1-\left(1-\frac{r_2}{\sum_{j=1}^{m_2} r_{2,j}j+(n-r_1-r_2)m_2}\right)^{\exp(b(\varphi_2-\varphi_1))}} + (n-r_1)m_1 = 0.$$

由上式可解得参数 b 的极大似然估计为:

$$\hat{b} = \frac{1}{\varphi_2-\varphi_1}\ln\left(\frac{\ln\left(1-\frac{r_1}{\sum_{i=1}^{m_1} r_{1,i}i+(n-r_1)m_1}\right)}{\ln\left(1-\frac{r_2}{\sum_{j=1}^{m_2} r_{2,j}j+(n-r_1-r_2)m_2}\right)}\right).$$

将 $\hat{b}$ 代入(11)式可得 a 的极大似然估计为:

$$\hat{a} = -\ln\left(\frac{\ln\left(1-\frac{r_2}{\sum_{j=1}^{m_2} r_{2,j}j+(n-r_1-r_2)m_2}\right)}{-h}\right) - \frac{\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_1}\ln\left(\frac{\ln\left(1-\frac{r_1}{\sum_{i=1}^{m_1} r_{1,i}i+(n-r_1)m_1}\right)}{\ln\left(1-\frac{r_2}{\sum_{j=1}^{m_2} r_{2,j}j+(n-r_1-r_2)m_2}\right)}\right).$$

故加速方程的估计为:

$$\ln\hat{\theta}_s = \hat{a} + \hat{b}\varphi(s).$$

由此可得在常应力下的平均寿命为:

$$\hat{\theta}_{s_0} = e^{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)}.$$

3　举例

参考文献[2]中的模拟数据,对简单分组数据情形和多个分组数据情形分别给出一个模拟的例子.

例1　简单分组数据:取两个加速温度水平

$$s_1 = 175℃ = 448\text{K},\quad s_2 = 200℃ = 473\text{K}$$

加速模型取为 Arrhenius 方程,此时 $\varphi(s) = \ln s$,可计算得:

$$\varphi_1 = 1/k_0 s_1 = 25.903944,\quad \varphi_2 = 1/k_0 s_2 = 24.534813,$$

其中 k_0 为玻尔兹曼常数. 取加速方程中 a, b 分别为 −18, 1, 即取 $\theta_1 = 2707.942$, $\theta_2 = 688.7$, 各应力下截尾时间分别为 $t_1 = 1000$ h, $t_2 = 1700$ h, 产品失效数分别为 $r_1 = 18$, $r_2 = 22$, 样本容量为50.

利用第2节的结果可求得 a, b 的极大似然估计分别为:

$$\hat{a} = -17.15753,\quad \hat{b} = 0.96017.$$

故回归方程的估计为:

$$\ln\hat{\theta}_s = -17.15753 + 0.96017/k_0 s.$$

平均寿命的估计为:

$$\hat{\theta}_s = e^{-17.15753+0.96017/k_0 s}.$$

若设正常使用温度为 $s_0 = 140℃ = 413\text{K}$,则由上回归方程可得 $\hat{\theta}_{s_0} = 18443.57$.

例2　多个分组数据:所取加速温度水平、加速方程、样本容量与例1相同. 应力 s_1 下截尾时间分别为 $t_{1,1} = 100$, $t_{1,2} = 200$, $t_{1,3} = 300$, …, $t_{1,10} = 1000$, 应力 s_2 下截尾时间分别为 $t_{2,1} = 1100$, $t_{2,2} = 1200$, $t_{2,3} = 1300$, …, $t_{2,7} = 1700$, 失效数分别为 $r_{1,1} = 1$, $r_{1,2} = 3$, $r_{1,3} = r_{1,4} = 1$, $r_{1,5} = 3$, $r_{1,6} = 1$, $r_{1,7} = 0$, $r_{1,8} = 1$, $r_{1,9} = 3$, $r_{1,10} = 4$, $r_{2,1} = r_{2,2} = 4$, $r_{2,3} = 3$, $r_{2,4} = 0$, $r_{2,5} = 6$, $r_{2,6} = 3$, $r_{2,7} = 2$.

利用第3节的结果可求得 a, b 的极大似然估计分别为:

$$\hat{a} = -16.63682, \quad \hat{b} = 0.94171.$$

故回归方程的估计为:

$$ln\hat{\theta}_s = -16.63682 + 0.94171/k_0 s.$$

平均寿命的估计为:

$$\hat{\theta}_s = e^{-16.63682+0.94171/k_0 s}.$$

若设正常使用温度为 $s_0 = 140℃ = 413K$, 则 $\hat{\theta}_{s_0} = 21544.84452$.

参考文献:

[1] 茆诗松. 指数分布场合下步进应力加速寿命试验的统计分析[J]. 应用数学学报, 1985, 13(3).

[2] 仲崇新, 张志华. 指数分布场合定时和定数截尾步进应力加速寿命试验的统计分析[J]. 应用概率统计, 1991, 7(1).

[3] 费鹤良. 指数模型步进应力加速寿命试验的区间估计[J]. 应用概率统计, 1995, 11(3).

[4] NELSON W. Accelerated Testing[M]. John Wiley & Sons, 1990. 13.

Maximum Likelihood Estimation in the simple Step-stess Accelerated Life Testing Based on Grouped Data

LI Yan-bing, FEI He-liang

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Present the MLE of the parameter in accelerated life testing step-stress models under the exponential distribution condition based on the grouped data. Thus get the average life of the product under designed stresses.

Key words: exponential distribution; grouped data; step-stress accelerated life test; parameter estimation