第28卷第4期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol 28, No. 4
1999年12月　　J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)　　Dec. 1999

抽象距离空间中随机公共不动点定理

俞　曼

(南通师范学院, 江苏, 南通　226007)

摘　要: 证明了抽象距离空间中映射的几个公共不动点定理, 并给出了一些随机不动点定理, 改进和推广了[1~10]的主要结果.

关键词: 抽象距离空间; 随机化; 公共不动点

中图分类号: O177.3⁺9　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-5137(1999)04-0023-08

本文首先给出了抽象 G- 值距离空间中映射对的几个公共不动点定理, 其次将所得的某些结果随机化, 建立了随机映射对的几个公共不动点定理, 使[1-10]的一些重要结果得以改进, 并推广到映射对.

1　G- 值距离空间中映射对的公共不动点问题

总设 (X, d) 为 G- 值距离空间, d 为 G- 距离, $(G, \leq)$ 为满足条件 (G_1)-(G_5) 的半序集[1], 特别地, 当 $G=[0, \infty)$, 为小于等于时, (X, d) 即为通常的距离空间, 有关的记号与[1]同.

设 $S, T: X \to X$, $m, n \in I$ (非负整数集), $n \geq m$, $x, y \in X$, 记

$$O_{ST}(x, m, \infty) = \{S^i T^j x : m \leq i, j < \infty\}$$

$$O_{ST}(x, y, m, \infty) = O_{ST}(x, m, \infty) \cup O_{ST}(y, m, \infty)$$

$$O_{ST}(x, m, n) = \{S^i T^j x : m \leq i, j < n\}$$

$$O_{ST}(x, y, m, n) = O_{ST}(x, m, n) \cup O_{ST}(y, m, n)$$

对任意可数子集 $A \subset X$, 若 $\delta[A] = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}$ 存在, 则称 $\delta[A]$ 为 A 的 G- 直径.

定义　设 Φ 为 G 到 G 的非减、右连续映射, 满足:

(Φ)　对每一 $\alpha \in G$, 方程 $U = \alpha + \Phi(U)$ 有最大解 $U(\alpha)$, 且 $\Phi(\theta) = \theta$, 则称 Φ 为压缩尺度

收稿日期: 1999-03-20

作者简介: 俞曼(1953-), 女, 南通师范学院数学系讲师.

映射.

引理 1[2] 设 Φ 为压缩尺度映射, $U(\alpha)$ 为方程 $U=\alpha+\Phi(U)$ 的最大解, 则对 $V\in G$, $V\le\alpha+\Phi(V)$ 蕴含 $V\le U(\alpha)$.

定理 1 设 S 和 T 是完备 G-值距离空间 (X, d) 的交换自映射(S 和 T 不必连续), Φ 为压缩尺度映射, 如果对任意 $x\in X$, $\delta[O_{ST}(x, 0, \infty)]$ 均存在, 且对任意 $x, y\in X$ 有

$$d(Sx, Ty)\le\Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]),\tag{1}$$

则序列 $\{S^nT^nx\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 S 和 T 的唯一公共不动点

证明 显然, 由 G 满足条件 (G_3)[1] 知 $\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]$ 存在

(i) 先证明, 当式(1)满足时, 有

$$\delta[O_{ST}(x, y, 1, \infty)]\le\Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]) .\tag{2}$$

对任意自然数 i, j, k, l, 记 $\hat{x}=S^{i-1}T^jx$, $\hat{y}=S^kT^{l-1}y$, 由式(1)得

$$d(S^iT^jx, S^kT^ly)=d(S\hat{x}, T\hat{y})\le\Phi(\delta[O_{ST}(\hat{x}, \hat{y}, 0, \infty)])=$$
$$\Phi(\delta[O_{ST}(S^{i-1}T^jx, 0, \infty)\cup O_{ST}(S^kT^{l-1}y, 0, \infty)])\le\Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)])$$

类似以上证明, 有

$$d(S^iT^jx, S^kT^lx)\le\Phi(\delta[O_{ST}(x, 0, \infty)])\le\Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)])$$
$$d(S^iT^jy, S^kT^ly)\le\Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)])$$

综上所证, 即得式(2).

(ii) 由 G-值距离 d 满足三角不等式可推得

$\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]\le\delta[\{S^iT^jx, S^iT^jy: 0\le i\le 1, 0\le j<\infty$ 或 $0\le i<\infty, 0\le j\le 1\}]+\delta[O_{ST}(x, y, 1, \infty)]$, 由于 $\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]$ 存在, 则 $\alpha=\delta[\{S^iT^jx, S^iT^jy: 0\le i\le 1, 0\le j<\infty$ 或 $0\le i<\infty, 0\le j\le 1\}]$ 也存在, 由上式及式(2)得

$$\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]\le\alpha+\Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]$$

设 $U(\alpha)$ 是方程 $U=\alpha+\Phi(U)$ 的最大解, 由上式及引理 1 得

$$\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]\le U(\alpha)\overset{def}{=}U_0 .\tag{3}$$

记 $x_n=S^nT^nx$, $y_n=S^nT^ny$, $n\in I$ (非负整数集), 由式(2)、(3)及 Φ 的非减性有

$$\delta[O_{ST}(x, y, 1, \infty)]\le\Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)])\le\Phi(U_0)\overset{def}{=}U_1$$

再由归纳法可得, 对一切 $n\in I$

$$\delta[O_{ST}(x, y, n+1, \infty)]=\delta[O_{ST}(x_n, y_n, 1, \infty)]\le$$
$$\Phi(\delta[O_{ST}(x_n, y_n, 0, \infty)])=\Phi(\delta[O_{ST}(x, y, n, \infty)])\le$$
$$\Phi(U_n)\overset{def}{=}U_{n+1} .\tag{4}$$

由于

$$U_1=\Phi(U_0)\le\Phi(U(\alpha))+\alpha=U_0,$$
$$U_2=\Phi(U_1)\le\Phi(U_0)=U_I,$$
$$\cdots\cdots$$

$$U_{n+1} = \Phi(U_n) \leq \Phi(U_{n-1}) = U_n \qquad n \in I, \tag{5}$$

因而$\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$是 G 的非增序列, 由 G 满足条件(G_5), $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U^* \in G$, 由 Φ 的右连续性, 在式(5)中令 $n\to\infty$推得 $U^* = \Phi(U^*)$. 再由条件(Φ)及引理 1 得到 $U^* = \theta$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \theta$, 由式(4)即有

$$\lim_{n\to\infty} \delta[O_{ST}(x, y, n, \infty)] = \theta.$$

(iii) 上式说明, 对任意 $x \in X$, $O_{ST}(x, 0, \infty)$中迭代指数都趋于无穷的一切子序列都是 Cauchy 序列且收敛于同一极限 $x^* \in X$. 特别地, 序列$\{S^n T^n x\}_{n=0}^{\infty}$收敛于 x^*.

(iv) 证明 x^*是 S 和 T 的唯一公共不动点. 对任意 $i, j, k, l \in I$ 由 S 和 T 的可交换性, 式(1)及三角不等式有

$$\begin{aligned} d(x^*, S^i T^{j+1} x^*) &\leq d(x^*, S^{n+1} T^n x) + d(S^{n+1} T^n x, S^i T^{j+1} x^*) \leq \\ &d(x^*, S^{n+1} T^n x) + \Phi(\delta[O_{ST}(S^n T^n x, S^i T^j x^*, 0, \infty)]) \leq \\ &d(x^*, S^{n+1} T^n x) + \Phi(\delta[O_{ST}(S^n T^n x, x^*, 0, \infty)]), \end{aligned}$$

在上式右端令 $n\to\infty$, 由(iii)及 Φ 的右连续性即有

$$d(x^*, S^i T^{j+1} x^*) \leq \Phi(\delta[O_{ST}(x^*, 0, \infty)]).$$

同理, 有

$$d(x^*, S^{k+1} T^l x^*) \leq \Phi(\delta[O_{ST}(x^*, 0, \infty)])$$

$$d(S^{i+1} T^j x^*, S^k T^{l+1} x^*) \leq \Phi(\delta[O_{ST}(x^*, 0, \infty)]).$$

综上所得, 即

$$\delta[O_{ST}(x^*, 0, \infty)] \leq \Phi(\delta[O_{ST}(x^*, 0, \infty)]),$$

由条件(Φ)及引理 1 得到 $\delta[O_{ST}(x^*, 0, \infty)] = \theta$, 于是 $Sx^* = x^* = Tx^*$. 唯一性由式(1)直接推出.

定理 2　设 S 和 T 是完备 G-值距离空间(X, d)的交换自映射, $r \in N$ (自然数集), Φ 为压缩尺度映射, 若对任意 $x, y \in X$, 有

$$d(Sx, Ty) \leq \Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, r)]), \tag{6}$$

则 S 和 T 有唯一公共不动点.

证明　类似定理 1 的证明.

推论 1　设 S 和 T 是完备 G-值距离空间(X, d)的自映射, Φ 为压缩尺度映射, 若对任意 $x, y \in X$, 有

$$d(Sx, Ty) \leq \Phi(sup\{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Sx)\}), \tag{7}$$

则定理 2 的结论成立.

证明　比较式(6)、式(7)即得.

注 1　若分别以 S^p 和 T^q $(p, q \in N)$代替推论 1 中的 S 和 T, 则即得[1]的定理 4.

定理 3　设$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$($\Lambda$ 为任意指标集)是完备 G-值距离空间(X, d)的交换自映射族, Φ 为压缩尺度映射, 如果对任意 $x \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\delta[O_{T_{\lambda_1} T_{\lambda_2}}(x, 0, \infty)]$均存在, 且对任意 $x, y \in X$ 有

$$d(T_{\lambda_1} x, T_{\lambda_2} y) \leq \Phi(\delta[O_{T_{\lambda_1} T_{\lambda_2}}(x, y, 0, \infty)]), \tag{8}$$

则族$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$有唯一公共不动点.

证明 由定理 1 知, 对$\lambda_1, \lambda_2\in\Lambda, \lambda_1\neq\lambda_2$, T_{λ_1}和T_{λ_2}有唯一公共x^*. 下面证明x^*是族$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的唯一公共不动点 对任意$\lambda\in\Lambda, \lambda_1\neq\lambda$, 由于$x^*=T_{\lambda_1}x^*$, 则

$$\left.\begin{aligned} O_{T_\lambda T_{\lambda_1}}(x^*,0,\infty) &= \{x^*, T_\lambda x^*, \cdots, T_\lambda^n x^*, \cdots\} = O_{T_\lambda}(x^*,0,\infty) \\ O_{T_\lambda T_{\lambda_1}}(x^*,1,\infty) &= \{T_\lambda x^*, T_\lambda^2 x^*, \cdots, T_\lambda^n x^*, \cdots\} = O_{T_\lambda}(x^*,1,\infty)\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

由式(8)类似定理 1 的证明(i), 并利用式(9)有

$$\delta[O_{T_\lambda}(x^*,1,\infty)]\le\Phi(\delta[O_{T_\lambda}(x^*,0,\infty)]), \tag{10}$$

对任意$k\in I$由式(8)并利用式(9)易得

$$d(T_\lambda^{k+1}x^*,x^*)=d(T_\lambda(T_\lambda^n x^*),T_{\lambda_1}x^*)\le\Phi([O_{T_\lambda}(x^*,0,\infty)]). \tag{11}$$

综合式(10)和(11)得

$$\delta[O_{T_\lambda}(x^*,0,\infty)]\le\Phi(\delta[O_{T_\lambda}(x^*,0,\infty)]),$$

由条件(Φ)及引理 1 即得$\delta[O_{T_\lambda}(x^*,0,\infty)]=\theta$. 故$x^*=T_\lambda x^*$, 即$x^*$是族$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的公共不动点, 唯一性显然.

对定理 2 也可以给出类似的结果, 为节省计, 不再赘述.

定理 4 设S和T是完备G-值距离空间(X,d)的交换连续性自映射, Φ为压缩尺度映射, $P: X\times X\to N$, 若$\delta[O_{ST}(x,0,\infty)]$存在, $\forall x\in X$, 且对任意$x,y\in X$满足

$$\delta[O_{ST}(x,y,p(x,y),\infty)]\le\Phi(\delta[O_{ST}(x,y,0,\infty)]), \tag{12}$$

则序列$\{S^nT^nx\}_{n=0}^{\infty}$收敛于$S$和$T$的唯一公共不动点.

证明 由d满足三角不等式可得

$$\delta[O_{ST}(x,y,0,\infty)]\le\alpha+\delta[O_{ST}(x,y,p(x,y),\infty)],$$

其中

$$\alpha=\delta[\{S^iT^jx, S^iT^jy: 0\le i\le p(x,y), 0\le j<\infty \text{ 或 } 0\le i<\infty, 0\le j\le p(x,y)\}].$$

再由式(12)有

$$\delta[O_{ST}(x,y,0,\infty)]\le\alpha+\Phi(\delta[O_{ST}(x,y,0,\infty)]), \tag{13}$$

设$U(\alpha)$是方程$U=\alpha+\Phi(U)$的最大解, 由引理 1 及式(13)可推出

$$\delta[O_{ST}(x,y,0,\infty)]\le U(\alpha)\overset{def}{=}U_0.$$

定义正整数列$\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{cases} k(1)=p(x,y), \\ k(n+1)=k(n)+p(x_{k(n)},y_{k(n)}) \qquad n\in N,\end{cases}$$

则由式(12)易检验, 对任意$n\in I$有

$$\begin{aligned}\delta[O_{ST}(x,y,k(n+1),\infty)] = {} & \delta[O_{ST}(x_{k(n)},y_{k(n)},p(x_{k(n)},y_{k(n)}),0,\infty)]\le \\ & \Phi(\delta[O_{ST}(x_{k(n)},y_{k(n)},0,\infty)]) = \\ & \Phi(\delta[O_{ST}(x,y,k(n),\infty)])\le \\ & \Phi(U_n)\overset{def}{=}U_{n+1}.\end{aligned}$$

类似定理 1 证明(ii)的有关部分, 有$\lim_{n\to\infty}U_n=\theta$, 因此, $\lim_{n\to\infty}\delta[O_{ST}(x,y,k(n),\infty)]=\theta$, 故$O_{ST}(x,$

$y, 0, \infty)$ 中迭代指数都趋于无穷的一切子序列都是 Cauchy 序列且收敛于同一极限 x^*, 特别, 序列

$$\{x, STx, TSTx, \cdots, S^nT^nx, TS^nT^nx, \cdots\}$$

收敛于 x^*, 由 S 和 T 的连续性及 $\lim_{n\to\infty} STS^nT^nx = \lim_{n\to\infty} TS^nT^nx = \lim_{n\to\infty} S^nT^nx = x^*$ 得 x^* 是 S 和 T 的公共不动点, 唯一性显然 .

注 2　定理 4 统一和推广了[1]的定理 1 和定理 3.

推论 2　设 S 和 T 是完备 G-值距离空间 (X, d) 的连续交换自映射, $p, q \in N$, $\delta[O_{ST}(x, 0, \infty)]$ 存在, $\forall x \in X$, Φ 为压缩尺度映射, 若对任意 $x, y \in X$ 有

$$d(S^px, T^qy) \le \Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]), \tag{14}$$

则定理 4 的结论成立 .

证明　令 $h = \max\{p, q\}$, 对任意自然数 $i, j, k, l \ge h$, x、$y \in X$, 记 $\hat{x} = S^{i-p}T^jx$, $\hat{y} = S^kT^{l-q}y$, 由式(14)及 S 和 T 的交换性、Φ 的非减性, 有

$$d(S^iT^jx, S^kT^ly) = d(S^p\hat{x}, T^q\hat{y}) \le \Phi(\delta[O_{ST}(\hat{x}, \hat{y}, 0, \infty)]) \le \Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]) .$$

上式即表示

$$\delta[O_{ST}(x, y, h, \infty)] \le \Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)])$$

在定理 4 中令 $p(x, y) \equiv h$ 即得证

定理 5　设 S 和 T 是完备 G-值距离空间 (X, d) 的连续交换自映射, Φ 为压缩尺度映射, $p: X \times X \to N$, 若对任意 $x, y \in X$, $r \ge p(x, y)$, $r \in N$, 有

$$\delta[O_{ST}(x, y, p(x, y), r)] \le \Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]),$$

则 S 和 T 有唯一公共不动点 .

证明　类似定理 4 的证明 .

推论 3　设 S 和 T 是完备 G-值距离空间 (X, d) 的连续交换自映射, Φ 为压缩尺度映射, $p, q \in N$, 若对任意 $x, y \in X$, 有

$$d(S^px, T^qy) \le \Phi(\delta[O_{ST}(x, 0, p) \cup O_{ST}(y, 0, q)]),$$

则定理 5 的结论成立 .

证明　令 $h = \max\{p, q\}$, 则对 $h \le i, j, k, l \le r$, $i, j, k, l, r \in N$, 类似推论 2 证明中有关部分, 可得

$$\delta[O_{ST}(x, y, h, r)] \le \Phi(\delta[O_{ST}(x, y, 0, r)]) .$$

令 $p(x, y) \equiv h$, 定理 5 知结论成立

注 3　[1]的定理 2 与推论 3 分别是本文的定理 5 与推论 3 中 $S = T$ 的特殊情形, 因此定理 5 和推论 3 改进并推广了[3- 7]的相应结果到 G-值距离空间 .

注 4　在定理 2、定理 5、推论 1 及推论 3 中, 由于为涉及可数无限集的上确界的存在问题, 从而对半序集 $(G, \le)$ 不必要求满足条件 (G_3)[1] .

2　连续随机映射对的公共不动点问题

现在将 §1 中得到的某些结果随机化, 给出连续随机映射对的公共不动点定理 . 有关概

念见[1,2],所用记号与[1]同. 以下总设(X, d)是可分完备G-值距离空间,$(\Omega, \mathbf{F}, P)$是完备概率空间.

引理 2[2] 设随机元序列$\{X_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$以概率 1(记为 a.s.)弱收敛于$x(\omega)$,则$x(\omega)$也是随机元.

引理 3[2] 设$T: \Omega\times X\to X$是连续随机算子,$x(\omega)$是随机元,则$T(\omega, x(\omega))$也是随机元.

设$\Phi: \Omega\times G\to G$且 a.s. 满足:

(Φ_1') $\Phi(\omega, u)$对u非减和强连续.

(Φ_2') 对每一$\alpha\in G$,方程$U=\alpha+\Phi(\omega, u)$的最大解$u(\omega, \alpha)$存在,且$u(\omega, \theta)=\theta$,则称Φ为随机压缩尺度映射.

设S和$T: \Omega\times X\to X$是连续随机算子,称S和T是交换的,若对每一随机元$x(\omega)$,

$$T(\omega, S(\omega, x(\omega))) = S(\omega, T(\omega, x(\omega))).$$

对随机元$x(\omega), y(\omega)$,记

$$T^i(\omega, x(\omega)) = T(\omega, T^{i-1}(\omega, x(\omega))), i\in N,$$

其中

$$T^0(\omega, x(\omega)) = x(\omega),$$

$$O_{ST}(x(\omega), m, \infty) = \{S^iT^j(\omega, x(\omega)): m\le i, j<\infty\},$$

$$O_{ST}(x(\omega), m, n) = \{S^iT^j(\omega, x(\omega)): m\le i, j\le n\},$$

$$O_{ST}(x(\omega), y(\omega), m, \infty) = O_{ST}(x(\omega), m, \infty)\cup O_{ST}(y(\omega), m, \infty),$$

$$O_{ST}(x(\omega), y(\omega), m, n) = O_{ST}(x(\omega), m, n)\cup O_{ST}(y(\omega), m, n), m, n\in I, m\le n.$$

设$A(\omega)$为随机元的可数集. 记$\delta[A(\omega)] = \sup\{d(x(\omega), y(\omega)): x(\omega), y(\omega)\in A(\omega))\}$.

定理 6 设S和T是交换连续随机算子,Φ为随机压缩尺度映射,若在任意随机元$x(\omega)$,$\delta[O_{ST}(x(\omega), 0, \infty)]$ a.s. 存在,$p, q\in N$,使对任意$x, y\in X$,满足

$$d(S^p(\omega, x), T^q(\omega, y)) \le \Phi(\omega, \delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)]) \text{ a.s.} \tag{15}$$

则 对于任一随机元$x(\omega)$,随机元序列$\{S^nT^n(\omega, x(\omega))\}_{n=0}^{\infty}$ a.s. 收敛于S和T的唯一公共不动点.

证明 由X可分及定理 6 的假设知,存在集合$E\in\mathbf{F}$,$P(E)=1$,使对任意$\omega\in E$,$\delta[O_{ST}(x(\omega), 0, \infty)]$存在且式(15)成立,对固定的$\omega_0\in E$,由推论 2 知,对每一随机元$x(\omega)$,序列$\{S^nT^n(\omega_0, x(\omega_0))\}_{n=0}^{\infty}$强收敛于$S(\omega_0, \cdot)$和$T(\omega_0, \cdot)$的唯一公共不动点$x^*(\omega_0)$. 由于$P(E)=1$,当$\omega_0$在$E$中变动时,得到在$\Omega$上 a.s. 有定义的唯一映射$x^*(\omega): \Omega\to X$,使对每一随机元$x(\omega)$,序列$\{S^nT^n(\omega, x(\omega))\}_{n=0}^{\infty}$ a.s. 收敛于$x^*(\omega)$且$S(\omega, x^*(\omega)) = T(\omega, x^*(\omega)) = x^*(\omega)$ a.s.. 由S和T的连续性及引理 3 知$\{S^nT^n(\omega, x(\omega))\}_{n=0}^{\infty}$是随机元序列,于是由引理 2 得$x^*(\omega)$是一随机元.

定理 7 设S和T是交换连续随机算子,Φ为随机压缩尺度映射,若对任一随机元$x(\omega)$,$\delta[O_{ST}(x(\omega), 0, \infty)]$ a.s. 存在,且

$$P\{\bigcup_{p、q=1}^{\infty}\bigcap_{x、y\in X}[\omega: d(S^p(\omega, x), T^q(\omega, y)) \le \Phi(\omega, \delta[O_{ST}(x, y, 0, \infty)])]\} = 1.$$

则定理 6 的结论成立.

证明　由 X 可分及定理 7 的假设, 存在 $E\in\mathbf{F}$, $P(E)=1$, 使对任一固定 $\omega_0\in E$, $\delta[O_{ST}(x(\omega_0),0,\infty)]$存在, 且有 $p(\omega_0), q(\omega_0)\in N$, 对任意 $x, y\in X$, 成立.

$d(S^{p(\omega_0)}(\omega_0,x), T^{q(\omega_0)}(\omega_0,y))\le\Phi(\omega_0,\delta[O_{ST}(x,y,0,\infty)])$ 由推论 2 知, 对每一随机元 $x(\omega)$, 序列$\{S^nT^n(\omega_0,x(\omega_0))\}_{n=0}^{\infty}$强收敛 $S(\omega_0,\cdot)$ 和 $T(\omega_0,\cdot)$ 的唯一公共不动点 $x^*(\omega_0)$ (注意序列$\{S^nT^n(\omega_0,x(\omega_0))\}_{n=0}^{\infty}$的各次迭代指数已与 $p(\omega_0), q(\omega_0)$ 无关), 由定理 6 证明的有关部分, 知结论成立

仿照定理6和定理7的证明方法, 利用推论3容易证得下述两个结果. 此时, 半序集 $(G,\le)$ 可不满足(G_3) (见注 4).

定理 8　设 S 和 T 是交换连续随机算子, Φ 为随机压缩尺度映射, p、$q\in N$, 若对任集 x, $y\in X$ 有

$$d(S^p(\omega,x), T^q(\omega,y))\le\Phi(\omega,\delta[O_{ST}(x,0,P)\cup O_{ST}(y,0,q)])\ a.s$$

则对任一随机元$x(\omega)$, 序列$\{S^nT^n(\omega,x(\omega))\}_{n=0}^{\infty}a.s$ 收敛于 S 和 T 的唯一公共不动点.

定理 9　设 S 和 T 是交换连续随机算子, Φ 为随机压缩尺度映射, 使得

$$P\{\bigcup_{p、q=1}^{\infty}\bigcap_{x、y\in X}[\omega: d(S^p(\omega,x), T^q(\omega,y))\le\Phi(\omega,\delta[O_{ST}(x,0,p)\cup O_{ST}(y,0,q)])]\}=1,$$

则定理 8 的结论成立.

注 5　定理 8 和定理 9 分别推广了[1]中定理 7 和定理 8 到映射对的情形, 当然[2]中定理 4, 2 和[8]中定理 6 以及[9, 10]中相应结果更是定理 8 和定理 9 的特例

参考文献:

[1]　丁协平. 抽象空间内的随机公共不动点定理[J]. 数学物理学报, 1983, (3): 121- 134.

[2]　陈绍仲, 刘作述. 关于抽象空间中的随机不动点定理[J]. 数学物理学报, 1981, (1): 133- 144.

[3]　丁协平. 轨道压缩映射的不动点定理[J]. 数学年刊, 1981, (4): 511- 517.

[4]　丁协平. 关于压缩型映射的公共不动点—某些尚待解决的问题[J]. 数学研究与评论, 1984, (2): 25- 30.

[5]　Fisher B. Quasi-contractions on metric spaces[J]. proc, Amer Math Soc, 1979, (75): 321- 325.

[6]　Fisher B. On a conjecture on common fixed points[J]. Math Semi Notes, 1978, (6): 153- 156.

[7]　Fisher B. Results On common fixed points on bounded metric space[J]. Math Semi Notes, 1979, (7): 73- 81.

[8]　Chang S S. Rando, fixed point theorem in probabilistic Analysis[J]. Nonlinear Anal TMA. 1981, (5): 113- 122.

[9]　丁协平. 连续随机算子的不动点定理[J]. 数学进展, 1983, (12).

[10]　王梓坤. 随机泛函分析引论[J]. 数学进展, 1962, (5): 45- 71.

Random Common Fixed Point Theorems in Generalized Metric Spaces

YU Man
(Nantong Teachers College, Nantong, Jiangsu, 226007, China)

Abstract: Proves several random common fixed point theorems for mappings in generalized metric spaces and gives some random fixed point theorems. Improves and extends the main results of [1～10].

Key words: abstract metric space; random; common fixed point