定数截尾缺失数据下两参数WEIBULL和对数正态分布的统计推断

王蓉华

(上海师范大学 数学科学学院，上海 200234)

摘　要：给出了定数截尾缺失数据下两参数Weibull和对数正态分布参数的点估计和区间估计以及可靠度、失效率的置信限.

关键词：点估计；区间估计；可靠度；失效率；置信限

中图分类号：O213.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2001)03-0019-07

0　引　言

在可靠性寿命试验中，两参数Weibull分布和对数正态分布是最常用的两种寿命分布. 对于定数截尾缺失数据场合下的统计分析已有一些文献作了讨论. 文献[1]给出了定数截尾缺失数据条件下两参数Weibull分布参数的点估计，这些点估计包括MLE，BLUE及BLIE等，但是在样本比较大时，计算系数相当复杂. 文献[2]也给出了两参数Weibull分布参数的点估计，计算比较简单，同时还讨论了点估计的性质. 至于对数正态分布在缺失数据场合下的统计分析的研究至今未见有这方面的文献.

本文在文献[2]的基础上，研究了两参数Weibull分布在定数截尾缺失数据场合下参数的区间估计以及可靠度、失效率的置信限. 同时给出了定数截尾缺失数据下求对数正态分布参数的点估计、区间估计以及可靠度、失效率的置信限的一种方法.

1　Weibull分布场合下的统计分析

设产品的寿命服从两参数Weibull分布，其分布函数为：

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right\},\ t \geqslant 0. \tag{1}$$

其中 $m > 0$ 称为形状参数，$\eta > 0$ 称为刻度参数.

现假定有 n 个产品进行寿命试验，到有 r 个产品失效时停止试验(即定数截尾寿命试验)，其次序失效数据为：$t_{(1)} \leqslant t_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant t_{(r)}$. 现考虑如下场合：即上述 r 个失效数据中由于某种原因使得有若干个数据缺失，设剩下 k 个数据，即剩下的失效数据为：$0 = t_{(r_0)} < t_{(r_1)} \leqslant t_{(r_2)} \leqslant \cdots \leqslant t_{(r_k)}$. 令 $X_{(i)}$

收稿日期：2001-01-12

基金项目：上海市高等学校青年科学基金项目(CL200002)

作者简介：王蓉华(1972-)，女，硕士，上海师范大学数学科学学院讲师.

$= \ln t_{(r_k)} - \ln t_{(r_k-1)}, X_{(2)} = \ln t_{(r_k)} - \ln t_{(r_k-2)}, \cdots, X_{(r_k-1)} = \ln t_{(r_k)} - \ln t_{(1)}$，由于在 $t_{(1)} \leqslant t_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant t_{(r_k)}$ 中有一些数据缺失，剩下的数据为：$t_{(r_1)}, t_{(r_2)}, \cdots, t_{(r_k)}$，于是在 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(r_k-1)}$ 中剩下的数据为：$X_{(r_k-r_{k-1})}, X_{(r_k-r_{k-2})}, \cdots, X_{(r_k-r_2)}, X_{(r_k-r_1)}$ 共有 $k-1$ 个数据. 令 $l_i = r_k - r_{k-i}$，$i = 1, \cdots, k-1$（约定 $l_0 = 0$），由文献[2]知：形状参数 m 的点估计为：

$$\hat{m} = g\hat{m}_0. \tag{2}$$

其中：$\hat{m}_0$ 为如下方程的根：

$$\frac{k-1}{m} - \sum_{i=1}^{k-1}(l_i - l_{i-1} - 1)\frac{X_{l_i}e^{-mX_{l_i}} - X_{l_{i-1}}e^{-mX_{l_{i-1}}}}{e^{-mX_{l_i}} - e^{-mX_{l_{i-1}}}} - \sum_{i=1}^{k-1}X_{l_i} - [(r_k - 1) - l_{k-1}]X_{l_{k-1}} = 0. \tag{3}$$

而 g 称为修偏系数，其值可查阅文献[2].

刻度参数 η 的点估计 $\hat{\eta}$ 为如下方程的根：

$$\eta^{\hat m}k - \sum_{i=1}^{k}(r_i - r_{i-1} - 1)\frac{t_{r_i}^{\hat m}e^{-\left(\frac{t_{r_i}}{\eta}\right)^{\hat m}} - t_{r_{i-1}}^{\hat m}e^{-\left(\frac{t_{r_{i-1}}}{\eta}\right)^{\hat m}}}{e^{-\left(\frac{t_{r_i}}{\eta}\right)^{\hat m}} - e^{-\left(\frac{t_{r_{i-1}}}{\eta}\right)^{\hat m}}} - \sum_{i=1}^{k}t_{r_i}^{\hat m} - (n - r_k)t_{r_k}^{\hat m} = 0, \tag{4}$$

同时仍由文献[2]知：$m^* = \frac{\hat{m}}{m}$，$\eta^* = \hat{m}(\ln\hat{\eta} - \ln\eta)$ 为枢轴量，由此易知：$m(\ln\hat{\eta} - \ln\eta)$ 也为枢轴量. 于是可以用 Monte-Carlo 模拟得 m^*、η^* 的分位数，表 1 列出了 $n = 10, k = 6, r_i = 1, 3, 4(2)10$；$n = 20, k = 10, r_i = 2(2)20$ 两种场合下的 m^*、η^* 的分位数. 其中模拟次数为 10000 次. 如果取置信水平为 $1-\alpha$，m^* 的分布的双侧分位数为 a_1 及 a_2，η^* 的分布的双侧分位数为 b_1 及 b_2，由此参数 m 的区间估计为：$\left[\frac{\hat m}{a_2}, \frac{\hat m}{a_1}\right]$，参数 η 的区间估计为：$\left[\hat{\eta}e^{-\frac{b_2}{\hat m}}, \hat{\eta}e^{-\frac{b_1}{\hat m}}\right]$. 为了考察其区间估计的精度，我们取参数真值为 $m = \eta = 1$，置信水平为 0.90，对 m，η 的区间估计进行了1000次 Monte-Carlo 模拟，并将结果列于表2内，从中可以看出：模拟精度是比较令人满意的.

表 1　m^*、η^* 的分位数

n	k	r_i $i=1,\cdots,k$		0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
10	6	1,3,4,6,8,10	m^*	0.5200	0.6153	0.6726	0.7164	0.7504	1.2191	1.2080	1.4064	1.6058	2.5012
			η^*	−0.9463	−0.6302	−0.4925	−0.4024	−0.3384	0.2031	0.2720	0.3649	0.5039	0.8484
20	10	2(2)20	m^*	0.6285	0.7021	0.7495	0.7840	0.8131	1.1651	1.2155	1.2824	1.4040	1.6480
			η^*	−0.6172	−0.4233	−0.3346	−0.2762	−0.2306	0.1623	0.2122	0.2715	0.3728	0.5661

表 2　m、η 区间估计/m 次模拟结果

参数真值			$m=1$				$\eta=1$			
n	k	$r_i(i=1,\cdots,k)$	下限均值	下限均方误差	上限均值	上限均方误差	下限均值	下限均方误差	上限均值	上限均方误差
10	6	1,3,4,6,8,10	0.6232	0.1777	1.6275	0.6377	0.5724	0.2381	1.8920	1.1987
20	10	2(2)20	0.7117	0.1062	1.4233	0.2718	0.6682	0.1451	1.5146	0.3868

对于两参数 Weibull 分布，可靠度函数为：

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m}，在时刻 t. \tag{5}$$

于是其点估计为：

$$\hat{R}(t) = e^{-\left(\frac{t}{\hat\eta}\right)^{\hat m}}，在时刻 t. \tag{6}$$

由此易得：$\hat{\eta}[-\ln\hat{R}(t)]^{\frac{1}{\hat m}} = \eta[-\ln R(t)]^{\frac{1}{m}}$

$$R(t) = e^{-\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^m\left[-\ln\hat{R}(t)\right]^{-\frac{m}{\hat{m}}}} \tag{7}$$

由于 $\frac{m}{\hat{m}}$,$\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^m$ 为一已知分布(即为枢轴量),把 $\hat{R}(t)$ 视为一常数,于是 $R(t)$ 的分布仅依赖于 $\hat{R}(t)$,故可以对(7)式的分布用 Monte—Carlo 方法模拟,表3,4分别列出了上述 $n=10$,$n=20$ 场合下对 $\hat{R}(t)=0.9999$,0.9995,0.999,0.995 及 0.99(0.01)0.50 的分位数表,模拟次数为 10000 次.

对于两参数 Weibull 分布,失效率函数为:

$$\lambda(t) = \frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1},\text{在时刻 } t, \tag{8}$$

于是其点估计为:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\hat{m}}{\hat{\eta}}\left(\frac{t}{\hat{\eta}}\right)^{\hat{m}-1},\text{在时刻 } t, \tag{9}$$

由此易得:$\lambda(t)=\frac{m}{t}[-\ln R(t)]$,$\hat{\lambda}(t)=\frac{\hat{m}}{t}[-\ln\hat{R}(t)]$,

$$\frac{\lambda(t)}{\hat{\lambda}(t)} = \frac{m}{\hat{m}}\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^m\left[-\ln\hat{R}(t)\right]^{\frac{m}{\hat{m}}-1}. \tag{10}$$

由于 $\frac{m}{\hat{m}}$,$\left(\frac{\hat{\eta}}{\eta}\right)^m$ 为一已知分布,我们把 $\hat{R}(t)$ 视为一常数,于是 $\frac{\lambda(t)}{\hat{\lambda}(t)}$ 的分布仅依赖于 $\hat{R}(t)$,故可以对(10)式的分布用 Monte-Carlo 方法模拟,表 5,6 分别列出了上述 $n=10$,$n=20$ 场合下对 $\hat{R}(t)=0.9999$, 0.9995, 0.999, 0.995 及 0.99(0.01)0.50 的分位数表,模拟次数为 10000 次.

为了考察可靠度、失效率置信限的精度,参数真值取为 $m=\eta=1$,可靠度真值取为 0.90,此时对应的时刻 $t=\eta[-\ln R]^{\frac{1}{m}}$(值为 0.10536),失效率真值为 1,置信水平取为 0.90,对 R 的置信下限、λ 的置信上限进行了100次 Monte-Carlo 模拟(其中由于计算耗时巨大,故每次分位数只模拟了1000次),模拟结果列在表3内. 从中可以看出:模拟精度是比较令人满意的.

表 3　R 置信下限、λ 置信下限的 100 次模拟结果

真值			$R=0.90$		$\lambda=1$	
n	k	$r_i(i=1,\cdots,k)$	均 值	均方误差	均 值	均方误差
10	6	1,3,4,6,8,10	0.7650	0.0282	1.8311	1.1181
20	10	2(2)20	0.8096	0.0130	1.5536	0.4723

3　对数正态分布场合下的统计分析

设产品的寿命服从两参数对数正态分布,其分布密度函数为:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}},t>0. \tag{11}$$

其中:μ,σ^2 分别称为对数均值和对数方差. 记 $\varphi(x)$,$\Phi(x)$ 分别为 $N(0,1)$ 分布的密度函数和分布函数. 令函数 $y=\Phi(x)$,则由隐函数存在定理可知:存在唯一的反函数 Ψ,有 $x=\Psi(y)$.

设 $t_{(1)}\leqslant t_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant t_{(r)}$ 为来自两参数对数正态分布容量为 n 的前 r 个次序统计量. 现考虑如下情形:即上述 r 个失效数据由于某种原因使得有若干个数据缺失. 设剩下 k 个数据,即剩下的数据为:$0=t_{(r_0)}<t_{(r_1)}\leqslant t_{(r_2)}\leqslant\cdots\leqslant t_{(r_k)}$,我们利用文献[3] 中的逆矩估计思想. 令:

$$T_1(\sigma) = \sum_{j=1}^{k-1}\ln\frac{\sum_{i=1}^{k}(n-r_i+1)\left[t_{(r_i)}^{1/\sigma}-t_{(r_{i-1})}^{1/\sigma}\right]}{\sum_{i=1}^{j}(n-r_i+1)\left[t_{(r_i)}^{1/\sigma}-t_{(r_{i-1})}^{1/\sigma}\right]}, \tag{12}$$

由于$\frac{\ln t_{(1)}-\mu}{\sigma},\frac{\ln t_{(2)}-\mu}{\sigma},\cdots,\frac{\ln t_{(r)}-\mu}{\sigma}$为来自 $N(0,1)$ 容量为 n 的前 r 个次序统计量. 易知:

$$T_1(\sigma)=\sum_{j=1}^{k-1}\ln\frac{(n-r_1+1)e^{\frac{\ln t_{(r_1)}}{\sigma}}+\sum_{i=2}^{k}(n-r_i+1)\left[e^{\frac{\ln t_{(r_i)}}{\sigma}}-e^{\frac{\ln t_{(r_{i-1})}}{\sigma}}\right]}{(n-r_1+1)e^{\frac{\ln t_{(r_1)}}{\sigma}}+\sum_{i=2}^{j}(n-r_i+1)\left[e^{\frac{\ln t_{(r_i)}}{\sigma}}-e^{\frac{\ln t_{(r_{i-1})}}{\sigma}}\right]}=$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\ln\frac{(n-r_1+1)e^{\frac{\ln t_{(r_1)}-\mu}{\sigma}}+\sum_{i=2}^{k}(n-r_i+1)\left[e^{\frac{\ln t_{(r_i)}-\mu}{\sigma}}-e^{\frac{\ln t_{(r_{i-1})}-\mu}{\sigma}}\right]}{(n-r_1+1)e^{\frac{\ln t_{(r_1)}-\mu}{\sigma}}+\sum_{i=2}^{j}(n-r_i+1)\left[e^{\frac{\ln t_{(r_i)}-\mu}{\sigma}}-e^{\frac{\ln t_{(r_{i-1})}-\mu}{\sigma}}\right]}.$$

于是: $T_1(\sigma)$ 为一枢轴量. 由此我们可以用 Monte-Carlo 模拟的方法易得 $T_1(\sigma)$ 的期望. 记 $K_{m1}=ET_1(\sigma)$, 令:

$$T_2(\sigma,\mu)=e^{-\frac{\mu}{\sigma}}\sum_{i=1}^{k}(n-r_i+1)\left[t_{(r_i)}^{1/\sigma}-t_{(r_{i-1})}^{1/\sigma}\right].\tag{13}$$

由于: $T_2(\sigma,\mu)=(n-r_1+1)e^{\frac{\ln t_{(r_1)}-\mu}{\sigma}}+\sum_{i=2}^{k}(n-r_i+1)\left[e^{\frac{\ln t_{(r_i)}-\mu}{\sigma}}-e^{\frac{\ln t_{(r_{i-1})}-\mu}{\sigma}}\right]$, 于是: $T_2(\sigma,\mu)$ 为一枢轴量. 由此可以用 Monte-Carlo 模拟的方法得 $T_2(\sigma,\mu)$ 的期望值. 记 $K_{m2}=ET_2(\sigma,\mu)$, 由此采用逆矩估计的思想得参数 σ 的点估计 $\hat{\sigma}$, 即 σ 为如下方程的根:

$$T_1(\sigma)=K_{m1}.\tag{14}$$

由文献[3]易知方程(14)有唯一正数根. 进而得参数 μ 的点估计 $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu}=\hat{\sigma}\left\{\ln\sum_{i=1}^{k}(n-r_i+1)\left[t_{(r_i)}^{1/\hat{\sigma}}-t_{(r_{i-1})}^{1/\hat{\sigma}}\right]-\ln K_{m2}\right\}.\tag{15}$$

我们对 $n=10,k=6,r_i=1,3,4,6,8,10$; $n=20,k=10,r_i=2(2)20$ 两种场合进行了 10000 次 Monte-Carlo 模拟得 K_{m1} 及 K_{m2} 并列于表 4 内.

表 4　K_{m1} 和 K_{m2} 1000 次模拟结果

n	k	$r_i(i=1,\cdots,k)$	K_{m1}	K_{m2}
10	6	1,3,4,6,8,10	4.584920	14.777163
20	10	2(2)20	7.323024	30.280628

为了考察其点估计精度, 我们取参数真值 $\sigma=\mu=1(1)3$ 对点估计进行了1000次 Monte-Carlo 模拟. 模拟结果列于表5内, 从中可以看出模拟精度是令人满意的.

表 5　σ, μ 点估计的 1000 次模拟结果

参数真值			$\sigma=\mu=1$				$\sigma=\mu=2$				$\sigma=\mu=3$			
n	k	$r_i(i=1,\cdots,k)$	σ 均值	均方误差	μ 均值	均方误差	σ 均值	均方误差	μ 均值	均方误差	σ 均值	均方误差	μ 均值	均方误差
10	6	1,3,4,6,8,10	0.9699	0.0536	0.9306	0.1106	1.9398	0.2145	1.8612	0.4423	2.9098	0.4826	2.7918	0.9952
20	10	2(2)20	0.9771	0.0290	0.9675	0.0531	1.9542	0.1159	1.9349	0.2122	2.9313	0.2607	2.9024	0.4775

令 $\sigma^*=\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$, $\mu^*=\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma^*}$, 则有下面结果:

$$K_{rn1}=\sum_{j=1}^{k-1}\ln\frac{(n-r_1+1)e^{\frac{\ln t_{(r_1)}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}+\sum_{i=2}^{k}(n-r_i+1)\left[e^{\frac{\ln t_{(r_i)}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}-e^{\frac{\ln t_{(r_{i-1})}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}\right]}{(n-r_1+1)e^{\frac{\ln t_{(r_1)}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}+\sum_{i=2}^{j}(n-r_i+1)\left[e^{\frac{\ln t_{(r_i)}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}-e^{\frac{\ln t_{(r_{i-1})}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}\right]},$$

$$e^{\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma}}=\frac{1}{K_{rn2}}\left\{(n-r_1+1)e^{\frac{\ln t_{(r_1)}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}+\sum_{i=2}^{k}(n-r_i+1)\left[e^{\frac{\ln t_{(r_i)}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}-e^{\frac{\ln t_{(r_{i-1})}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}}}\right]\right\}.$$

由此 σ^*，μ^* 均为枢轴量，进而 $\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma}$ 也为枢轴量．我们可以用 Monte-Carlo 模拟得 σ^*，μ^* 的分位数，表 6 列出了上述两种场合下的 σ^*，μ^* 的分位数，其中模拟次数为 10000 次．如果取置信水平为 $1-\alpha$，σ^* 的分布的双侧分位数为 a_1 及 a_2，μ^* 的分布的双侧分位数为 b_1 及 b_2，由此参数 σ 的区间估计为：$\left[\frac{\hat{\sigma}}{a_2},\frac{\hat{\sigma}}{a_1}\right]$，参数 μ 的区间估计为：$[\hat{\mu}-b_2\hat{\sigma},\hat{\mu}-b_1\hat{\sigma}]$．为了考察其区间估计的精度，我们取参数真值为 $\sigma=\mu=1(1)3$，置信水平为 0.90，对 σ，μ 的区间估计进行了1000次 Monte-Carlo 模拟，并将结果列于表7内，从中可以看出：模拟精度是令人满意的．

表 6　σ^*，μ^* 的分位数

n	k	$r_i(i=1,\cdots,k)$		0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99
10	6	1,3,4,6,8,10	σ^*	0.4733	0.6050	0.6744	0.7269	0.7707	1.1769	1.2262	1.2850	1.3600	1.5227
			μ^*	−0.9663	−0.6711	−0.5224	−0.4304	−0.3653	0.1948	0.2680	0.3595	0.4970	0.7064
20	10	2(2)20	σ^*	0.6089	0.7058	0.7660	0.8016	0.8313	1.1293	1.1630	1.2058	1.2682	1.3878
			η^*	−0.6538	−0.4414	−0.3440	−0.2844	−0.2397	0.1555	0.2036	0.2682	0.3620	0.5536

表 7　σ，μ 区间估计的模拟结果

参数真值	n	k	$r_i(i=1,\cdots,k)$	σ				μ			
				下限均值	下限均方误差	上限均值	上限均方误差	下限均值	下限均方误差	上限均值	上限均方误差
$\mu=\sigma=1$	10	6	1,3,4,6,8,10	0.7100	0.1123	1.6032	0.5078	0.4486	0.4222	1.3815	0.4665
	20	10	2(2)20	0.7705	0.0704	1.3844	0.2048	0.6138	0.2050	1.3988	0.2165
$\mu=\sigma=2$	10	6	1,3,4,6,8,10	1.4201	0.4493	3.2063	2.0314	0.8971	1.6830	3.1631	1.8740
	20	10	2(2)20	1.5409	0.2815	2.7687	0.8193	1.2275	0.8199	2.7975	0.8058
$\mu=\sigma=3$	10	6	1,3,4,6,8,10	2.1301	1.0109	4.8095	4.5706	1.3457	3.8002	4.7446	4.2166
	20	10	2(2)20	2.3113	0.6334	4.1531	1.6435	1.8413	1.8448	4.1962	1.9481

对于两参数对数正态分布，可靠度函数为：

$$R(t)=1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)\text{，在时刻 }t\text{，}\tag{16}$$

于是其点估计为：

$$\hat{R}(t)=1-\Phi\left(\frac{\ln t-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\text{，在时刻 }t\text{．}\tag{17}$$

由此易得：$\hat{\mu}+\hat{\sigma}\Psi(1-\hat{R}(t))=\mu+\sigma\Psi(1-R(t))$，

$$R(t)=1-\Phi\left(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma}+\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\Psi(1-\hat{R}(t))\right)\tag{18}$$

由于 $\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$，$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma}$ 为一已知分布，把 $\hat{R}(t)$ 视为一常数，于是 $R(t)$ 的分布仅依赖于 $\hat{R}(t)$，故可以对(18)

式的分布用 Monte-Carlo 方法模拟,表 12,13 分别列出了上述 $n=10$,$n=20$ 场合下对 $R(t)=0.9999,0.9995,0.999,0.995$ 及 $0.99(0.01)0.50$ 的分位数表,模拟次数为 10000 次.

对两参数对数正态分布,失效率函数为:

$$\lambda(t)=\frac{\frac{1}{\sigma t}\varphi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)},\text{在时刻 } t, \tag{19}$$

于是其点估计为:

$$\hat{\lambda}(t)=\frac{\frac{1}{\hat{\sigma} t}\varphi\left(\frac{\ln t-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\ln t-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)},\text{在时刻 } t, \tag{20}$$

由此易得:$\lambda(t)=\dfrac{\frac{1}{\sigma t}\varphi(\Psi(1-R(t)))}{R(t)}$,

$$\frac{\lambda(t)}{\hat{\lambda}(t)}=\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\frac{R(t)}{1-\Phi\left(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma}+\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\Psi(1-\hat{R}(t))\right)}\frac{\varphi\left(\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma}+\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}\Psi(1-\hat{R}(t))\right)}{\varphi(\Psi(1-\hat{R}(t)))}. \tag{21}$$

由于$\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$,$\frac{\hat{\mu}-\mu}{\sigma}$为一已知分布,我们把 $\hat{R}(t)$ 视为一常数,于是$\frac{\lambda(t)}{\hat{\lambda}(t)}$的分布仅依赖于 $\hat{R}(t)$,故可以对(21)式的分布用 Monte-Carlo 方法模拟,表 14,15 分别列出了上述 $n=10$,$n=20$ 场合下对 $\hat{R}(t)=0.9999,0.9995,0.999,0.995$ 及 $0.99(0.01)0.50$ 的分位数表,模拟次数为 10000 次. 如果我们取置信水平为 $1-\alpha$,则可查上述分位数表中概率为 $1-\alpha$ 的分位数再乘上 $\hat{\lambda}(t)$ 即可视为失效率的置信上限.

为了考察可靠度、失效率置信限的精度,参数真值取为 $\mu=0$,$\sigma=1$,可靠度的真值取为 0.90,此时对应的时刻 $t=e^{\mu+\sigma\Psi(1-R)}$(为0.277453)失效率真值为:0.702318,置信水平取为0.90,对 R 的置信下限、λ 的置信上限进行了100次 Monte-Carlo 模拟(其中由于计算耗时巨大,故每次分位数只模拟了100次),模拟结果列在表16内,从中可以看出:模拟精度还是比较令人满意的.

表 8 R 置信下限、λ 置信下限的 100 次模拟结果

真值			$R=0.90$		$\lambda=0.702318$	
n	k	$r_i(i=1,\cdots,k)$	均值	均方误差	均值	均方误差
10	6	1,3,4,6,8,10	0.8297	0.0130	1.4606	0.6599
20	10	2(2)20	0.8456	0.0052	1.3777	0.4953

4 实 例

例1 取 $n=10$,$k=6$,$r_i=1,3,4,6,8,10$,参数真值 $m=\eta=1$,通过 Monte-Carlo 方法产生6个服从两参数 Weibull 的随机数如下:

$t_{(1)}=0.0529$,$t_{(3)}=0.2787$,$t_{(4)}=0.5149$,$t_{(6)}=0.5909$,$t_{(8)}=1.3334$,$t_{(10)}=1.7484$

(1)参数点估计为:上 $\hat{m}=1.1664$,$\hat{\eta}=0.8015$,m 的置信水平为 0.90 的区间估计为:[0.7259,1.8956],η 的置信水平为 0.90 的区间估计为:[0.5203,1.3758].

(2) 如果取可靠度 R 的真值为 0.90,而失效率 λ 的真值为 1,得可靠度 R 的点估计为 0.9105,失

效率 λ 的点估计为 1.0383,如果置信水平取为 0.90,则可靠度的置信下限为 0.8122,失效率的置信上限为 1.7056.

例2 取 $n=20, k=10, r_i=2(2)20$,参数真值 $m=\eta=1$,通过 Monte-Carlo 方法产生10个服从两参数 Weibull 的随机数如:$t_{(2)}=0.0709, t_{(4)}=0.1574, t_{(6)}=0.2490, t_{(8)}=0.4700, t_{(10)}=0.7161, t_{(12)}=0.8040, t_{(14)}=0.9650, t_{(16)}=1.3733, t_{(18)}=2.4780, t_{(20)}=3.0630$.

(1) 参数点估计为:$\hat{m}=0.9796, \hat{\eta}=0.9419$,$m$ 的置信水平为 0.90 的区间估计为:[0.6977,1.3952],η 的置信水平为 0.90 的区间估计为:[0.6439,1.4511].

(2) 如果取可靠度 R 的真值为 0.90,而失效率 λ 的真值为 1,我们得可靠度 R 的点估计为 0.8896,失效率 λ 的点估计为 1.0876,如果置信水平取为 0.90,则可靠度的置信下限为 0.8100、失效率的置信上限为 1.5720.

例3 我们取 $n=10, k=6, r_i=1,3,4,6,8,10$,参数真值 $\sigma=\mu=2$,通过 Monte-Carlo 方法产生6个服从两参数对数正态分布的随机数如下:

$t_{(1)}=0.1376, t_{(3)}=0.6714, t_{(4)}=1.4965, t_{(6)}=9.4771, t_{(8)}=35.2723, t_{(10)}=121.7594$.

(1) 参数点估计为:$\hat{\sigma}=2.3254, \hat{\mu}=1.3561$,$\sigma$ 的置信水平为 0.90 的区间估计为:[1.7024,3.8437],μ 的置信水平为 0.90 的区间估计为:[0.2004,2.9167].

(2) 如果取可靠度 R 的真值为 0.90,此时对应的时刻 t 为 0.5688,而失效率 λ 的真值为 0.17131,我们得可靠度 R 的点估计为 0.8786,失效率 λ 的点估计为 0.2441,如果置信水平取为 0.90,则可靠度的置信下限为 0.8273,失效率的置信上限为 0.3327.

参考文献:

[1] FEI H, KONG F, TANG Y. Estimations for two-parameter Weibull distributions and extreme-value distributions under multiply TYPE I censouing[J]. Commun Statist-therory Meth., 1995, 24(24): 2087-2104.

[2] 徐晓岭. 定数截尾缺失数据下 WEIBULL 分布的统计推断[J]. 数理统计与应用概率, 1997, 24(4): 363-370.

[3] 王炳兴. WEIBULL 分布的统计推断[J]. 应用概率统计, 1992, 4 (4): 357-364.

Statistcal Interence for Weibull and Lognormal Distributions under Type II Censoring

WANG Rong-hua

(College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Gives the point and the interval estimations of the parameters and the the reliability confidence lower limits and the confidence upper limits of effectiveness of failure for the Weibull and lognormal distributions under TYPE II censoring.

Key words: point estmation; interval estimation; reliability; effectiveness of faiture; confidence limits