第26卷第1期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 26, No. 1
1997年3月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Mar. 1997

对数正态分布场合恒定应力加速寿命试验的MLE和AMLE*

赵培东 费鹤良

提 要 在寿命分布为对数正态分布场合,由恒定应力加速寿合试验所获的数据,给出未知参数的近似极大似然估计.

关键词 对数正态分布;恒定应力加速寿命试验;极大似然估计;近似极大似然估计

中图法分类号 O213.2

0 引 言

恒定应力加速寿命试验(简称恒加试验),是将产品置于高应力下进行寿命试验,与正常应力水平下的寿命试验相比,节省大量时间和经费[1].

在寿命分布为对数正态分布场合,对恒加试验的数据进行分析处理,通常有极大似然估计(MLE)[2]、线性估计[3,4,5]等.参数的极大似然估计在实际计算时,需要由极大似然方程,通过数值迭代来获得.这是非常麻烦的,有时甚至很难得到似然方程的解.本文导出了未知参数的近似极大似然方程,给出了未知参数的显式估计量.第1节给出了数学模型,即对恒加试验提出的一些基本要求,第2节导出参数的极大似然估计,第3节给出近似极大似然估计(AMLE),第4节以一个实例,把本文的AMLE与文[3]的BLUE作了比较.

1 基本假定

对数正态分布恒加试验的3个基本假设[2]:

假定1 设$S_1 < S_2 < \cdots < S_k$为任一组应力水平,$S_0(< S_1)$为正常应力水平,在应力水平S_i下产品寿命T_i服从对数正态分布,即在应力水平S_i下,产品寿命T_i的概率密度函数为

$$g(t_i) = \frac{\lg e}{\sqrt{2\pi}\sigma t_i}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\lg t_i - \mu_i)^2\right\},$$

收稿日期:1997-02-01

* 国家自然科学基金资助项目

第一作者赵培东,男,硕士研究生,上海师范大学数学系,上海,200234

μ_i 为对数均值,对数方差保持不变记为 σ^2,

$$t_i > 0, \quad -\infty < \mu_i < \infty, \quad \sigma > 0, \quad i = 0,1,2,\cdots,k.$$

假定2 应力水平 S_i 下产品寿命的对数均值 μ_i 与 S_i 之间存在如下的函数关系:

$$\mu_i = a + b\psi(S_i),$$

其中 $\psi(\cdot)$ 是已知的函数.

设在应力水平 $S_i(i = 1,\cdots,k)$ 下,投入 n_i 个产品作寿命试验,直至有 r_i 个产品失效时停止,寿命数据为

$$t_{i1} \leqslant t_{i2} \leqslant \cdots \leqslant t_{ir_i}, \quad r_i \leqslant n_i, \quad i = 1,2,\cdots,k. \tag{1}$$

当 $r_i = n_i$ 时为完全寿命试验.在以下的讨论中,$t_{ij}(i = 1,2,\cdots,k,\ j = 1,2,\cdots,r_i)$ 作为独立观察值,而不作排序处理.

2 极大似然估计(MLE)

在上述假定下,当 $t_{ir_i} = \tau_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 时,即为 Type I 截尾.

令

$$x_{ij} = \lg t_{ij} \sim N(\mu_i,\sigma^2), \quad i = 1,2,\cdots,k, \quad j = 1,2,\cdots,n_i,$$

则寿命数据为

$$x_{i1} \leqslant x_{i2} \leqslant \cdots \leqslant x_{ir_i}, \quad r_i \leqslant n_i, \quad i = 1,2,\cdots,k, \tag{2}$$

基于(2)的似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^{k}\Big[\prod_{j=1}^{r_i} f_i(x_{ij})\Big]\cdot\big[1 - F_i(x_{ir_i})\big]^{n_i - r_i}, \tag{3}$$

其中 $f_i(x_{ij})$,$F_i(x_{ir_i})$ 是均值为 μ_i,方差为 σ^2 的正态分布的密度函数和分布函数.

记

$$z_{ij} = (x_{ij} - \mu_i)/\sigma, \quad i = 1,2,\cdots,k, \quad j = 1,2,\cdots,r_i,$$
$$z_{ir_i} \triangleq z_i, \quad \psi_i = \psi(S_i) \quad i = 1,2,\cdots,k,$$

则(3)式可写为

$$L = \sigma^{-r}\prod_{i=1}^{k}\Big[\prod_{j=1}^{r_i} f(z_{ij})\Big]\cdot\big[1 - F(z_i)\big]^{n_i - r_i}, \quad \sum_{i=1}^{k} r_i \triangleq r, \tag{4}$$

其中 $f(z_{ij})$,$F(z_i)$ 分别为标准正态分布的密度函数和分布函数.

由(4)得对数似然函数为

$$\ln L = -r\ln\sigma + \sum_{i=1}^{k}\Big\{\sum_{j=1}^{r_i}\ln f(z_{ij}) + (n_i - r_i)\ln\big[1 - F(z_i)\big]\Big\}. \tag{5}$$

由(5)得 a,b 和 σ 的似然方程为

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \sum_{i=1}^{k}\Big\{\sum_{j=1}^{r_i}\frac{f'(z_{ij})}{f(z_{ij})}\cdot\frac{-1}{\sigma} + (n_i - r_i)\frac{-f(z_i)}{1 - F(z_i)}\cdot\frac{-1}{\sigma}\Big\} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = \sum_{i=1}^{k}\Big\{\sum_{j=1}^{r_i}\frac{f'(z_{ij})}{f(z_{ij})}\cdot\frac{-\psi_i}{\sigma} + (n_i - r_i)\frac{-f(z_i)}{1 - F(z_i)}\cdot\frac{-\psi_i}{\sigma}\Big\} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=-\frac{r}{\sigma}+\sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r_i}\frac{f'(z_{ij})}{f(z_{ij})}\cdot\frac{-z_{ij}}{\sigma}+(n_i-r_i)\frac{-f(z_i)}{1-F(z_i)}\cdot\frac{-z_i}{\sigma}\right\}=0.$$

注意到 $f'(z_{ij})=-z_{ij}f(z_{ij})$，整理得

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r_i}z_{ij}+(n_i-r_i)\frac{f(z_i)}{1-F(z_i)}\right\}=0\\ \sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r_i}z_{ij}\psi_i+(n_i-r_i)\frac{f(z_i)\psi_i}{1-F(z_i)}\right\}=0\\ \sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r_i}z_{ij}^2+(n_i-r_i)\frac{f(z_i)z_i}{1-F(z_i)}\right\}=r.\end{cases}\tag{6}$$

从形式上，由(6)可得 a，b 和 σ 的数值解，但实际求解涉及到 (a,b,σ) 三维空间的搜索，很困难. 为此，我们给出近似极大似然估计(AMLE).

3　近似极大似然估计

除了完全样本外，似然方程(6)无显式解，但是可以在点 $\xi_i=F^{-1}(p_i)$ 处，对(6)中的函数 $\frac{f(z_i)}{1-F(z_i)}$ 作泰勒展开为[4~6]

$$\frac{f(z_i)}{1-F(z_i)}\approx\alpha_i+\beta_i z_i,\tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}p_i&=\frac{r_i}{n_i+1},\\ q_i&=1-p_i,\\ \alpha_i&=f(\xi_i)\{1+\xi_i^2-\xi_i f(\xi_i)/q_i\}/q_i,\\ \beta_i&=f(\xi_i)\{f(\xi_i)-q_i\xi_i\}/q_i^2.\end{aligned}\tag{8}$$

由(8)，容易看出 $\beta_i>0$. 利用(7)，可以把似然方程(6)近似为

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r_i}z_{ij}+(n_i-r_i)(\alpha_i+\beta_i z_i)\right\}=0\\ \sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r_i}z_{ij}\psi_i+(n_i-r_i)(\alpha_i+\beta_i z_i)\psi_i\right\}=0\\ \sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=1}^{r_i}z_{ij}^2+(n_i-r_i)(\alpha_i+\beta_i z_i)z_i\right\}=r,\end{cases}\tag{9}$$

把 $z_{ij}=(x_{ij}-\mu_i)/\sigma$ 代入(9)式(记 $(x_{ir_i}\triangleq x_i)$，化简整理得

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}x_{ij}-\sum_{i=1}^{k}r_i\mu_i+\sigma\sum_{k}^{i=1}(n_i-r_i)\alpha_i+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)x_i\beta_i-\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\mu_i\beta_i=0 \\
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}x_{ij}\psi_i-\sum_{i=1}^{k}r_i\mu_i\psi_i+\sigma\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i x_i\beta_i- \\
\qquad \sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i\mu_i\beta_i=0 \\
\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}x_{ij}^2+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)x_i^2\beta_i-2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}x_{ij}\mu_i-2\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)x_i\mu_i\beta_i+ \\
\sigma\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)x_i\alpha_i-\sigma\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\mu_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{k}r_i\mu_i^2+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\mu_i^2\beta_i=r\sigma^2
\end{cases}
\tag{10}
$$

令

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}x_{ij}+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)x_i\beta_i=D_1, \\
&\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\alpha_i=C_1, \\
&\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}x_{ij}\psi_i+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i x_i\beta_i=D_2, \\
&\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i\alpha_i=C_2, \\
&\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}x_{ij}^2+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)x_i^2\beta_i=D_3, \\
&\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)x_i\alpha_i=C_3,
\end{aligned}
$$

则(10)化为

$$
\begin{cases}
D_1-\sum_{i=1}^{k}r_i\mu_i-\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\mu_i\beta_i+C_1\sigma=0 \\
D_2-\sum_{i=1}^{k}r_i\mu_i\psi_i-\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i\mu_i\beta_i+C_2\sigma=0 \\
D_3-2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\mu_i x_{ij}-2\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)x_i\mu_i\beta_i+C_3\sigma-\sigma\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\mu_i\alpha_i+ \\
\sum_{i=1}^{k}r_i\mu_i^2+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\mu_i^2\beta_i=r\sigma^2.
\end{cases}
\tag{11}
$$

把 $\mu_i=a+b\psi_i$，代入(11)式(记 $\sum_{i=1}^{k}r_i\triangleq r$，$\sum_{i=1}^{k}n_i\triangleq n$)，化简整理得：

$$\begin{cases}\left[r+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\beta_i\right]a+\left[\sum_{i=1}^{k}r_i\psi_i+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i\beta_i\right]b=C_1\sigma+D_1 & (12)\\ \left[\sum_{i=1}^{k}r_i\psi_i+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i\beta_i\right]a+\left[\sum_{i=1}^{k}r_i\psi_i^2+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i^2\beta_i\right]b=C_2\sigma+D_2, & (13)\\ \left[r+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\beta_i\right]a^2+\left[\sum_{i=1}^{k}r_i\psi_i^2+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i^2\beta_i\right]b^2-r\sigma^2+ & \\ 2\left(\sum_{i=1}^{k}r_i\psi_i+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i\beta_i\right)ab-a\sigma C_1-b\sigma C_2-2D_1a-2D_2b+C_3\sigma+D_3=0. & (14)\end{cases}$$

把 (12) $\times a+$ (13) $\times b-$ (14) 整理得

$$r\sigma^2+D_1a+D_2b=C_3\sigma+D_3. \tag{15}$$

令

$$r+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\beta_i=m,$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k}\psi_ir_i+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i\beta_i\right]/m=B_1,$$

$$C_1/m=C_1',D_1/m=D_1',$$

$$\left[\sum_{i=1}^{k}r_i\psi_i^2+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\psi_i^2\beta_i\right]/(mB_1)=B_2,$$

$$C_2/(mB_1)=C_2',D_2/(mB_1)=D_2'.$$

联立(12),(13),(15)式得

$$\begin{cases}a+B_1b=C_1'\sigma+D_1' & (16)\\ a+B_2b=C_2'\sigma+D_2' & (17)\\ r\sigma^2+D_1a+D_2b=C_3\sigma+D_3, & (18)\end{cases}$$

把(17)－(16)整理得

$$b=\frac{(C_2'-C_1')\sigma+D_2'-D_1'}{B_2-B_1},$$

再把 (16) $\times B_2-$ (17) $\times B_1$ 整理得

$$a=\frac{(C_1'B_2-C_2'B_1)\sigma+D_1'B_2-D_2'B_1}{B_2-B_1},$$

令

$$A_{11}=\frac{C_1'B_2-C_2'B_1}{B_2-B_1},\qquad A_{12}=\frac{D_1'B_2-D_2'B_1}{B_2-B_1},$$

$$B_{11}=\frac{C_2'-C_1'}{B_2-B_1},\qquad B_{12}=\frac{D_2'-D_1'}{B_2-B_1},$$

则

$$a=A_{11}\sigma+A_{12}, \tag{19}$$

$$b=B_{11}\sigma+B_{12}. \tag{20}$$

把(19),(20)式代入(18)式得

$$r\sigma^2+(D_1A_{11}+D_2B_{11}-C_3)\sigma+D_1A_{12}+D_2B_{12}-D_3=0, \tag{21}$$

令

$$H_1 = r,$$
$$H_2 = D_1A_{11} + D_2B_{11} - C_3,$$
$$H_3 = D_1A_{12} + D_2B_{12} - D_3.$$

则(21)式化为

$$H_1\sigma^2 + H_2\sigma + H_3 = 0, \tag{22}$$

由(22)式解得

$$\hat{\sigma} = \frac{-H_2 + \sqrt{H_2^2 - 4H_1H_3}}{2H_1}. \tag{23}$$

把(23)式代入(19),(20)式得

$$\hat{a} = A_{11}\hat{\sigma} + A_{12}, \tag{24}$$
$$\hat{b} = B_{11}\hat{\sigma} + B_{12}, \tag{25}$$

则 a,b 和 σ 的 AMLE 为

$$\hat{a} = A_{11}\hat{\sigma} + A_{12},$$
$$\hat{b} = B_{11}\hat{\sigma} + B_{12},$$
$$\hat{\sigma} = \frac{-H_2 + \sqrt{H_2^2 - 4H_1H_3}}{2H_1}.$$

4 实 例

本例取自文[3]中例4.6.

例 为了考察某种微型电机在50℃贮存条件下的各种可靠性特征,特随机地抽取40部微型电机,分为4组,分别在4种温度

$T_1 = 190$℃, $T_2 = 220$℃, $T_3 = 240$℃, $T_4 = 260$℃

下作了4次高温贮存试验,对下列截尾子样用对数正态分布情形的 AMLE 作统计分析.

表 1 各温度下的试验数据

j	t_{1j}	t_{2j}	t_{3j}	t_{4j}
1	3610	1764	1175	600
2	4428	2150	1280	744
3	4690	2297	1521	744
4	5648	2436	1569	810
5	5815	2436	1617	912
6	6367	2650	1665	1128
7	6367	2887	1665	1320
8		3108	1713	1464
9			1761	1608
10				1896

先由表1中的试验数据，获得 a，b 和 σ 的第1次 AMLE，然后，以 AMLE 为初值，得到 a，b 和 σ 的第1次 MLE，再把 σ 的 MLE 作估计值，获得 a，b 和 σ 的第2次 AMLE，最后以第2次 AMLE 为初值，得到 a，b 和 σ 的第2次 MLE.

表2　a，b 和 σ 的2次 AMLE 与2次 MLE 和 BLUE 的比较

	第1次 AMLE	第1次 MLE	第2次 AMLE	第2次 MLE	BLUE
$\hat{a}$	−3.345012	−3.336874	−1.671455	−1.594378	−1.9244
$\hat{b}$	3224.764994	3337.947354	2329.128283	2453.453139	2538
$\hat{\sigma}$	1.118535	0.140977	0.140977	0.114540	0.1202

参　考　文　献

1　费鹤良. 加速试验及其统计分析的研究进展和评述. 全国第五届可靠性学术会议论文集. 北京：机械工业出版社，1995. 1～6

2　Nelson W. Accelerated Testing. New York：John wiley and sons，1990

3　茆诗松，王玲玲. 可靠性统计. 上海：华东师范大学出版社，1984. 186

4　濮晓尤，茆诗松. 对数正态分布场合恒加试验的数据分析与容忍限. 应用概率统计，1995，11(4)：385～388

5　截树森，费鹤良等. 可靠性试验及其统计分析. 北京：国防工业出版社，1983

6　Balakrishnan N，Clifford Cohen A. Order Statistics and Inference Estimation Methods. New York：Academic Press，INC，1990

AMLEs for Constant Stress Accelerated Life Testing under Lognormal Distribution

Zhao Peidong　　Fei Heliang

(Department of Mathematics)

Abstract　The approximate maximum likelihood estimators (AMLEs) are proposed to deal with the unknown parameters of life date collected from the constant stress accelerated life testing under life distribution is the lognormal distribution.

Key words　lognormal distribution；constant stress accelerated life testing；MLE；AMLE