多个角动量的耦合与角动量投影方法

杨迎春[1],陆 祺[1],郑仁蓉[1],朱顺泉[2]

(1. 上海师范大学 数理信息学院,上海 200234;2. 上海商学院 计算机与电气技术系,上海 201400)

摘 要:角动量耦合是量子力学的重要内容,而角动量投影是相关研究领域专业学术期刊论文的重要内容,两者有紧密的联系. 作者利用2个D函数的耦合与3个D函数的积分规则,讨论了2个,3个和4个角动量从非耦合表象到耦合表象的变换以及它们与角动量投影方法的一致性. 为科研中角动量投影方法和CG系数的数值计算提供了一种简便易行的、相互检验其正确性的方法.

关键词:角动量耦合;角动量投影;一致性;CG系数

中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-5137(2005)04-0032-05

在研究量子体系如原子、分子、原子核的性质时,不可避免地要涉及多个粒子角动量的求和,或称之为角动量耦合问题,因此,角动量耦合的计算方法成为角动量理论的主要内容之一. 另一方面,在量子多粒子体系的研究中,常会碰到用各类变换来计算物理体系中客观存在的各类关联作用,又可保持继续使用平均场理论的优越性. 为此,人们需要付出破坏体系对称性的代价,补救的办法是用投影来恢复其对称性. 例如:破坏了角动量守恒的对称性,就需要用角动量投影来恢复其相关的对称性,这就派生出所谓"角动量投影方法".

角动量耦合是量子力学的重要内容[4,5],角动量投影是相关研究领域专业学术期刊论文和书籍的重要内容[1-3,6],但二者一致性的论述却未见到. 作者针对轴对称形状的角动量态论述这种一致性. 这种研究给角动量投影方法和CG系数的数值计算提供了一种简便易行的、相互检验其正确性或相互替代的方法,对于扩展量子力学中有关角动量的内容,搭建基本理论与实际科研应用的桥梁也是一件很有意义的工作.

分别讨论2个,,3个和4个角动量从非耦合表象到耦合表象的变换,耦合后总角动量的投影公式,以及二者的一致性. 该讨论可以很容易推广到任意多个(n个)角动量的情况.

1 2个角动量的耦合与投影

1.1 角动量的耦合

根据角动量耦合理论有:

$$|j_1 k_1 j_2 k_2\rangle = \sum_I |Ik\rangle\langle Ik|j_1 k_1 j_2 k_2\rangle. \tag{1}$$

收稿日期:2005-05-29

基金项目:国家自然科学基金资助(10375001);上海市高校科技发展基金资助(03DZ03);上海市科技发展基金资助(025nm082);兰州重粒子加速器国家实验室原子核物理理论中心第三期课题基金资助.

作者简介:杨迎春(1973-),女,上海师范大学数理信息学院硕士研究生;郑仁蓉(1944-),女,上海师范大学数理信息学院教授.

其中 j_1, j_2 与 k_1, k_2 分别表示 2 个粒子的角动量和磁量子数，I, k 则表示耦合后的总角动量和磁量子数，且 $I = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \cdots, j_1 + j_2$，$k = k_1 + k_2$. 这里 $\langle Ik | j_1 k_1 j_2 k_2 \rangle$ 为 CG 系数，它是一个实数. (1)式中，每一个 I 对应一个 CG 系数，该系数的平方为系统处于总角动量为 I 状态的几率，即 $p = \langle Ik | j_1 k_1 j_2 k_2 \rangle^2$. 利用 CG 系数的表达式[1]编程，可通过计算机方便快捷地计算出 CG 系数的值. 在编程中阶乘可采用素因数分解的办法以提高精确度[1]. 若需计算大的角动量的耦合，可在程序中将素因数分解部分的素数范围相应扩大. 还可利用各种耦合几率和为 1 即：$\sum_I \langle Ik | j_1 k_1 j_2 k_2 \rangle^2 = 1$ 来检验程序的正确性.

1.2　角动量投影方法

根据角动量投影算符的定义[2]：

$$P_{mk}^I \equiv \frac{2I+1}{8\pi^2} \int D_{mk}^{I*}(\Omega) R(\Omega) \mathrm{d}\Omega \tag{2}$$

这里立体角的积分为 $\int \mathrm{d}\Omega \equiv \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\gamma \int_0^{\pi} \mathrm{d}\beta \sin(\beta)$. 在轴对称情况下，$P_{mk}^I$ 在 $|\varphi_k\rangle$ 表象下的矩阵元为[3]：

$$\langle \varphi_m | P_{mk}^I | \varphi_k \rangle = \frac{2I+1}{8\pi^2} \int D_{mk}^{I*}(\Omega) \langle \varphi_m | R(\Omega) | \varphi_k \rangle \mathrm{d}\Omega =$$
$$(I + \frac{1}{2}) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\beta \sin\beta d_{mk}^I(\beta) \langle \varphi_m | e^{-i\beta j_y} | \varphi_k \rangle. \tag{3}$$

对角矩阵元 $\langle \varphi_k | P_{kk}^I | \varphi_k \rangle$ 就等于 2 个角动量耦合为某一确定值 I 的几率，根据(3)式有：

$$\langle \varphi_k | P_{kk}^I | \varphi_k \rangle = (I + \frac{1}{2}) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\beta \, sin\beta d_{kk}^I(\beta) \langle \varphi_k | e^{-i\beta j_y} | \varphi_k \rangle. \tag{4}$$

对于 2 个角动量 j_1, k_1, j_2, k_2 耦合成总角动量为 I, k 的情况，(4)式中相关量的关系为：$|\varphi_k\rangle = |j_1 k_1\rangle |j_2 k_2\rangle$；$j_y = j_{1y} + j_{2y}$，将其代入 (4)式并注意到：

$$\langle j_2 k_2 j_1 k_1 | e^{-i\beta j_{1y}} \cdot e^{-i\beta j_{2y}} | j_1 k_1 j_2 k_2 \rangle = \langle j_1 k_1 | e^{-i\beta j_{1y}} | j_1 k_1 \rangle \cdot \langle j_2 k_2 | e^{-i\beta j_{2y}} | j_2 k_2 \rangle. \tag{5}$$

有：

$$\langle \varphi_k | P_{kk}^I | \varphi_k \rangle = (I + \frac{1}{2}) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\beta \sin\beta \, d_{kk}^I(\beta) \, d_{k_1 k_1}^{j_1}(\beta) d_{k_2 k_2}^{j_2}(\beta). \tag{6}$$

在用计算机编程积分时，为节省计算时间，常把积分分为 2 个部分，即 $\int_0^{\pi} = \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}$，将第 2 部分的被积函数作变量代换 $\beta \to \pi - \beta$，再利用 d 函数的性质可将(6)式的积分部分写为[3]：

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\beta \sin\beta d_{kk}^I(\beta) \langle \varphi_k | e^{-i\beta j_y} | \varphi_k \rangle + (-1)^{I-k} d_{k-k}^I(\beta) \langle \varphi_k | e^{-i\beta j_y} \varphi_{\bar{k}} \rangle.$$

其中 $|\varphi_{\bar{k}}>$ 为时间反演态，按定义为：

$$|\varphi_{\bar{k}}> = (-1)^{I-k} | I, -k \rangle = (-1)^{j_1 - k_1} \cdot (-1)^{j_2 - k_2} | j_1, -k_1 \rangle | j_2, -k_2 \rangle.$$

于是：

$$(-1)^{I-k} d_{k-k}^I(\beta) \langle \varphi_k | e^{-i\beta j_y} | \varphi_{\bar{k}} \rangle = (-1)^{I-j_1-j_2} d_{k,-k}^I(\beta) d_{k_1,-k_1}^{j_1}(\beta) d_{k_2,-k_2}^{j_2}(\beta).$$

其中利用了 $k = k_1 + k_2$；$(-1)^{I+j_1+j_2} = (-1)^{I-j_1-j_2}$. 这样(6)式又可表示为：

$$\langle \varphi_k | P_{kk}^I | \varphi_k \rangle =$$
$$(I + \frac{1}{2}) \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\beta \, sin\beta \{ d_k^I(\beta) d_{k_1 k_1}^{j_1}(\beta) d_{k_2 k_2}^{j_2}(\beta) + (-1)^{I-j_1-j_2} d_{k,-k}^I(\beta) d_{k_1,-k_1}^{j_1}(\beta) d_{k_2,-k_2}^{j_2}(\beta) \}. \tag{7}$$

由此可知，只要知道两粒子的角动量 j_1, k_1, j_2, k_2 及耦合后的某一总角动量 I，就可求出耦合为该总角动量 I 的几率 $\langle \varphi_k | P_{kk}^I | \varphi_k \rangle$.

上述计算在具体实施时，需要用计算机编程. 根据 d 函数表达式[5]先编一计算 d 函数的子程序以便

调用,然后再用 Fortran 库函数中的双精度高斯积分方法来计算(7)式.

1.3 角动量耦合与角动量投影的一致性

利用 D 函数积分公式[4]:

$$\int d\Omega\, D^{j_3*}_{m_3k_3}(\alpha\beta\gamma)D^{j_1}_{m_1k_1}(\alpha\beta\gamma)D^{j_2}_{m_2k_2}(\alpha\beta\gamma) = \frac{8\pi^2}{2j_3+1}\delta_{m_3,m_1+m_2}\delta_{k_3,k_1+k_2}\langle j_1m_1j_2m_2 \mid j_3m_3\rangle\langle j_1k_1j_2\,k_2 \mid j_3k_3\rangle. \tag{8}$$

在轴对称情形下 $m_i = k_i(i = 1,2,3)$;令 $k_3 = k$, $j_3 = I$ 上式变为:

$$\langle j_1\,k_1\,j_2\,k_2 \mid Ik\rangle^2 = \frac{2I+1}{8\pi^2}\int d\Omega\, D^{I*}_{kk}(\alpha\beta\gamma)D^{j_1}_{k_1k_1}(\alpha\beta\gamma)D^{j_2}_{k_2k_2}(\alpha\beta\gamma).$$

考虑到 $k = k_1 + k_2$ 及 $\int d\Omega \equiv \int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{2\pi}d\gamma\int_0^{\pi}d\beta\sin(\beta)$,上式可化为:

$$\langle j_1\,k_1\,j_2\,k_2 \mid Ik\rangle^2 = (I+\frac{1}{2})\int_0^{\pi}d\beta\sin\beta\, d^I_{kk}(\beta)d^{j_1}_{k_1k_1}(\beta)d^{j_2}_{k_2k_2}(\beta) \tag{9}$$

(9)式左边由(1)式知,恰好是2粒子 j_1,k_1 与 j_2,k_2 耦合为 I 的几率,而右边由式(6)知,正好为角动量投影算符在耦合态下的对角矩阵元,二者相等表明2种方法等价.

2 3个角动量的耦合与角动量投影

2.1 利用 CG 系数计算3个角动量耦合为某一确定角动量的几率

按照2个角动量的耦合理论,对于3个角动量的耦合,可以先把 j_1,j_2,j_3 3个角动量中的任意两个耦合成中间角动量,然后再把中间角动量与第3个角动量耦合成总角动量 I. 为此,不妨先把 j_1 与 j_2 耦合成中间角动量 j_{12},然后再将 j_{12} 与 j_3 耦合为 I,即:

$$\mid j_1\,k_1\,j_2\,k_2\,j_3\,k_3\rangle = \mid j_1\,k_1\,j_2\,k_2\rangle \mid j_3\,k_3\rangle = \sum_{j_{12},I}\mid Ik\rangle\langle Ik \mid j_{12}\,k_{12}j_3\,k_3\rangle\langle j_{12}\,k_{12} \mid j_1\,k_1\,j_2\,k_2\rangle, \tag{10}$$

其中 $C_1 = \langle j_{12}\,k_{12} \mid j_1\,k_1\,j_2\,k_2\rangle$ 是 j_1 与 j_2 耦合为 j_{12} 的 CG 系数;$C_2 = \langle Ik \mid j_{12}\,k_{12}\,j_3k_3\rangle$ 是 j_{12} 与 j_3 耦合为 I 的 CG 系数.(10)式表示耦合状态按总角动量 I 和中间角动量 j_{12} 进行了展开,对应于每一确定总角动量 I 态的几率 p 为:

$$p = \sum C_1^2\cdot C_2^2 = \sum_{j_{12}}\langle j_{12}\,k_{12} \mid j_1\,k_1\,j_2\,k_2\rangle^2\langle Ik \mid j_{12}\,k_{12}\,j_3\,k_3\rangle^2. \tag{11}$$

上式因为对 j_{12} 取和,所以 p 应与中间角动量 j_{12} 的选择无关,即与耦合顺序无关,因而中间耦合角动量可以是 j_{12},也可以是 j_{13} 或 j_{23}, p 的结果不会改变.

2.2 角动量投影方法

由2个角动量的耦合知道,在轴对称情形下,角动量投影算符在 $\mid\varphi_k\rangle$ 表象下的对角矩阵元 $\langle\varphi_k \mid P^I_{kk} \mid \varphi_k\rangle$ 即为耦合为总角动量 I 的几率. 对于3个角动量 j_1,k_1,j_2,k_2,j_3,k_3 耦合为总角动量 I,k 的情况,有: $\mid\varphi_k\rangle = \mid j_1\,k_1\rangle\mid j_2\,k_2\rangle\mid j_3\,k_3\rangle$; $j_y = j_{1y}+j_{2y}+j_{3y}$,将其代入(4)式,按照和2个角动量相同的方法可得到3个角动量耦合后的角动量投影算符的对角矩阵元为:

$$\langle\varphi_k \mid P^I_{kk} \mid \varphi_k\rangle = (I+\frac{1}{2})\int_0^{\pi}d\beta\,\sin\beta\, d^I_{kk}(\beta)d^{j_1}_{k_1k_1}(\beta)d^{j_2}_{k_2k_2}(\beta)d^{j_3}_{k_3k_3}(\beta). \tag{12}$$

和2个角动量耦合的情况一样,为了节省计算时间,可将上式写为:

$$\langle\varphi_k \mid P_{kk}{}^{\wedge}I \mid \varphi_k\rangle = (I+\frac{1}{2})\int_0^{\pi/2}d\beta\sin\beta\{d^I_{kk}(\beta)d^{j_1}_{k_1k_1}(\beta)d^{j_2}_{k_2k_2}(\beta)d^{j_3}_{k_3k_3}(\beta) + (-1)^{I-j_1-j_2-j_3}d^I_{k-k}(\beta)d^{j_1}_{k_1-k_1}(\beta)d^{j_2}_{k_2-k_2}(\beta)d^{j_3}_{k_3-k_3}(\beta)\}. \tag{13}$$

2.3 3个角动量耦合与角动量投影的一致性

按照 D 函数的耦合规则[4]:

$$D^{j_1}_{k_1m_1}(\alpha\beta\gamma)D^{j_2}_{k_2m_2}(\alpha\beta\gamma) =$$

$$\sum_{j} \langle j_1\, k_1\, j_2\, k_2 \mid j k_1 + k_2 \rangle \cdot \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 \mid j m_1 + m_2 \rangle \times D^{j}_{k_1+k_2, m_1+m_2}(\alpha\,\beta\,\gamma). \tag{14}$$

对于3个角动量耦合情况，利用(14)式与3个D函数的积分公式(8)，有：

$$\int \mathrm{d}\Omega\, D^{j_4 *}_{m_4 k_4}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_1}_{m_1 k_1}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_2}_{m_2 k_2}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_3}_{m_3 k_3}(\alpha\,\beta\,\gamma) =$$

$$\sum_{j_{12}} \langle j_1\, m_1\, j_2\, m_2 \mid j_{12}\, m_{12} \rangle \cdot \langle j_1\, k_1\, j_2\, k_2 \mid j_{12}\, k_{12} \rangle \times$$

$$\frac{8\pi^2}{2j_4+1} \delta_{m_4, m_1+m_2+m_3}\, \delta_{k_4, k_1+k_2+k_3} \langle j_{12}\, m_{12}\, j_3\, m_3 \mid j_4\, m_4 \rangle \langle j_{12}\, k_{12}\, j_3\, k_3 \mid j_4\, k_4 \rangle,$$

其中$m_{12} = m_1 + m_2$，$k_{12} = k_1 + k_2$，在轴对称情形，$m_i = k_i (i = 1,2,3,4)$；令$k_4 = k, j_4 = I$则上式变为：

$$\int \mathrm{d}\Omega\, D^{I *}_{kk}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_1}_{k_1 k_1}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_2}_{k_2 k_2}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_3}_{k_3 k_3}(\alpha\,\beta\,\gamma) =$$

$$\frac{8\pi^2}{2I+1} \sum_{j_{12}} \langle j_1\, k_1\, j_2\, k_2 \mid j_{12}\, k_{12} \rangle^2 \langle j_{12}\, k_{12}\, j_3\, k_3 \mid I k \rangle^2.$$

再利用$k = k_1 + k_2 + k_3$，可以得到：

$$\sum_{j_{12}} \langle j_1\, k_1\, j_2\, k_2 \mid j_{12}\, k_{12} \rangle^2 \langle j_{12}\, k_{12}\, j_3\, k_3 \mid I k \rangle^2 =$$

$$\left(I + \frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\beta \sin\beta\, d^{I}_{kk}(\beta)\, d^{j_1}_{k_1 k_1}(\beta)\, d^{j_2}_{k_2 k_2}(\beta)\, d^{j_3}_{k_3 k_3}(\beta). \tag{15}$$

上式左边由(11)式知，恰是所有可能耦合为总角动量I的几率和，右边则为耦合为I的角动量投影算符的对角矩阵元$\langle \varphi_k \mid P^I_{kk} \mid \varphi_k \rangle$，二者相等证明2种方法一致.

3　4个角动量的耦合与投影

3.1　利用CG系数计算4个角动量耦合为某一确定角动量的几率

仿照3个角动量的耦合方法，可以先把j_1, j_2耦合成中间角动量j_{12}，再把j_3, j_4耦合成中间角动量j_{34}，最后再将j_{12}与j_{34}耦合为总角动量I. 即：

$$\mid j_1\, k_1\, j_2\, k_2\, j_3\, k_3\, j_4\, k_4 \rangle = \sum_{I, j_{12}, j_{34}} \mid I k \rangle \cdot \langle I k \mid j_{12}\, k_{12}\, j_{34}\, k_{34} \rangle \cdot \langle j_{12}\, k_{12} \mid j_1 k_1\, j_2\, k_2 \rangle \cdot \langle j_{34}\, k_{34} \mid j_3\, k_3\, j_4\, k_4 \rangle, \tag{16}$$

其中$C_1 = \langle j_{12}\, k_{12} \mid j_1\, k_1\, j_2\, k_2 \rangle$是$j_1$与$j_2$耦合为$j_{12}$的$CG$系数；$C_2 = \langle j_{34}\, k_{34} \mid j_3\, k_3 j_4\, k_4 \rangle$是$j_3$与$j_4$耦合为$j_{34}$的$CG$系数；$C_3 = \langle I k \mid j_{12}\, k_{12} j_{34}\, k_{34} \rangle$是$j_{12}$与$j_{34}$耦合为$I$的$CG$系数. 所以4个角动量耦合为某一确定角动量$I$的几率为：

$$p = \sum C_1^2 \cdot C_2^2 \cdot C_3^2 = \sum_{j_{12}, j_{34}} \langle j_{12}\, k_{12} \mid j_1\, k_1\, j_2\, k_2 \rangle^2 \cdot \langle j_{34}\, k_{34} \mid j_3\, k_3\, j_4\, k_4 \rangle^2 \cdot \langle I k \mid j_{12}\, k_{12}\, j_{34}\, k_{34} \rangle^2. \tag{17}$$

同样上式对j_{12}与j_{34}求和后，p与j_{12}和j_{34}无关，也就是说耦合成某一确定总角动量的几率与耦合顺序无关.

3.2　4个角动量的投影方法

设4个角动量分别为$j_1, k_1, j_2, k_2, j_3, k_3, j_4, k_4$耦合后的角动量为$I, k$则按照与3个角动量相同的方法可得到4个角动量耦合情况下投影算符的对角矩阵元为：

$$\langle \varphi_k \mid P^I_{kk} \mid \varphi_k \rangle = \left(I + \frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi} \mathrm{d}\beta \sin\beta\, d^{I}_{kk}(\beta)\, d^{j_1}_{k_1 k_1}(\beta)\, d^{j_2}_{k_2 k_2}(\beta)\, d^{j_3}_{k_3 k_3}(\beta)\, d^{j_4}_{k_4 k_4}(\beta). \tag{18}$$

同样为节省计算机计算时间，用前面相同方法，(18)式可写为：

$$\langle \varphi_k \mid P^I_{kk} \mid \varphi_k \rangle = \left(I + \frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\beta \sin\beta \{ d^{I}_{kk}(\beta)\, d^{j_1}_{k_1 k_1}(\beta)\, d^{j_2}_{k_2 k_2}(\beta)\, d^{j_3}_{k_3 k_3}(\beta)\, d^{j_4}_{k_4 k_4}(\beta) +$$

$$(-1)^{I - j_1 - j_2 - j_3 - j_4} \cdot d^{I}_{k\,-k}(\beta)\, d^{j_1}_{k_1 - k_1}(\beta)\, d^{j_2}_{k_2 - k_2}(\beta)\, d^{j_3}_{k_3 - k_3}(\beta)\, d^{j_4}_{k_4 - k_4}(\beta) \}. \tag{19}$$

3.3　4个角动量耦合与角动量投影的一致性

两次应用D函数耦合规则及3个D函数积分公式来计算积分：

$$\int \mathrm{d}\Omega\, D^{j_5 *}_{m_5 k_5}(\alpha\beta\gamma) D^{j_1}_{m_1 k_1}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_2}_{m_2 k_2}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_3}_{m_3 k_3}(\alpha\,\beta\,\gamma) D^{j_4}_{m_4 k_4}(\alpha\,\beta\,\gamma).$$

先将 j_1,j_2耦合,再将 j_3,j_4耦合,在轴对称情形下可得到:

$$\sum_{j_{12},j_{34}} \langle j_1\,k_1\,j_2\,k_2 \mid j_{12}\,k_{12}\rangle^2 \cdot \langle j_3\,k_3\,j_4\,k_4 \mid j_{34}\,k_{34}\rangle^2 \cdot \langle j_{12}\,k_{12}\,j_{34}\,k_{34} \mid Ik\rangle^2 =$$

$$(I+\frac{1}{2})\int_0^{\pi} \mathrm{d}\beta \sin\beta\, d^I_{kk}(\beta)\, d^{j_1}_{k_1k_1}(\beta)\, d^{j_2}_{k_2k_2}(\beta)\, d^{j_3}_{k_3k_3}(\beta)\, d^{j_4}_{k_4k_4}(\beta). \tag{20}$$

联系(17)和(18)式可知,4 个角动量耦合与角动量投影是一致的.

4 总 结

通过 2 个,3 个,4 个角动量耦合的计算可知,原则上任意多个角动量的耦合都可如法炮制. 由(1),(10)和(16)式知, n 个角动量的耦合,可递推得到由($n-1$)个 CG 系数的($n-1$)重取和组成;由(7),(13)和(19)式知, n 个角动量耦合为某个确定角动量的投影几率可递推为由($n+1$) 个小 d 函数乘积的积分构成. 而角动量耦合与角动量投影方法的一致性,由(9),(15) 和(20) 可知是由两种方法所得某个确定总角动量所取的几率相等来证明的,即由递推得到的($n-1$)个 CG 系数平方乘积的 ($n-2$) 重取和与角动量投影算符的对角矩阵元相等而得证的. 角动量耦合与角动量投影方法一致性的理论基础是 2 个 D 函数的耦合规则及 3 个 D 函数的正交归一性.

参考文献:

[1] 赵伊君,张志杰. 角动量与原子能量[M]. 北京:科学出版社,1982.

[2] 郑仁蓉,廖继志. 原子核对称性投影自洽场方法[M]. 成都: 四川大学出版社,1993. 72 - 76.

[3] HARA K, SUN Y. Studies of high - spin states in rare - earth nucleiusing angular momentum projection method(II) . Signature inversion in doublyodd nuclei[J]. Nucl phys,1991,A531:221 - 236.

[4] 曾谨言. 量子力学卷 II(第三版)[M]. 北京:科学出版社,2001.

[5] 杨泽森. 高等量子力学[M]. 北京:北京大学出版社,1991.

[6] PETER RING,PETER SUCHUCK. The nuclear many-body problem[M]. New-York: Springer-Verlag,1980. 473 - 482.

The coupling of multi-angular momentum and angular momentum projection method

YANG Ying-chun[1], LU Qi[1], ZHENG Ren-rong[1], ZHU Shun-quan[2]

(1. Mathmatics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China;

2. Dept. of Computer and Electric Technology, Shanghai Business School, Shanghai 201400, China)

Abstract: The coupling of angular momentums is an important content in quantum mechanics. Angular momentum projection is also an important content in the academic journals for related research realm. They have close relationship between each other. We study the couplings for two, three and four angular momentums, the total angular momentum projections of them and the coincidence between them by using the formulas of two D functions coupling and the integration formula of three D functions. The research, provides an easier method for checking the correctness of both numerical calculations with each other.

Key words: coupling of angular momentums; angular momentum projection; coincidence; CG coefficient