上海师范学院学报 1984 年 第3期

多个威布尔分布形状参数的检验

徐锦龙 费鹤良

一、引 言

在第二类型截尾样本的情况下，[1]文对于多个威布尔分布总体的形状参数的检验，提出了一个仅依赖于形状参数的极大似然估计的统计量，并用 Monte-Carlor 方法给出了统计量分布的分位点值。由于威布尔分布参数的极大似然估计，一般需要用电子计算机来计算，所以使用时有一定的困难。本文用极值分布参数的最好线性无偏估计来获得威布尔分布参数的估计量（参考[2]），并据此构造出适当的统计量 $\hat{\sigma}$ 来检验 k 个威布尔分布总体形状参数是否相同的假设。此检验的统计量不依赖于未知参数，仅依赖于总体个数 k、样本容量和子样截尾数。在给定了这些数以后，当原假设成立时，可用 Monte-Carlor 方法给出其分位点值。

我们把这个统计量与文[1]中的类似统计量 $\hat{\beta}_{(k)}/\hat{\beta}_{(1)}$（其中 $\hat{\beta}_{(1)}\leqslant\hat{\beta}_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\hat{\beta}_{(k)}$）的倒数

$$\hat{\beta}=\hat{\beta}_{(1)}/\hat{\beta}_{(k)}$$

相比较，看出它们的下侧百分位点吻合得很好（见表3、表4）。而我们的统计量 $\hat{\sigma}$ 比文中的统计量容易计算，从而可知统计量 $\hat{\sigma}$ 的优点。

二、理 论 和 方 法

设有 k 个威布尔分布的总体 T_i，$i=1,2,\cdots k$，其分布函数为

$$F_i(t)=\begin{cases}1-exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{m_i}\right\} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0,\end{cases} \tag{1}$$

$i=1,2,\cdots,k$，其中 $m_i>0$ 为形状参数，$\eta_i>0$ 为特征寿命。

作变换 $x=\ln t$，则 $X_i=\ln T_i$ 有极值分布：

$$G_i(x)=1-exp\left\{-e^{\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}}\right\},\quad -\infty<x<+\infty, \tag{2}$$

$i=1,2,\cdots,k$。其中 $\mu_i=\ln\eta_i$ 为位置参数，$\sigma_i=1/m_i$ 为尺度参数。

对于 k 个威布尔分布总体，要检验形状参数 $m_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是否相同，要建立假设：

$$H_0:\ m_1=m_2=\cdots=m_k \tag{3}$$

由(2)式可知，只要检验 k 个极值分布总体的尺度参数 $\sigma_i\ i=1,2,\cdots,k$ 是否相同即可。于是假设(3)可改为

$$H_0:\ \sigma_1=\sigma_2=\cdots,=\sigma_k. \tag{4}$$

若从 k 个威布尔分布总体得到定数截尾样本，其次序统计量为

$$t_{i1}\leqslant t_{i2}\leqslant\cdots\leqslant t_{ir_i},\quad i=1,2,\cdots,k$$

于是 μ_i，σ_i 的最好线性无偏估计为（参考[2]）

$$\hat{\mu}_i=\sum_{j=1}^{r_i}D(n_i,r_i,j)\ln t_{ij} \tag{5}$$

本文于1983年3月5日收到，8月12日收到修改稿。

$$\hat{\sigma}_i = \sum_{j=1}^{r_i} C(n_i, r_i, j) \ln t_{ij} \tag{6}$$

其中 $D(n_i, r_i, j)$ 和 $C(n_i, r_i, j)$ 为无偏系数，其值有表可查[3]。

由 σ_i 的最好线性无偏估计的性质可知

$$\frac{\hat{\sigma}_i}{\sigma_i} = \sum_{j=1}^{r_i} C(n_i, r_i, j) \frac{\ln t_{ij} - \mu_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, k。$$

令 $y_{ij} = \dfrac{\ln t_{ij} - \mu_i}{\sigma_i}$，则对任何 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$，$y_{ij}, j = 1, 2, \cdots, r_i$，是标准极值分布的次序统计量。于是 $\hat{\sigma}_i/\sigma_i$ 是 r_i 个标准极值分布次序统计量的线性组合，

$$\frac{\hat{\sigma}_i}{\sigma_i} = \sum_{j=1}^{r_i} C(n_i, r_i, j) y_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, k。 \tag{7}$$

我们取

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(k; \ n_1, \cdots, n_k; \ r_1, \cdots, r_k) = \frac{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}\{\hat{\sigma}_i\}}{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}\{\hat{\sigma}_i\}} \tag{8}$$

作为检验 H_0 的统计量。

当 H_0：$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_k$ 成立时，

$$\hat{\sigma} = \frac{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}\{\hat{\sigma}_i/\sigma_i\}}{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}\{\hat{\sigma}_i/\sigma_i\}} = \frac{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}\left\{\sum\limits_{j=1}^{k_i} C(n_i, r_i, j) y_{ij}\right\}}{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant_i}\left\{\sum\limits_{j=1}^{r_i} C(n_i, r_i, j) y_{ij}\right\}},$$

可用模拟方法在计算机上算得统计量 $\hat{\sigma}$ 的下侧分位点值，即若给出了显著性水平 α 以后可求出 C_α 使

$$P(\hat{\sigma} < C_\alpha) = \alpha \tag{9}$$

这样，就可以对 H_0 进行检验：当统计量 $\hat{\sigma}$ 的观察值大于 C_α 时接受 H_0，否则拒绝 H_0。

对 k 个总体子样相同 $(n_1 = n_2 = \cdots = n_k)$、截尾数相同 $(r_1 = r_2 = \cdots = r_k)$ 的情况，附表给出了 $\alpha = 0.01$，0.05，0.1；$k = 2(1)6$，$n = 5(5)25$，$r = 3, 5, 10(5)n$ 时的 C_α 的值。

文后的附表（百分位点表）是用 Monte-Carlor 方法计算得到的。由 $k \times n$ 个标准极值分布的随机数算得统计量 $\hat{\sigma}$ 的一个值，重复进行 10000 次计算就可得到 $\hat{\sigma}$ 的近似分布，从而可得到表中的一个值，通过大量计算就可得此表。

如果检验结果为 σ_i 无显著差异，那么可用

$$\hat{m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} L_{r_i n_i}^{-1} - 1}{\sum\limits_{i=1}^{k} L_{r_i n_i}^{-1} \hat{\sigma}_i} \tag{10}$$

作为形状参数 m 的近似无偏估计[4]，其中 L_{Y_i}, n_i 为 $\hat{\sigma}_i$ 的方差系数，即 $V_{ar}(\hat{\sigma}_i) = L r_i n_i \sigma^2$，其值有表可查[3]。

例： 某种型号半导体器件的寿命服从威布尔分布，抽取 80 个样品，在四种不同温度应力下分别作寿命试验，每个应力下用 20 个样品，都做到有 15 个失效时为止。用最好线性无偏估计得到 $\sigma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的估计值分别为 $\hat{\sigma}_1 = 0.5$，$\hat{\sigma}_2 = 0.73$，$\hat{\sigma}_3 = 0.48$，$\hat{\sigma}_4 = 0.67$。在 $\alpha = 10\%$ 下检验四种温度应力下威布尔分而的形状参数是否有显著变化。

解：

$$H_0: \ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant 4}\{\hat{\sigma}_i\}}{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 4}\{\hat{\sigma}_i\}} = \frac{0.48}{0.73} \doteq 0.658$$

由附表3，在 $k=4, n_i=20, r_i=15, \alpha=0.1$ 时，$C_\alpha=0.456$，所以在 $\alpha=0.1$ 下，威布尔分布的形状参数无显著差异。

由（10）式得
$$\frac{1}{\hat{m}}=\frac{4\times 18.2017-1}{18.2017\sum_{i=1}^{4}\hat{\sigma}_i}\doteq 1.66$$

其中 $L_{r,n}^{-1}=L_{15,20}^{-1}=18.2017$。

参 考 文 献

［1］ John I. Mc Cool "Multiple Comparison for Weibull Parameters" IEEE. Tran on R Vol-24, No3 1975.

［2］ N. R. Mann, R. E. Schafer and Singpurwalla "Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data" John-Wily (1974)

［3］ 可靠性试验用表 第四机械工业部标准化所，国防工业出版社（1979）

［4］ 张建中、费鹤良、王玲玲"威布尔分布参数估计的精度比较"应用数学学报 Vol 5 No4 1982.

附表1　　$\alpha=0.01$ 时诸 C_α 的值

N	R	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
5	3	0.050	0.034	0.025	0.022	0.016
	5	0.188	0.142	0.116	0.106	0.098
10	3	0.044	0.027	0.021	0.019	0.016
	5	0.154	0.108	0.096	0.086	0.074
	10	0.352	0.308	0.282	0.268	0.250
15	3	0.046	0.030	0.023	0.018	0.015
	5	0.138	0.110	0.086	0.081	0.078
	10	0.320	0.274	0.244	0.226	0.215
	15	0.442	0.396	0.376	0.354	0.344
20	3	0.045	0.028	0.022	0.018	0.015
	5	0.142	0.104	0.090	0.078	0.076
	10	0.298	0.254	0.230	0.220	0.203
	15	0.404	0.352	0.340	0.320	0.312
	20	0.500	0.462	0.460	0.414	0.399
25	3	0.042	0.028	0.023	0.017	0.015
	5	0.136	0.106	0.088	0.078	0.072
	10	0.294	0.254	0.234	0.212	0.197
	15	0.404	0.356	0.336	0.312	0.300
	20	0.476	0.430	0.401	0.383	0.373
	25	0.542	0.497	0.478	0.460	0.448

附表 2

$\alpha=0.05$ 时诸 C_α 的值

N	R	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
5	3	0.118	0.078	0.060	0.050	0.040
	5	0.282	0.220	0.190	0.168	0.156
10	3	0.112	0.068	0.052	0.044	0.038
	5	0.242	0.184	0.154	0.138	0.122
	10	0.462	0.392	0.360	0.340	0.318
15	3	0.108	0.066	0.052	0.042	0.036
	5	0.234	0.178	0.144	0.132	0.116
	10	0.422	0.350	0.322	0.294	0.284
	15	0.548	0.480	0.444	0.426	0.410
20	3	0.106	0.068	0.050	0.040	0.036
	5	0.232	0.174	0.144	0.128	0.118
	10	0.412	0.346	0.306	0.288	0.262
	15	0.508	0.438	0.414	0.392	0.378
	20	0.600	0.540	0.508	0.482	0.470
25	3	0.100	0.066	0.050	0.040	0.034
	5	0.232	0.170	0.148	0.126	0.106
	10	0.402	0.336	0.302	0.280	0.262
	15	0.498	0.440	0.402	0.378	0.364
	20	0.568	0.516	0.478	0.454	0.436
	25	0.632	0.580	0.548	0.524	0.510

附表 3

$\alpha=0.1$ 时诸 C_α 的值

N	R	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
5	3	0.172	0.112	0.086	0.072	0.059
	5	0.346	0.271	0.232	0.208	0.196
10	3	0.162	0.102	0.074	0.064	0.054
	5	0.211	0.232	9.193	0.172	0.156
	10	0.524	0.441	0.404	0.780	0.356
15	3	0.160	0.098	0.076	0.062	0.054
	5	0.306	0.227	0.184	0.166	0.146
	10	0.487	0.405	0.366	0.336	0.322
	15	0.604	0.530	0.488	0.464	0.446

20	3	0.158	0.099	0.073	0.060	0.054
	5	0.304	0.222	0.180	0.160	0.146
	10	0.473	0.400	0.356	0.326	0.300
	15	0.572	0.494	0.456	0.432	0.414
	20	0.650	0 586	0.543	0.522	0.504
25	3	0.152	0.098	0.072	0.060	0.051
	5	0.300	0.218	0.184	0.159	0.144
	10	0.466	0.396	0.345	0.322	0.300
	15	0.564	0.486	0.444	0.418	0.402
	20	0.630	0.564	0.518	0.494	0.474
	25	0.682	0.620	0.586	0.562	0.548

附表 4

文献 [1] 中统计量$\frac{\hat{\beta}_{(k)}}{\hat{\beta}_{(1)}}$的倒数$\hat{\beta}=\frac{\hat{\beta}_{(1)}}{\hat{\beta}_{(k)}}$的下侧 10% 分位点表

N	r	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=10$
5	3	0.1834	0.1145	0.0909	0.0735	0.0450
	5	0.3610	0.2785	0.2364	0.2132	0.1524
10	3	0.1655	0.1009	0.0800	0.0649	0.0373
	5	0.3115	0.2298	0.1937	0.1757	0.1253
	10	0.5347	0.4484	0.3831	0.4048	0.3164
15	5	0 3125	0.2232	0.1894	0.1695	0.1191
	10	0.4950	0.4098	0.3717	0.3448	0.2809
	15	0.6060	0.5347	0.4878	0.4629	0.4081
20	5	0.3021	0.2202	0.1718	0.1602	0.1105
	10	0.4739	0.4000	0.3571	0.3333	0.2810
	15	0.5814	0.5102	0.4651	0.4347	0.3703
	20	0.6579	0.5882	0.5555	0.5263	0.4672
30	5	0.3049	0.2096	0.1858	0.1636	0.1117
	10	0.4770	0.3937	0.3448	0.3225	0.2577
	15	0.5617	0.4878	0.4405	0.4166	0.3546
	20	0.6211	0.5494	0.5128	0.4854	0.4166
	30	0.7092	0.6536	0.6211	0.5988	0.5434

On the Test of Shape Parameters of Several Weibull Distributions

Xu Jinlong Fei Heliang

Abstract

In the case of the Type Ⅱ censored sampling from the Weibull distributions, reference[1] gives a method based on the maximum likelihood estimators of parameters to test shape parameters of several Weibull distributions. The purpose of this paper is to present a method for obtaining the estimators of the Weibull distributions parameters by the best linear unbiased estimators of the extremum distributions parameters and to construct a suitable statistic to test whether shape parameters in several Weibull distributions are same or not. The method in this paper is easier to realize than the one used in[1]. Three tables are also offered. With which you can do the test easily.