

## 形状记忆合金的细观力学本构模型\*

周博 王振清 梁文彦

(哈尔滨工程大学建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

**摘要** 定义了一个能反映形状记忆合金超弹性和形状记忆效应的概念: 形状记忆因子. 利用相变过程中自由能与马氏体体积分数之间的微分关系, 推导了形状记忆因子演化方程. 从细观力学角度建立了一个考虑马氏体择优取向过程的形状记忆合金三维本构模型. 与功能相同的现有模型相比, 该模型具有更简单的数学表述和清晰的物理意义.

**关键词** 形状记忆合金, 形状记忆因子, 演化方程, 本构模型

**中图分类号** TG139

**文献标识码** A

**文章编号** 0412-1961(2006)09-0919-06

## A MICROMECHANICAL CONSTITUTIVE MODEL OF SHAPE MEMORY ALLOYS

ZHOU Bo, WANG Zhenqing, LIANG Wenyan

School of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001

Correspondent: ZHOU Bo, associate professor, Tel: (0451)82569879, E-mail: zhoubo@hrbeu.edu.cn

Manuscript received 2005-12-12, in revised form 2006-04-26

**ABSTRACT** The conception of shape memory factor is defined to describe the superelasticity and shape memory effect of shape memory alloys. From the differential relationship between martensite fraction and free energy during phase transformation, a shape memory factor evolution equation is established. Based on micromechanics theory, a 3-dimension constitutive model with considering the process of martensitic reorientation is developed, which possesses simpler mathematics form and clearer physics meaning than the previous models with the same functions.

**KEY WORDS** shape memory alloy, shape memory factor, evolution equation, constitutive model

近年来形状记忆合金作为一种新型智能材料, 以其独特的超弹性和形状记忆效应, 以及优良的理化性能和生物相容性, 在不同工程领域中应用日趋广泛. 从 Müller<sup>[1]</sup>构造了第一个超弹性体的相变模型至今, 对形状记忆合金本构行为的理论研究取得了巨大进展. Tanaka<sup>[2]</sup>利用 Magee<sup>[3]</sup>关于铁系合金马氏体转变的一维形核动力学方程推导了指数型的相变方程, 根据热力学基本定理, 建立了一维增量型本构模型. Liang 等<sup>[4]</sup>在 Tanaka 工作的基础上, 构造了余弦型相变方程, 假设形状记忆合金弹性模量为常数, 得到了一维全量型本构模型. Boyd 等<sup>[5]</sup>采用指数型相变方程, 将总应变分解为弹性应变、相变应变 (本文称为形状记忆应变) 和温度应变, 提出了一个三维本构模型. Sun 等<sup>[6]</sup>采用指数型相变方程, 基于细观力学、不可逆热力学和对微结构物理机制的分析, 较好

地解释了形状记忆合金在任意非比例加载下的超弹性和形状记忆效应的宏观现象和细观机制. 郑雁军等<sup>[7]</sup>基于马氏体体积分数和相变自由能间的线性微分关系, 建立了正弦型相变方程. Peng 等<sup>[8]</sup>采用指数型相变方程, 根据形状记忆合金中相的组成及其不同温度和应力水平下的动态变化, 建立了一个三维本构模型. 李海涛等<sup>[9]</sup>采用指数型相变方程, 假设形状记忆合金由马氏体相和奥氏体相动态组成, 其行为是两相各自行为的动态组合, 采用经典塑性理论, 建立了一个三维本构模型. 郭扬波等<sup>[10]</sup>在三维线性热弹性相变模型<sup>[11]</sup>的基础上, 并考虑应变率对相变阻力的影响, 建立了一维率相关的相变方程. 在前述的各本构模型中, 都没有考虑材料变形过程中的马氏体择优取向. Brinson<sup>[12]</sup>将马氏体体积分数分成温度诱发的和应力诱发的两部分, 在余弦型相变方程的基础上构造了一个新的余弦型相变方程, 建立了一个考虑马氏体择优取向的一维本构模型, 但模型的相变方程相对复杂. 朱祎国等<sup>[13]</sup>采用指数型相变方程, 给出在不同相变条件下相变应变的表达式, 建立了一个考虑马氏体择优取向的本构模型, 但由于模型中含有微分量, 物理意义不直观,

\* 哈尔滨工程大学基础基金资助项目 002020260707

收到初稿日期: 2005-12-12, 收到修改稿日期: 2006-04-26

作者简介: 周博, 男, 1972年生, 副教授

因此不便于实际应用. 本研究在文献 [5, 7, 12, 13] 工作的基础上, 定义了形状记忆因子的概念来反映形状记忆合金的超弹性和形状记忆效应, 利用相变过程中自由能和马氏体体积分数的线性微分关系, 推导了形状记忆因子演化方程, 从细观力学角度建立了一个考虑马氏体择优取向过程的形状记忆合金三维本构模型, 与功能相同的现有模型相比, 本模型具有简单的数学表述和清晰的物理意义.

## 1 形状记忆因子

无应力状态下形状记忆合金的 4 个临界温度 ——  $M_s$ ,  $M_f$  和  $A_s$ ,  $A_f$  分别为马氏体和奥氏体相变的开始温度和结束温度, 单位均为 K. 对于大多数形状记忆合金  $M_s < A_s$ , 且温度在  $M_s < T < A_s$  范围内, 马氏体和奥氏体可以共存. 形状记忆合金和普通金属弹性材料主要区别在于形状记忆合金具有独特的形状记忆效应和超弹性效应, 这两种效应的产生与能量耗散过程有关, 而能量耗散过程又可以用内变量来描述. 本文将描述形状记忆合金的形状记忆效应和超弹性效应的内变量定义为形状记忆因子  $\eta$ , 它是一个变化范围在 0 与 1 之间的标量, 具体的物理意义作如下解释:

如图 1a 所示, 在温度  $T < A_s$  时, 对形状记忆合金加载, 当应力升高到一定值时, 材料开始进入形状记忆产生过程, 在这个过程中形状记忆因子逐渐增大, 并有较大的形状记忆应变产生. 且产生的形状记忆应变是稳定的, 在卸载过程中形状记忆因子保持不变, 形状记忆应变转变为残余应变保留下来. 当对形状记忆合金加热到  $T > A_f$  时, 残余应变完全恢复, 此即形状记忆效应.

如图 1b 所示, 当  $T > A_f$  时, 对形状记忆合金加载, 当应力升高到一定值时, 材料开始进入形状记忆产生过程, 在这一过程中形状记忆因子逐渐增大, 并有较大的形状记忆应变产生, 且产生的形状记忆应变是不稳定的, 在卸载过程中当载荷降低到一定值时, 形状记忆合金开始进入形状记忆效应消退过程, 在这个过程中, 形状记忆因子逐渐减少, 形状记忆应变将逐渐恢复, 在卸载结束时, 形状记忆应变全部恢复, 没有残余应变出现, 即为形状记忆合金的超弹性效应.

如图 1c 所示, 在  $A_s < T < A_f$  时, 对形状记忆合金加载, 当应力升高到一定值时形状记忆合金进入形状记忆产生过程, 形状记忆因子逐渐增大, 并有较大的形状记忆应变产生, 且产生的形状记忆应变是不稳定的, 在卸载过程中当应力降低到一定值时, 进入形状记忆消退过程, 形状记忆因子逐渐减小, 形状记忆应变逐渐恢复. 在卸载结束时, 部分形状记忆应变恢复, 部分转变为残余应变而保留下来. 当材料加热到  $T > A_f$  时, 残余应变完全恢复, 此时材料表现为部分超弹性效应.

引入形状记忆因子的优点是: 利用形状记忆因子能够描述形状记忆合金的马氏体择优取向过程, 即形状记忆

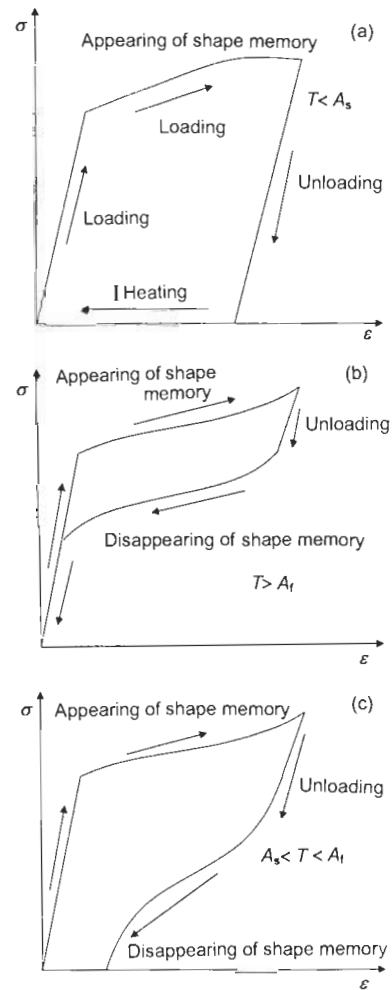


图 1 形状记忆合金的超弹性和形状记忆效应

Fig.1 Superelasticity and shape memory effect of shape memory alloy

- (a) shape memory effects
- (b) superelasticity effect
- (c) partial superelasticity

合金由孪晶马氏体向非孪晶马氏体转变的过程. 在温度  $T < A_s$  时, 形状记忆合金可能处于孪晶马氏体或奥氏体状态, 在外力的作用下可发生马氏体择优取向过程或马氏体相变过程 (由奥氏体向马氏体转变的过程). 马氏体择优取向过程和马氏体相变过程都是形状记忆产生过程, 则形状记忆因子的变化过程既反映了马氏体的择优取向过程又反映马氏体相变过程, 而在马氏体的择优取向过程中马氏体的体积分数不变, 因此无法通过马氏体体积分数来描述形状记忆合金的马氏体择优取向过程.

## 2 形状记忆演化方程

图 2 为示差扫描热量分析 (DSC) 实验测定的马氏体相变过程中的热流 - 温度曲线 (其中  $h(T)$  为马氏体相变

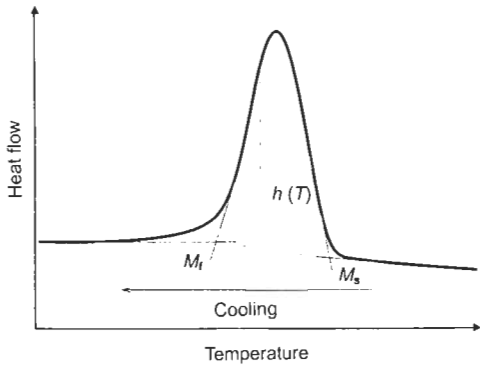


图 2 马氏体相变过程中的 DSC 曲线

Fig.2 DSC curves of conversion to martensite

过程中的热流 - 温度曲线函数). 若用  $\Delta Q$  表示马氏体相变过程中的热量变化, 则有

$$h(T) = \frac{d\Delta Q}{dT} \quad (1)$$

形状记忆合金在马氏体相变过程中, 热量变化  $\Delta Q$ 、化学焓变  $\Delta H$  和弹性储能  $\Delta E$  满足下列关系:

$$\Delta H = \Delta Q + \Delta E \quad (2)$$

根据文献 [14]

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta S \cdot (M_f - M_s) \quad (3)$$

式中,  $\Delta S$  为马氏体相变过程中的熵变, 在相当大的温度和应力范围内为常数. 当不存在外力时, 马氏体相变过程中自由能变化

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S \quad (4)$$

根据式 (2—4) 可以得到  $\Delta G$  和  $\Delta Q$  之间存在以下微分关系:

$$\frac{d\Delta G}{dT} = \frac{d\Delta Q}{dT} - \Delta S \quad (5)$$

在马氏体相变过程中, 形状记忆因子与自由能变化有如下的线性微分关系:

$$\frac{d\eta}{dT} = k \frac{d\Delta G}{dT} + C_1 \quad (6)$$

式中,  $k$  和  $C_1$  均为常数. 将式 (1, 5) 代入式 (6), 得

$$\frac{d\eta}{dT} = kh(T) + C_2 \quad (7)$$

式中,  $C_2 = C_1 - k\Delta S$ .

模拟马氏体相变过程的热流 - 温度曲线如下:

$$h(T) = B \left[ 1 - \left( \frac{T - m_0}{m} \right)^2 \right] \quad (8)$$

式中,  $m_0 = (M_s + M_f)/2, m = (M_f - M_s)/2$ . 将式 (8) 代入式 (7), 然后对式 (7) 积分并考虑下列边界条件:

$\eta(M_s) = 0; \eta(M_f) = 1$ ; 当  $T$  为  $M_s$  或  $M_f$  时,  $d\eta/dT = 0$ , 可得到在温度作用下描述马氏体相变过程的形状记忆演化方程如下:

$$\eta = \frac{3}{4} \left[ \left( \frac{T - m_0}{m} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{T - m_0}{m} \right)^3 \right] + \frac{1}{2} \quad (M_s > T > M_f) \quad (9a)$$

同理, 可以得到在温度作用下描述马氏体逆相变过程的形状记忆演化方程如下:

$$\eta = -\frac{3}{4} \left[ \left( \frac{T - a_0}{a} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{T - a_0}{a} \right)^3 \right] + \frac{1}{2} \quad (A_s < T < A_f) \quad (9b)$$

式中,  $a_0 = (A_s + A_f)/2, a = A_f - A_s$ .

图 3 为 Brinson<sup>[12]</sup> 给出的临界应力与温度的关系曲线 (其中  $C_A, C_M, \sigma_f^{cr}$  和  $\sigma_s^{cr}$  均为反映形状记忆合金材料特性的常数). 综合考虑温度作用下形状记忆演化方程 (式 (9)) 和临界应力与温度的关系曲线 (图 3), 并利用等效应力的概念, 得到以下在温度和复杂应力状态下的形状记忆因子演化方程.

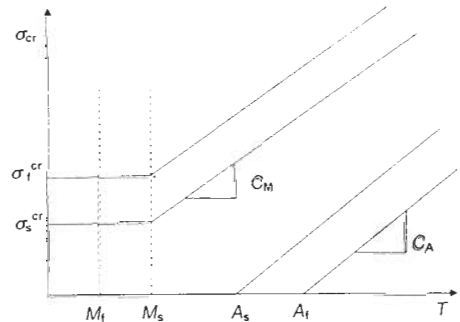


图 3 临界应力与温度的关系曲线 [12]

Fig.3 Relationship of critical stress ( $\sigma_{cr}$ ) and temperature ( $T$ ) [12]

(1) 形状记忆因子的产生过程 (即马氏体相变过程或马氏体的择优取向过程) 为

$$\text{当 } \sigma_s^{cr} + C_M(T - M_s)_+^1 < \bar{\sigma} < \sigma_f^{cr} + C_M(T - M_s)_+^1, \text{ 则}$$

则

$$\eta = \frac{3}{4} \left[ \frac{\bar{\sigma} - s_0 - C_M(T - M_s)_+^1}{s} \right] - \frac{1}{4} \left[ \frac{\bar{\sigma} - s_0 - C_M(T - M_s)_+^1}{s} \right]^3 + \frac{1}{2} \quad (10a)$$

(2) 形状记忆因子的消退过程 (即马氏体的逆相变过程) 为

当  $C_A(T - A_s) > \bar{\sigma} > C_A(T - A_f)$  且  $T > A_s$ , 则

$$\eta = \eta_u \left\{ \frac{3}{4} \left[ \frac{\bar{\sigma} - C_A(T - a_0)}{C_A a} \right] - \frac{1}{4} \left[ \frac{\bar{\sigma} - C_A(T - a_0)}{C_A a} \right]^3 + \frac{1}{2} \right\} \quad (10b)$$

式中,  $s = (\sigma_f^{cr} - \sigma_s^{cr})/2$ ,  $s_0 = (\sigma_f^{cr} + \sigma_s^{cr})/2$ ;  $\eta_0$  为卸载开始时形状记忆因子的初始值;  $\bar{\sigma}$  为等效应力,  $\bar{\sigma} = [(3/2)\bar{\sigma}'_{ij}\bar{\sigma}'_{ij}]^{1/2}$ , 其中  $\bar{\sigma}'_{ij}$  为偏应力张量. 式 (10a) 中的  $(T - M_s)_+^n$  为跳跃函数, 定义如下:

$$(T - M_s)_+^n = \begin{cases} (T - M_s)^n & T > M_s \\ 0 & T \leq M_s \end{cases} \quad (11)$$

在整个加载和卸载过程中, 形状记忆因子  $\eta$  和马氏体体积分数  $\varphi$  有如下线性关系:

$$\varphi = \varphi_0 + (1 - \varphi_0)\eta \quad (12)$$

式中,  $\varphi_0$  为马氏体体积分数在加载开始的初始值.

比较形状记忆因子演化方程 (式 (10a, b)) 与文献 [12] 中功能相同的 Brinson 相变方程 (文献 [12] 中的式 (22a—e) 和式 (23a, b)) 可知, 本研究的形状记忆演化方程具有简洁的数学表述和清晰的物理意义, 能更有效地描述形状记忆合金的超弹性和形状记忆效应.

### 3 本构模型

形状记忆合金的相有马氏体和奥氏体, 可以看作弹性复合材料, 由 Hill [15] 的“直接法”可以得到形状记忆合金的弹性模量

$$D_{ijkl} = D_{ijkl}^A + \varphi(D_{ijmn}^M - D_{ijmn}^A)\bar{A}_{mnkl} \quad (13)$$

式中,  $D_{ijmn}^M$  和  $D_{ijmn}^A$  分别为马氏体和奥氏体的弹性模量, MPa;  $\bar{A}_{mnkl}$  为总的应变集中张量, 根据文献 [13] 其值可简化取为  $I_{mnkl}$ . 热膨胀系数

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^A + \varphi(\alpha_{ij}^M - \alpha_{ij}^A) \quad (14)$$

式中,  $\alpha_{ij}^A$  和  $\alpha_{ij}^M$  分别为奥氏体和马氏体的热膨胀系数,  $K^{-1}$ .

形状记忆合金的总应变  $\varepsilon_{ij}$  可以分解为弹性应变  $\varepsilon_{ij}^e$ 、形状记忆应变  $\varepsilon_{ij}^{tr}$  和热膨胀应变  $\varepsilon_{ij}^\alpha$ , 即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{tr} + \varepsilon_{ij}^\alpha \quad (15)$$

根据广义 Hook 定律

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e \quad (16)$$

将文献 [5] 中的马氏体体积分数按式 (12) 替换为形状记忆因子  $\eta$ , 得到形状记忆应变

$$\varepsilon_{ij}^{tr} = \frac{3\eta}{2\bar{\sigma}}\varepsilon_L\sigma'_{ij} \quad (17)$$

式中, 材料常数  $\varepsilon_L$  为最大残余应变, 在一维情况下可以通过实验测得. 在温度  $T < A_s$ , 且材料初始状态为奥氏体下加载,  $\varepsilon_L$  对应材料全部转化为非孪晶马氏体后卸载得到的残余应变. 材料的热膨胀应变

$$\varepsilon_{ij}^\alpha = \alpha_{ij}(T - T_0) \quad (18)$$

综合考虑式 (15—18), 可得到如下形状记忆合金的本构方程:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}[\varepsilon_{kl} - \frac{3\eta}{2\bar{\sigma}}\varepsilon_L\sigma'_{ij} - \alpha_{kl}(T - T_0)] \quad (19)$$

本构方程式 (19) 和形状记忆因子演化方程式 (10) 共同构成了本研究建立的基于形状记忆因子并考虑了马氏体择优取向的形状记忆合金本构模型, 应用该模型可以有效地描述形状记忆合金在各种情况下的超弹性和形状记忆效应.

比较本构方程 (本文的式 (19)) 和文献 [13] 中的本构方程 (文献 [13] 中的式 (7, 8, 12)) 可知, 本研究的本构方程由于不含微分量, 比文献 [13] 中的本构方程物理意义直观, 更便于实际应用.

### 4 数值算例

在单向应力作用下, 应用本研究建立的三维本构模型和功能相同的 Brinson 一维本构模型, 在相同情况下分别计算了在不同温度时的应力 - 应变曲线, 数值计算中所用到的形状记忆合金的材料常数见表 1.

图 4a 为应用本构模型式 (10—19), 在一维情况下计算的形状记忆合金于不同温度下的应力 - 应变曲线. 当温度  $T=338\text{ K}$  ( $T > A_f$ ),  $T=318\text{ K}$  ( $A_s < T < A_f$ ) 和  $T=298\text{ K}$  ( $T < A_s$ ) 时, 材料的初始状态为奥氏体, 卸载应变  $\varepsilon_0=0.08$ .

在  $T=338\text{ K}$  时, 加载过程中应力达到一定临界值时, 材料进入形状记忆产生过程 (马氏体相变过程), 形状记忆因子和形状记忆应变从 0 开始逐渐增加, 同时产生较大的形状记忆应变. 卸载过程中, 当应力降低到一临界

表 1 Ni-Ti 形状记忆合金的材料参数

Table 1 Parameters used in calculation for Ni-Ti shape memory alloy

$D^A$	$D^M$	$\alpha^A$	$\alpha^M$	$M_f$	$M_s$	$A_s$	$A_f$	$C_M$	$C_A$	$\sigma_s^{cr}$	$\sigma_f^{cr}$	$\varepsilon_L$
$10^3\text{ MPa}$	$10^3\text{ MPa}$	$10^{-6}\text{ K}^{-1}$	$10^{-6}\text{ K}^{-1}$	K	K	K	K	MPa/K	MPa/K	MPa	MPa	
67	230	11.0	6.6	282.0	291.4	307.5	322.0	8.0	13.8	100	170	0.067

Note:  $D^A, D^M$ —elasticity modulus;  $\alpha^A, \alpha^M$ —heat expansion coefficients;  $M_f, M_s, A_s, A_f$ —transformation temperatures;  $C_M, C_A, \sigma_s^{cr}, \sigma_f^{cr}$ —transformation constants;  $\varepsilon_L$ —maximum residual strain

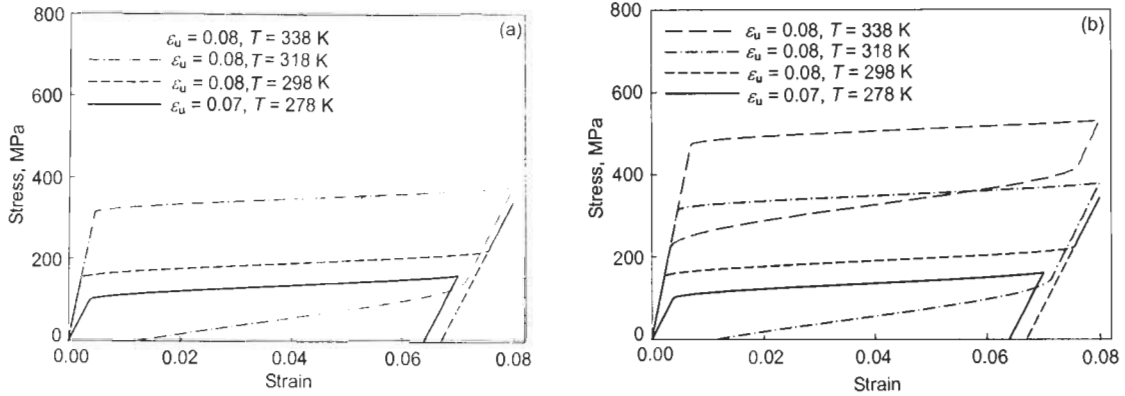


图 4 本研究新模型和 Brinson 模型的应力 - 应变曲线  
 Fig.4 Stress-strain curves of new model in this work (a) and Brinson's model (b)

值时, 材料进入形状记忆消退过程 (马氏体逆向变过程), 形状记忆因子开始逐渐降低、形状记忆逐渐恢复, 卸载结束时, 形状记忆因子降到 0, 形状记忆应变全部恢复, 材料全部转变为奥氏体, 无残余应变, 形状记忆合金表现为典型的超弹性.

在  $T=318 \text{ K} (A_s < T < A_f)$  时, 加载过程中当应力达到一定临界值时, 材料进入形状记忆产生过程 (马氏体相变过程), 形状记忆因子和形状记忆应变从 0 开始逐渐增加, 同时产生较大的形状记忆应变. 卸载过程中, 当应力降低到一定临界值时, 材料进入形状记忆消退过程 (马氏体逆向变过程), 形状记忆因子开始逐渐降低, 形状记忆逐渐恢复, 卸载结束时, 形状记忆应变部分恢复, 材料全部转变为奥氏体和马氏体的混合体, 形状记忆合金表现为部分超弹性.

在  $T=298 \text{ K} (T < A_s)$  时, 加载过程中当应力达到一定临界值时, 材料进入形状记忆产生过程 (马氏体相变过程), 形状记忆因子和形状记忆应变从 0 开始逐渐增加, 同时产生较大的形状记忆应变. 卸载过程中材料不发生形状记忆消退过程 (马氏体逆向变过程), 卸载结束时形状记忆应变全部转变为材料的残余应变, 当加热至  $T > A_f$  时, 材料全部转变为奥氏体, 残余应变全部恢复, 形状记忆合金表现为典型的形状记忆效应.

然而在  $T=278 \text{ K} (T < A_s)$  时, 材料的初始状态为马氏体, 卸载应变  $\epsilon_u=0.07$ . 在加载过程中, 当应力达到一定临界值时, 材料进入形状记忆产生过程 (马氏体择优取向过程), 形状记忆因子和形状记忆应变从 0 开始逐渐增加, 同时产生较大的形状记忆应变, 当应力增加到一定值时, 形状记忆产生过程结束, 形状记忆因子变为 0, 继续加载时材料又表现为线弹性行为; 材料不发生形状记忆消退过程 (马氏体逆向变过程), 卸载结束时, 形状记忆应变全部转变为材料的残余应变. 当加热至  $T > A_f$  时, 材料全部转变为奥氏体, 残余应变全部恢复, 形状记忆合

金表现为典型的形状记忆效应, 该曲线描述了形状记忆合金最大残余应变的测定过程.

图 4b 为在相同条件下, 用 Brinson 模型<sup>[12]</sup> 计算得到的应力 - 应变曲线. 比较图 4a, b 可见, 本研究建立的形状记忆合金本构模型在一维应力情况下与 Brinson 模型所描述的应力 - 应变关系很相似; 但与 Brinson 模型功能相同的相变方程相比, 本研究模型的形状记忆演化方程具有更简洁的数学表述和清晰的物理意义. 因此, 本研究建立的模型更便于实际工程应用.

图 5 为应用形状记忆因子演化方程 (式 (10a)) 和形状记忆因子与马氏体体积分数的关系式 (式 (12)), 所描述的  $T=286.7 \text{ K}$  时, 形状记忆因子  $\eta$  和马氏体体积分数  $\varphi$  随应力变化的曲线. 在  $M_s > T > M_f$  时, 马氏体体积分数的初始值由方程式 (9a) 确定, 因此在  $T=286.7 \text{ K}$  时的初始值为 0.5. 形状记忆因子  $\eta$  在形状记忆产生过程总是从 0 开始逐渐增加, 当增加到 1 时形状记忆产生过程结束, 这时对应的形状记忆应变就是材料的最大残余应变, 而马氏体体积分数  $\varphi$  却是从初值开始逐渐增加的. 可见, 借助于形状记忆因子来描述形状记忆

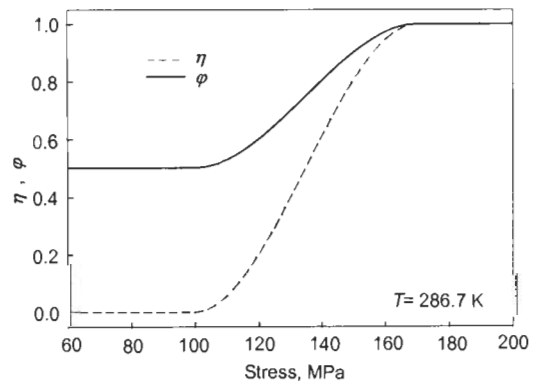


图 5 形状记忆因子和马氏体体积分数的变化曲线  
 Fig.5 Curves of shape memory factor ( $\eta$ ) and martensite volume fraction ( $\varphi$ )

合金的形状记忆效应和超弹性更形象且更直观.

## 5 结论

本研究以形状记忆因子反映形状记忆合金的超弹性和形状记忆效应. 利用相变过程中自由能与马氏体体积分数之间的线性微分关系, 推导了形状记忆因子演化方程.

从细观力学角度建立了一个考虑马氏体择优取向过程的三维本构模型. 与功能相同的现有模型相比, 该模型具有简单的数学表述和清晰的物理意义, 数值计算结果表明了该模型的有效性.

## 参考文献

- [1] Müller I. *Arch Ration Mech Anal*, 1979; 70: 61
- [2] Tanaka K. *Res Mechcl*, 1986; 18: 251
- [3] Magee C L. *The Nucleation of Martensite Phase Transformation*. Metals Park Ohio: American Society for Metals, 1970: 115
- [4] Liang C, Rogers C A. *J Intell Mater Systems Struct*, 1990; 1: 207
- [5] Boyd J G, Lagoudas D C. *J Intell Mater Systems Struct*, 1994; 5: 333
- [6] Sun Q P, Hwang K C. *J Mech Phys Solids*, 1993; 41(1): 1
- [7] Zheng Y J, Cui L S, Yang D Z. *Acta Mater Compos Sin*, 2000; 17(1): 81  
(郑雁军, 崔立山, 杨大智. 复合材料学报, 2000; 17(1): 81)
- [8] Peng X, Yang Y, Huang S. *Int J Solids Struct*, 2001; 38: 6925
- [9] Li H T, Peng X H, Huang S L. *Acta Mech Solids Sin*, 2004; 25(1): 58  
(李海涛, 彭向和, 黄尚廉. 固体力学学报, 2004; 25(1): 58)
- [10] Guo Y B, Liu F P, Zai X Y, Tang Z P, Yu J L. *Explos Shock Waves*, 2003; 23(2): 105  
(郭扬波, 刘方平, 载翔宇, 唐志平, 虞吉林. 爆炸与冲击, 2003; 23(2): 105)
- [11] Abeyaratne R, Knowles J K. *J Mech Phys Solids*, 1993; 41: 541
- [12] Brinson L C. *J Intell Mater Systems Struct*, 1993; 4: 229
- [13] Zhu Y G, Lu H X, Yang D Z. *Chin J Mater Res*, 2001; 15: 263  
(朱祜国, 吕和祥, 杨大智. 材料研究学报, 2001; 15: 263)
- [14] Wollants P, Roos J R, Delaey L. *Prog Mater Sci*, 1993; 37: 227
- [15] Hill R. *J Mech Phys Solids*, 1965; 13: 213