文章编号: 1000-341X(2007)04-0803-11　**文献标识码**: A

高阶线性微分方程的解及其解的导数的不动点

金 瑾
(毕节学院数学系, 贵州 毕节 551700)
(E-mail: jinjin62530@163.com)

摘　要: 研究了复域齐次和非齐次线性微分方程的解及其解的导数的不动点与超级问题, 得到了整函数系数的齐次和非齐次线性微分方程的解及其解的导数的不动点的两个结果, 所得结果推广了一些相关结果.

关键词: 线性微分方程; 不动点; 超级; 零点; 不动点的收敛指数; 整函数.
MSC(2000): 30D30
中图分类: O174.5

1 引 言

自上世纪八十年代以来 [1], 学术界对复数域中的齐次和非齐次线性微分方程解的零点和增长级进行了许多研究, 并取得了丰硕的成果. 然而关于微分方程解的不动点则研究的人较少. 1996 年 [2], 人们用超级的概念对齐次方程的无穷级解作出了更精确的估计. 2000 年, 陈宗煊首次考虑了整函数系数的二阶微分方程解的不动点和超级问题 [3], 创造性地引入了不动点收敛指数和二级不动点收敛指数, 用以精确估计不动点的密度, 并揭示了二阶微分方程的增长性和不动点密度之间的密切关系. 大家知道, 亚纯函数与其导数有着相同的级和下级, 同时微分方程给出了它的解和其各阶导数的关系, 所以研究微分方程的不动点和超级十分有用.

在本文中, 我们使用值分布理论的标准记号 [11], 并使用 $\sigma(f)$ 和 $\sigma_2(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长极和超级, 用 $\lambda(f)$ 表示 $f(z)$ 的零点收敛指数, 用 $\bar{\lambda}(f)$ 表示 $f(z)$ 的不同零点收敛指数.

2 定义及引理

定义 1　若 $z_1, z_2, \ldots (|z_j| = r_j, 0 < r_1 < r_2 < \cdots)$ 为超越整函数 $f(x)$ 的不动点, 则

$$\tau(f) = \inf\{\tau : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{r_j^{\tau}} < +\infty\}$$

称为 $f(z)$ 的不动点的收敛指数.

显然有

$$\tau(f) = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\log \bar{N}(r, \frac{1}{f-z})}{\log r}.$$

收稿日期: 2005-12-20; **接受日期**: 2006-07-02

定义 2 设 $f(z)$ 为亚纯函数，则 $\sigma_2(f)=\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}$ 称为 $f(z)$ 的超级．如果 $f(z)$ 为整函数，则有

$$\sigma_2(f)=\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log\log\log M(r,f)}{\log r}=\overline{\lim}_{r\to+\infty}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

定义 3 设 $f(z)$ 为整函数，则 $\tau_2(f)=\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log\log \bar{N}(r,\frac{1}{f-z})}{\log r}$ 称为 $f(z)$ 的二级不动点的收敛指数.

定义 4 设 $f(z)$ 为整函数，则 $\lambda_2(f)=\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log\log N(r,\frac{1}{f})}{\log r}$ 称为 $f(z)$ 的二级零点的收敛指数.

定义 5 设 $f(z)$ 为整函数，则 $\bar{\lambda}_2(f)=\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log\log \bar{N}(r,\frac{1}{f-z})}{\log r}$ 称为 $f(z)$ 的二级不同零点的收敛指数.

引理 1[4] 设 $A_0,A_1,\ldots,A_{k-1},F$ 都是有限级整函数， $K\geq 2$, F 不恒为零，并且有

(I) $\sigma(A_j)<\sigma(A_0)$ $(j=1,2,\ldots,k-1)$;

(II) $A_1,A_2,\ldots,A_{k-1}$ 为多项式， A_0 是超越函数.

则对于微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F$$

至多有一个可能的有限级例外解 f_0, 其它所有解满足： $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=+\infty$.

引理 2[5] 设 $\omega(z)=\Sigma_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为整函数， $a_0\neq 0$, $\mu(r)$ 为 $\omega(z)$ 的最大项， $\nu(r)$ 为 $\omega(z)$ 的中心指标, 则有 $\log\mu(r)=\log|a_0|+\int_0^r\frac{\nu(t)}{t}\mathrm{d}t$, 且对于 $r<R$, 有 $M(r,\omega)<\mu(r)\{\nu(R)+\frac{R}{R-r}\}$.

引理 3[6] 设 $g(z)$ 为无穷级整函数，其超级 $\sigma_2=\sigma$, $\nu(r)$ 为 $g(z)$ 的中心指标，则有

$$\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log\log\nu(r)}{\log r}=\sigma.$$

引理 4[4] 设 $G(r)$ 和 $H(r)$ 为两个定义在 $(0,+\infty)$ 内的非减实函数．若除去一个有穷测度的集合 E 外有 $G(r)\leq H(r)$, 则对任意的 $a>1$, 存在 r_0 使得对所有的 $r\geq r_0$ 有 $G(r)\leq H(ar)$.

引理 5[7] 设 $G(r)$ 和 $H(r)$ 为两个定义在 $(0,+\infty)$ 内的非减实函数．若存在一个集合 E, 其对数测度 $\mathrm{Im}E=\delta<+\infty$, 使得当 $r\notin E$ 时， $G(r)\leq H(r)$. 则对任意实数 $\beta>e^{\delta}$, 当 $r>1$ 时有 $G(r)\leq H(\beta r)$.

注 集合 E 的对数测度 $\mathrm{Im}E$ 定义为 $\mathrm{Im}E=\int_1^{+\infty}\frac{\chi_E(t)}{t}\mathrm{d}t$, 其中

$$\chi_E(r)=\begin{cases}0, & r\notin E;\\ 1, & r\in E.\end{cases}$$

引理 6[8] 设 $A_0,A_1,\ldots,A_{k-1}$ 都是整函数，且

$$\max\{\sigma(A_1),\ldots,\sigma(A_{k-1})\}<\sigma(A_0)<+\infty,$$

则对于微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0$ 的每一个不恒为零的整数解 $f(z)$ 都有

$$\sigma_2(f)=\sigma(A_0).$$

3 定理 1 及其证明

定理 1 设 $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ 都是整函数， $k \geq 2$, $A_0 z + A_1$ 和

$$\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A'_{k-j}+A_0A_{k-j-1}-A'_0A_{k-j})z^{(k-j-1)}+(A_0A_{k-1}-A'_0)z^{k-1}+(A_0A'_1+A_0^2-A'_0A_1)z$$

都不恒为零, 且 (I) A_0 是有限级超越整函数， $A_1, \ldots, A_k - 1$ 是多项式或 (II) $\sigma(A_j) < \sigma(A_0) < +\infty$ $(j = 1, \ldots, k-1)$, 则微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = 0 \tag{3.1}$$

最多除去一个有限级例外解 f_0, $\sigma(f_0) = \sigma(A_0)$, 其它所有解 f 及其导数 f' 都有无穷多个不动点，且

$$\tau(f) = \sigma(f) = +\infty, \tau_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0),$$

$$\tau_2(f') = \overline{\lambda_2}(f) = \sigma_2(f) = \sigma, \quad \tau_2(f') = \sigma_2(f) = \sigma.$$

证明 设 $f(z)$ 是微分方程 (3.1) 式的非零解，由微分方程的基本理论 [4] 知， $f(z)$ 是整函数.

(1) 令 $g = f - z$, 则 z 为 $f(z)$ 的不动点的充要条件是 $g(z) = 0$. 由 $g = f - z$ 可知 $\sigma(g) = \sigma(f)$. 再由定义 1 可知 $\tau(f) = \bar{\lambda}(f - z) = \bar{\lambda}(g)$. 将 $f = g + z$ 代入微分方程 (3.1) 式可得

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + A_1 g' + A_0 g = -A_0 z - A_1. \tag{3.2}$$

由引理 1, 若 A_0z+A_1 不恒等于零, 则微分方程 (3.2) 式至多一个可能的有限级例外解 $g_0 = f_0 - z$, 其余解 g 都有 $\bar{\lambda}(g) = \lambda(g) = \sigma(g) = +\infty$, 故 $\tau(f) = \sigma(f) = +\infty$.

1). A_0 是有限级超越整函数， $A_1, \ldots, A_{k-1}$ 是多项式，则微分方程 (3.1) 式可改写为

$$A_0 = -(\frac{f^{((k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + \cdots + A_1\frac{f'}{f}), \tag{3.3}$$

从而除去一个线性测度为有穷的集合 $E \subset (0, +\infty)$ 外有

$$T(r, A_0) = m(r, A_0) = \sum_{j=1}^{k} m(r, \frac{f^{(j)}}{f}) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) \leq C\log(rT(r, f)), \tag{3.4}$$

所以当 $r \notin E$ 时，有

$$\frac{\log T(r, A_0)}{\log r} \leq \frac{\log\log T(r, f)}{\log r} + \frac{\log C + \log\log r}{\log r}. \tag{3.5}$$

由引理 4 和 (3.5) 式得到 $\sigma(A_0) \leq \sigma_2(f)$. 又由 Wiman-Valiron 理论 [5,9−10] 可知，存在一个对数测度为有穷的集合 $E_1 \subset (1, +\infty)$, 取 z 点满足 $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1, |f(z)| = M(r, f)$. 则当 r 充分大时有

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = (\frac{\nu_f(r)}{z})^k(1 + O(1)), \tag{3.6}$$

其中 $\nu_f(r)$ 为 $f(z)$ 的中心指标. 由于 $\sigma(A_0)=\sigma$, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 当 r 充分大时有

$$|A_0(r)|\leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}. \tag{3.7}$$

由 (3.1), (3.6) 和 (3.7) 式得到：当取 z 点满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1, |f(z)|=M(r,f)$. 则当 r 充分大时有

$$(\frac{\nu_f(r)}{|z|})^k|1+O(1)|\leq(\frac{\nu_f(r)}{|z|})^{k-1}(1+O(1))\exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}, \tag{3.8}$$

因此由引理 5 和 (3.8) 式可得

$$\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{\log\log\nu_f(r)}{\log r}\leq\sigma(A_0)+\varepsilon. \tag{3.9}$$

又由引理 3 及 ε 的任意性和 (3.9) 式可知 $\sigma_2(f)\leq\sigma(f)$. 所以 $\sigma_2(f)=\sigma(A_0)$.

2). 设 $A_0,A_1,\ldots,A_{k-1}$ 都是整函数，由引理 6 可知 $\sigma_2(f)=\sigma_2(A_0)$.

3). 设 $f(z)$ 是微分方程 (3.1) 式的任意超越解, 则由微分方程 (3.1) 式可知：如果 z_0 为 $g(z)$ 的零点且阶数大于 k, 则在 $z=z_0$ 时，有 $A_0z+A_1=0$ 且

$$N(r,\frac{1}{g})\leq k\bar{N}(r,\frac{1}{g})+\sum_{j=0}^{k-1}N(r,A_j)+N(r,\frac{1}{A_0z+A_1}). \tag{3.10}$$

另外，由于 $g(z)$ 是微分方程 (3.2) 式的解，则微分方程 (3.2) 式可改写为

$$\frac{1}{g}=-\frac{1}{A_0z+A_1}(\frac{g^{(k)}}{g}+A_{k-1}\frac{g^{(k-1)}}{g}+\cdots+A_1\frac{g'}{g}+A_0),$$

所以

$$m(r,\frac{1}{g})\leq m(r,\frac{1}{A_0z+A_1})+\sum_{j=0}^{k-1}m(r,A_j)+\sum_{j=1}^{k}m(r,\frac{g^{(j)}}{g})+O(1). \tag{3.11}$$

由 (3.10) 和 (3.11) 两式可得：除去一个线性测度为有穷的集合 E_2 外有

$$T(r,g)=T(r,\frac{1}{g})+O(1)\leq k\bar{N}(r,\frac{1}{g})+C\log(rT(r,g))+(k+2)T(r,A_0), \tag{3.12}$$

当 r 充分大时有

$$C\log(rT(r,g))\leq\frac{1}{2}T(r,g) \tag{3.13}$$

以及对任意的 $\varepsilon>0$, 当 r 充分大时，由级的定义有

$$T(r,A_0)\leq r^{\sigma(A_0)+\varepsilon}. \tag{3.14}$$

由 (3.12)–(3.14) 不等式得到：当 $r\notin E_2$, 且 r 充分大时有

$$T(r,g)\leq 2k\bar{N}(r,\frac{1}{g})+2(k+2)r^{\sigma(A_0)+\varepsilon}, \tag{3.15}$$

由引理 4 和 (3.15) 式可得： $\sigma_2(g)\leq\overline{\lambda_2}(g)$. 从而 $\sigma_2(g)=\overline{\lambda_2}(g)$.

由于 $f=g+z$ 及 $\sigma_2(f)=\sigma_2(g)=\sigma(A_0)$ 得到： $\overline{\lambda_2}(g)=\sigma(A_0)$.

再由 $\tau_2(f)=\bar{\lambda}(g)$ 可知： $\tau_2(f)=\sigma(A_0)$. 故 $\tau_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(A_0)$.

综上所述：对所有非零解都有无穷多个不动点，并且

$$\tau(f)=\sigma(f)=+\infty,\quad \tau_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(A_0).$$

(2) 令 $\omega=f'-z$, 则 z 为 $f(z)$ 的不动点的充要条件是 $\omega(z)=0$. 由 $\omega=f'-z$ 可知 $\sigma(\omega)=\sigma(f')$. 再由定义 1 可知 $\tau(f')=\bar{\lambda}(f'-z)=\bar{\lambda}(\omega)$, 并且

$$f'=\omega+z, f''=\omega'+1, f'''=\omega'', \dots$$

$$f^{(k-1)}=\omega^{(k-2)}+z^{(k-2)}, f^{(k)}=\omega^{(k-1)}+z^{(k-1)}, f^{(k+1)}=\omega^{(k)}, \tag{3.16}$$

由微分方程 (3.1) 式可得

$$f^{(k)}=-\{A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f\},$$

所以

$$\begin{aligned}\omega^{(k)}=&f^{(k+1)}=-\{A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f\}'\\ =&-\{A_{k-1}\omega^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_{k-j}^{'}+A_{k-j-1})\omega^{(k-j-1)}+(A_1'+A_0)\omega+\\ &\sum_{j=1}^{k-2}(A_{k-j}^{'}+A_{k-j-1})z^{(k-j-1)}+(A_1'+A_0)z+A_{k-1}z^{(k-1)}+A_0'f\}\\ f=&-\frac{1}{A_0'}\{\omega^{(k)}+A_{k-1}\omega^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_{k-j}'+A_{k-j-1})\omega^{(k-j-1)}+(A_1'+A_0)\omega+\\ &\sum_{j=1}^{k-2}(A_{k-j}'+A_{k-j-1})z^{(k-j-1)}+(A_1'+A_0)z+A_{k-1}z^{(k-1)}\}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

将 (3.16) 和 (3.17) 式代入微分方程 (3.1) 式得：

$$\begin{aligned}&(\omega^{(k-1)}+z^{(k-1)})+A_{k-1}(\omega^{(k-2)}+z^{(k-2)})+\cdots+A_1(\omega+z)+\\ &\{-\frac{A_0}{A_0'}\{\omega^{(k)}+A_{k-1}\omega^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_{k-j}'+A_{k-j-1})\omega^{(k-j-1)}+(A_1'+A_0)\omega+\\ &\sum_{j=1}^{k-2}(A_{k-j}'+A_{k-j-1})z^{(k-j-1)}+(A_1'+A_0)z+A_{k-1}z^{(k-1)}\}\}=0,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&A_0\omega^{(k)}+(A_0A_{k-1}-A_0^{'})\omega^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})\omega^{(k-j-1)}+\\ &(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)\omega+(A_0A_{k-1}-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}^{'}+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+\end{aligned}$$

$$(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z=0, \tag{3.18}$$

其中

$$(A_0A_{k-1}-A_0^{'})z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z\not\equiv 0,$$

故可知对所有 ω 的阶数大于 k 的零点都是

$$(A_0A_{k-1}-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z$$

的零点. 令

$$D=(A_0A_{k-1}'-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-1}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z,$$

因此有

$$N(r,\frac{1}{\omega})\le k\bar{N}(r,\frac{1}{\omega})+N(r,\frac{1}{D}). \tag{3.19}$$

又由 (3.18) 式可得

$$\begin{aligned}&A_0\frac{\omega^{(k)}}{\omega}+(A_0A_{k-1}-A_0')\frac{\omega^{(k-1)}}{\omega}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})\frac{\omega^{(k-j-1)}}{\omega}+\\&\quad(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)\\&=-\frac{1}{\omega}\{(A_0A_{k-1}-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+\\&\quad(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z\}.\end{aligned}$$

所以

$$m(r,\frac{1}{\omega})\le O(m(r,A_0))+S(r,\omega). \tag{3.20}$$

由 (3.19) 和 (3.20) 式可得到：对任意给定的 $\varepsilon>0$, 在除去一有穷线性测度的集合 E_3 外都有

$$T(r,\omega)\le 2k\bar{N}(r,\frac{1}{\omega})+O(r^{\sigma+\varepsilon}),$$

因此，对所有非零解 f 的导数 $f^{'}$ 都有无穷多个不动点，且

$$\tau_2(f')=\overline{\lambda_2}(f)=\sigma_2(f)=\sigma,\tau_2(f')=\sigma_2(f)=\sigma.$$

4 定理 2 及其证明

定理 2 设 $A_0,A_1,\ldots,A_{k-1},F$ 是有限级整函数， F 不恒为零， $k\ge 2$, $F-A_0z-A_1$ 和

$$(A_0A_{k-1}-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+$$

$$(A_0A_1' + A_0^2 - A_0'A_1)z + A_0F' + A_0'F$$

都不恒为零，且 (I) A_0 是有限级超越整函数， $A_1,\dots,A_{k-1}$ 是多项式或 (II) $\sigma(A_j)<\sigma(A_0)<+\infty$, $j=1,\dots,k-1$, 则微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1f' + A_0f = F \tag{4.1}$$

最多有一个有限级例外解 f_0, $\sigma(f_0)=\sigma(A_0)$, 其它所有解 f 及其导数 f' 都有无穷多个不动点，且满足

$$\tau(f)=\sigma(f)=+\infty, \tau_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(A_0),$$

$$\tau_2(f')=\overline{\lambda_2}(f)=\sigma_2(f)=\sigma, \tau_2(f')=\sigma_2(f)=\sigma.$$

证明 (1) 设 $f(z)$ 是微分方程 (4.1) 式的解，由假设和引理 1 可知：微分方程 (4.1) 式至多可能有一个有限级例外解 f_0, 其他所有解 f 都满足 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=+\infty$.

令 $g=f-z$, 则 $\sigma(g)=\sigma(f)$ 且 z 为 $f(z)$ 的不动点的充要条件是 $g(z)=0$ 且 $\sigma(g)=\sigma(f)$. 将 $f=g+z$ 代入微分方程 (4.1) 可得

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + A_1g' + A_0g = F - A_0z - A_1. \tag{4.2}$$

由引理 1 和 $A_0z+A_1\neq F$ 可知微分方程 (4.2) 式最多有一个有限级例外解 g_0, 其余所有解 g 都有 $\bar{\lambda}(g)=\lambda(g)=\sigma(g)=+\infty$. 故微分方程 (4.1) 式最多有一个有限级例外解 $f_0=g_0+z$, 其余所有解 f 都满足： $\tau(f)=\bar{\lambda}(g)=\sigma(g)=\sigma(f)=\bar{\lambda}(f)=+\infty$.

再设 $g_j(z)$, $j=1,\dots,k$ 为微分方程 (4.2) 所对应的齐次微分方程

$$g^{(k)} + A_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + A_1g' + A_0g = 0 \tag{4.3}$$

的基础解. 由定理 1 可知，至少有一个 g_j 满足 $\sigma_1(g_i)=\sigma(A_0)$, $j=1,\dots,k$. 由常数变易法可知微分方程 (4.2) 式的解可表示为：

$$g(z) = B_1(z)g_1(z) + B_2(z)g_2(z) + \cdots + B_k(z)g_k(z), \tag{4.4}$$

其中 $B_1(z),\dots,B_k(z)$ 由方程组

$$\begin{cases} B_1'(z)g_1(z) + B_2'(z)g_2(z) + \cdots + B_k'(z)g_k(z) = 0, \\ B_1'(z)g_1'(z) + B_2'(z)g_2'(z) + \cdots + B_k'(z)g_k'(z) = 0, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ B_1'(z)g_1^{(k-2)}(z) + B_2'(z)g_2^{(k-2)}(z) + \cdots + B_k'(z)g_k^{(k-2)}(z) = 0, \\ B_1'(z)g_1^{(k-1)}(z) + B_2'(z)g_2^{(k-1)}(z) + \cdots + B_k'(z)g_k^{(k-1)}(z) = F - A_0z - A_1 \end{cases}$$

所决定. 这个关于 $B_1'(z),\dots,B_k'(z)$ 的系数行列式 C 是 Wronsky 行列式，因此有

$$C = W(g_1(z),\dots,g_k(z)) = \exp(-\int A_{k-1}\mathrm{d}z).$$

所以 $B_j'(z)=(F-A_0z-A_1)h_j\exp(\int A_{k-1}\mathrm{d}z)$, $j=1,\dots,k$. 其中 h_j 是关于 $g_1,\dots,g_k(z)$ 的常系数微分多项式.

由 Able 恒等式可知， C 为非零常数，又 $\sigma(F-A_0z-A_1)<+\infty$. 故 $\sigma_2(B_j)=\sigma_2(B_j')=\sigma_2(h_j)=\sigma(A_0)$. 再由微分方程 (4.3) 和 (4.4) 式可知 $\sigma_2(g)\le\sigma(A_0)$. 因此 $\sigma_2(f)\le\sigma(A_0)$.

若 f_i, f_j, $i=1,\dots,k, j=1,\dots,k$ 是微分方程 (4.1) 的解，且

$$f_i\ne f_j, \sigma_2(f_i)\le\sigma(A_0), \sigma_2(f_j)\le\sigma(A_0),$$

则 f_i-f_j 是微分方程 (4.1) 式所对应的齐次微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0$$

的非零解. 故 $\sigma_2(f_i-f_j)<\sigma(A_0)$.

又由定理 1 可知 $\sigma_2(f_i-f_j)=\sigma(A_0)$, 这与 $\sigma_2(f_i-f_j)<\sigma(A_0)$ 矛盾. 因此微分方程 (4.1) 式最多有一个有限级例外解，其它所有解都满足： $\sigma_2(f)=\sigma_2(A_0)$.

若 g 有阶数大于 k 的零点 z_0, 则 z_0 也是 $F-A_0z-A_1$ 的零点，所以

$$N(r,\frac{1}{g})\le k\bar{N}(r,\frac{1}{g})+\sum_{j=0}^{k-1}N(r,A_j)+N(r,\frac{1}{F-A_0z-A_1}). \tag{4.5}$$

另外，由于 $g(z)$ 是微分方程 (4.2) 式的解，故可得

$$\frac{1}{g}=-\frac{1}{F-A_0z-A_1}(\frac{g^{(k)}}{g}+A_{k-1}\frac{g^{(k-1)}}{g}+\cdots+A_1\frac{g'}{g})+A_0, \tag{4.6}$$

从而有

$$m(r,\frac{1}{g})\le m(r,\frac{1}{F-A_0z-A_1})+\sum_{j=0}^{k-1}m(r,A_j)+\sum_{j=1}^{k}m(r,\frac{g^{(j)}}{g})+O(1). \tag{4.7}$$

故有 (4.5) 和 (4.7) 式可得：除去一个线性测度为有穷的集合 $E\subset(0,+\infty)$ 外都有

$$\begin{aligned}T(r,g)=&T(r,\frac{1}{g})+O(1)\le k\bar{N}(r,\frac{1}{g})+C\log(rT(r,g))+\\&\sum_{j=0}^{k-1}T(r,A_j)+T(r,\frac{1}{F-A_0z-A_1}).\end{aligned} \tag{4.8}$$

使用与定理 1 类似的证明方法可得: 当 $\sigma_2(g)=\sigma(A_0)$ 时有 $\bar{\lambda}(g)=\sigma(A_0)$. 故 $\tau_2(f)=\sigma(A_0)$.

又因为 $\sigma_2(A)=\sigma_2(g)$, 而当 $\sigma_2(g)=\sigma_2(A_0)$ 时有 $\tau_2(f)=\sigma(A_0)$. 所以 $\tau_2(f)=\sigma_2(A_0)$ 时有

$$\sigma_2(g)=\sigma(A_0).$$

综上所述：微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=F$$

最多有一个有限级例外解 $f_0, \sigma(f_0)=\sigma(A_0)$, 其它所有解 f 都有无穷多个不动点，且满足

$$\tau(f)=\sigma(f)=+\infty,\ \ \tau_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(A_0).$$

(2) 令 $\omega = f' - z$，则 z 为 $f'(z)$ 的不动点的充要条件是 $\omega(z) = 0$. 由 $\omega = f' - z$ 可知 $\sigma(\omega) = \sigma(f')$. 再由定义 1 可知 $\tau(f') = \bar{\lambda}(f' - z) = \bar{\lambda}(\omega)$, 并且

$$f' = \omega + z, f'' = \omega' + 1, f''' = \omega'', \dots$$

$$f^{(k-1)} = \omega^{(k-2)} + z^{(k-2)}, f^{(k)} = \omega^{(k-1)} + z^{(k-1)}, f^{(k+1)} = \omega^{(k)}. \tag{4.9}$$

由微分方程 (4.1) 式可得

$$f^{(k)} = F - \{A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f\},$$

所以

$$\begin{aligned}\omega^{(k)} =& f^{(k+1)} = F' - \{A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f\}' \\ =& F' - \{A_{k-1}\omega^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{k-2}(A'_{k-j} + A_{k-j-1})\omega^{(k-j-1)} + (A'_1 + A_0)\omega + \\ & \sum_{j=1}^{k-2}(A'_{k-j} + A_{k-j-1})z^{(k-j-1)} + (A'_1 + A_0)z + A_{k-1}z^{(k-1)} + A'_0 f\},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f =& \frac{1}{A'_0}\{F' - \omega^{(k)} - A_{k-1}\omega^{(k-1)} - \sum_{j=1}^{k-2}(A'_{k-j} + A_{k-j-1})\omega^{(k-j-1)} - (A'_1 + A_0)\omega - \\ & \sum_{j=1}^{k-2}(A'_{k-j} + A_{k-j-1})z^{(k-j-1)} - (A'_1 + A_0)z - A_{k-1}z^{(k-1)}\}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

将 (4.9) 和 (4.10) 式代入微分方程 (4.1) 式得：

$$\begin{aligned}&(\omega^{(k-1)} + z^{(k-1)}) + A_{k-1}(\omega^{(k-2)} + z^{(k-2)}) + \cdots + A_2(\omega' + 1) + A_1(\omega + z) + \\ &\{\frac{A_0}{A'_0}\{F' - \omega^{(k)} - A_{k-1}\omega^{(k-1)} - \sum_{j=1}^{k-2}(A'_{k-j} + A_{k-j-1})\omega^{(k-j-1)} - (A'_1 + A_0)\omega - \\ &\sum_{j=1}^{k-2}(A'_{k-j} + A_{k-j-1})z^{(k-j-1)} - (A'_1 + A_0)z - A_{k-1}z^{(k-1)}\}\} = F,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&A_0\omega^{(k)} + (A_0A_{k-1} - A'_0)\omega^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{k-2}(A_0A'_{k-j} + \\ &A_0A_{k-j-1} - A'_0A_{k-j})\omega^{(k-j-1)} + (A_0A'_1 + A_0^2 - A'_0A_1)\omega + \\ &(A_0A_{k-1} - A'_0)z^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{k-2}(A_0A'_{k-j} + A_0A_{k-j-1} - A'_0A_{k-j})z^{(k-j-1)} + \\ &(A_0A'_1 + A_0^2 - A'_0A_1)z + A_0F' + A'_0F = 0,\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中

$$(A_0A_{k-1}-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+$$
$$(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z+A_0F'+A_0'F\not\equiv 0,$$

故可知对所有 ω 的阶数大于 k 的零点都是

$$(A_0A_{k-1}-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+$$
$$(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z+A_0F'+A_0'F$$

的零点. 令

$$G=(A_0A_{k-1}'-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-1}+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+$$
$$(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z+A_0F'+A_0'F,$$

因此有

$$N(r,\frac{1}{\omega})\le k\bar{N}(r,\frac{1}{\omega})+N(r,\frac{1}{G}).\tag{4.12}$$

又由 (4.11) 式可得

$$A_0\frac{\omega^{(k)}}{\omega}+(A_0A_{k-1}-A_0')\frac{\omega^{(k-1)}}{\omega}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})\frac{\omega^{(k-j-1)}}{\omega}+$$
$$(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)$$
$$=-\frac{1}{\omega}\{(A_0A_{k-1}-A_0')z^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{k-2}(A_0A_{k-j}'+A_0A_{k-j-1}-A_0'A_{k-j})z^{(k-j-1)}+$$
$$(A_0A_1'+A_0^2-A_0'A_1)z+A_0F'+A_0'F\},$$

所以

$$m(r,\frac{1}{\omega})\le O(m(r,A_0))+S(r,\omega).\tag{4.13}$$

由 (4.12) 和 (4.13) 式可得到：对任意给定的 $\varepsilon>0$, 在除去一有穷线性测度的集合 E 外都有

$$T(r,\omega)\le 2k\bar{N}(r,\frac{1}{\omega})+O(r^{\sigma+\varepsilon}),$$

因此，对所有非零解 f 的导数 f' 都有无穷多个不动点，且

$$\tau_2(f')=\overline{\lambda_2}(f)=\sigma_2(f)=\sigma,\tau_2(f')=\sigma_2(f)=\sigma.$$

参考文献:

[1] BANK S, LAINE I. *On the oscillation theory of $f''+Af=0$ where A is entire* [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, **273**: 351–363.

[2] KWON Ki-Ho. *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations* [J]. Kodai Math. J., 1996, **19**(3): 378–387.

[3] 陈宗煊．二阶复域微分方程解的不动点与超级 [J]. 数学物理学报， 2000, **20**(3): 425–432.
CHEN Zong-xuan. *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2000, **20**(3): 425–432. (in Chinese)

[4] 高仕安，陈宗煊，陈特为．线性微分方程的复振荡理论 [M], 武汉：华中理工大学出版社， 1998.
GAO Shi-an, CHEN Zong-xun, CHEN Te-wei. *Theory of Complex Oscillation of Lineear Differential Equation* [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1998. (in Chinese)

[5] 何育赞，萧修治．代数体函数与常微分方程 [M]. 北京：科学出版社， 1988.
HE Yu-zan, XIAO Xiu-zhi. *Algebroidal Function and Ordinary Differential Equation* [M]. Beijing: Science Press, 1988. (in Chinese)

[6] 陈宗煊．关于高阶整系数微分方程的超级 [J]. 应用数学学报， 1999, **22**(1): 71–77.
CHEN Zong-xuan. *The hyper-order of solutions of higher-order differential equations with entire coefficients* [J]. Acta Math. Appl. Sinica, 1999, **22**(1): 71–77. (in Chinese)

[7] GAO Shi-an. *Two theorems on the complex oscillation theory of nonhomogeneous linear differential equations* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1991, **162**(2): 381–391.

[8] CHEN Zong-xuan, YANG Chung-chun. *Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations* [J]. Complex Variables Theory Appl., 2000, **42**(2): 119–133.

[9] HAYMAN W. *Meromorphic Functions* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[10] 陈宗煊．二阶亚纯系数微分方程亚纯解的零点 [J]. 数学物理学报， 1996, **16**(3): 276–283.
CHEN Zong-xuan. *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations* [J]. Acta Math. Sci. Ser. A Chin. Ed., 2000, **20**(3): 425–432. (in Chinese)

[11] 杨乐．值分布理论及其新研究 [M]. 北京：科学出版社， 1982.
YANG Le. *Value Distribution Theory and New Research* [M]. Beijing: Science Press, 1982. (in Chinese)

Fix Points of Solutions and of Derivatives of Solutions of Higher Order Linear Differential Equations

JIN Jin
(Department of Mathematics, Bijie University, Guizhou, 551700, China)

Abstract: This paper deals with the fix points of the solutions and of the derivatives of the solutions of comples homogeneous and nonhomogeneous higher order linear differenliad equations, and gets two results of fixed point of homogeneous and nonhomogeneous higher order linear differenliad equations. Moreover, we generalize the related results of some authors.

Key words: linear differential; fix point; hyper order; zero point; exponent of convergence of fix point; entire function.