第27卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.2
2007年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2007

文章编号: 1000-341X(2007)02-0418-07 **文献标识码**: A

非欧空间中的广义度量方程及其应用

杨 定 华
(中国科学院成都计算机应用研究所, 四川 成都 610041)
(E-mail: yangdinghua@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文改进了杨世国关于非欧空间中基本图形的度量方程, 建立一个一般意义下的、应用更为方便的广义度量方程, 作为其初步应用, 导出了非欧空间中两个单形之间的一些有趣的几何关系.

关键词: 非欧空间; 单形; 基本图形; 广义度量方程.
MSC(2000): 51K05
中图分类: O184

1 引言及主要结果

众所周知, 度量方程作为著名的 Cayley-Menger 代数的推广, 由于杨路和张景中关于抽象距离空间的秩的奠基性贡献, 它已经成为现代距离几何研究中最主要的对象之一, 也是我们理解距离几何最有力的工具之一, 在距离几何中扮演着主要的角色. 事实上, 杨 - 张的这一贡献在本质上是建立抽象距离空间的一般性度量方程, 研究的对象从具体的距离空间到一般抽象距离空间的根本转变, 结论的普适性从原来的个别转向现在的一类. 特别地, 非正定距离几何成为距离几何的主要研究方向, 当然其结论也适用于正定距离几何. 因此, 抽象距离空间的一般性度量方程是研究正定距离几何和非正定距离几何共同的基础工具.

在作者的近期工作中, 改进了文献 [8] 关于高维欧氏空间 E^n 中两个等数量有限基本元素构成的集合的广义度量方程, 获得更为一般意义的、应用更为方便的广义度量方程. 即: 在每个集合中至多有一个假想元素 φ 的条件下, 文献 [8] 中的定理 1 仍然是成立的. 那么在本文中, 我们改进了杨世国 [7] 关于非欧空间中双基本图形的度量方程的结果, 获得更为一般的、应用起来更为方便的广义度量方程, 它在研究非欧空间中两组基本图形之间度量关系中是必不可少的. 更为准确地说, 我们的结果是文献 [8] 主要结果在非欧空间中的一个类比. 作为其初步应用, 导出了非欧空间中两个单形之间的一些有趣的几何关系.

我们先从双曲度量空间的射影模型开始 [4], n 维向量空间 R^n 中取所以满足下列条件

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1$$

的点作成的子集合 B, 在 B 上定义一个距离, 使得其中任意两点 x 与 y 之间的距离 (记作: xy) 由下式规定:

$$\cosh\frac{xy}{r}=\frac{1-x_1y_1-x_2y_2-\cdots-x_ny_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}\sqrt{1-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_n^2}} \tag{1}$$

收稿日期: 2005-05-09; **接受日期**: 2006-07-16
基金项目: 国家 973 计划基金 (2004CB318003).

对 B 赋予这个距离以后得到度量空间，记作 $H^n(r)$, 通常叫做 n 维双曲空间.

$H^n(r)$ 中的超平面是指 R^n 中的超平面与 B 的交，设 R^n 中的超平面 u 的方程为

$$u_0+u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n=0.$$

显然只有当

$$u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2\geq u_0^2 \tag{2}$$

成立时，超平面 u 与 B 的交才是非空的，因此 $H^n(r)$ 中的超平面 u 必须要满足这个不等式，$H^n(r)$ 中的超平面 u,v 所成角度按如下计算

$$\cos\widehat{uv}=\frac{-u_0v_0+u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n}{\sqrt{-u_0^2+u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}\sqrt{-v_0^2+v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}} \tag{3}$$

而点 x 到超平面 u 的有向距离 $\overline{xu}$ 由下式给出

$$\sinh\frac{\overline{xu}}{r}=\frac{u_0+u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n}{\sqrt{-u_0^2+u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}. \tag{4}$$

类似地，下面考虑球面度量空间的射影模型： $n+1$ 维向量空间 R^{n+1} 中取所以满足下列条件

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=r^2$$

的点作成的子集合 S, 在 S 上定义一个距离，使得其中任意两点 x 与 y 之间的距离 $xy\in[0,\pi r]$ 由下式规定：

$$\cos\frac{xy}{r}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{n+1}y_{n+1}}{r^2} \tag{5}$$

对 S 赋予这个距离以后得到度量空间，记作 $S^n(r)$, 通常叫做 n 维球面空间.

$S^n(r)$ 中的超平面是指过坐标原点 O 的 n 维超平面

$$u_1x_1+u_2x_2+u_2x_2+\cdots+u_{n+1}x_{n+1}=0$$

与 S 的交， $S^n(r)$ 中的超平面 u,v 所成角度 $\widehat{ur}$ 按如下计算

$$\cos\widehat{uv}=\frac{u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_{n+1}v_{n+1}}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{n+1}^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_{n+1}^2}} \tag{6}$$

而点 x 到超平面 u 的有向距离 $\overline{xu}$ 由下式给出

$$\sin\frac{\overline{xu}}{r}=\frac{u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_{n+1}x_{n+1}}{r\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_{n+1}^2}}. \tag{7}$$

为方便，称 $H^n(r)$(或 $S^n(r)$) 中的点或定向超平面为 $H^n(r)$(或 $S^n(r)$) 中的基本元素.

本文的主要结果叙述为

定理 1 设 $\Sigma(e)=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ 和 $\Sigma(e')=\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_m\}$ 为 n 维球面空间 $S_{n,r}$ 中的基本元素：点， $(n-1)$ 维定向超平面所构成的两个等数量有限集合，并且 e_i 和 e'_i 不一定同时

或为点、或为 $(n-1)$ 维超平面，令

$$g(e_i,e'_j)=\begin{cases}\cos\frac{\overline{e_ie'_j}}{r}, & \text{如果}e_i,e'_j\text{都是点;}\\ \sin\frac{\overline{e_ie'_j}}{r}, & \text{如果}e_i,e'_j\text{一个是点，另一个是超平面;}\\ \cos\widehat{e_ie'_j}, & \text{如果}e_i,e'_j\text{都是超平面.}\end{cases}$$

当 $m>n+1$ 时，则有

$$\det[g(e_i,e'_j)_{i,j=1}^m]=0. \tag{8}$$

为方便，称度量方程 (8) 为球面空间 $S_{n,r}$ 中 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 的广义度量方程.

定理 2 设 $\Sigma(e)=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ 和 $\Sigma(e')=\{e'_1,e'_2,\dots,e'_m\}$ 为 n 维双曲空间 $H_{n,r}$ 中的基本元素：点， $(n-1)$ 维定向超平面所构成的两个等数量有限集合，并且 e_i 和 e'_i 不一定同时或为点、或为 $(n-1)$ 维超平面，令

$$g(e_i,e'_j)=\begin{cases}\cosh\frac{\overline{e_ie'_j}}{r}, & \text{如果}e_i,e'_j\text{都是点;}\\ \sqrt{-1}\sinh\frac{\overline{e_ie'_j}}{r}, & \text{如果}e_i,e'_j\text{一个是点，另一个是超平面;}\\ \cos\widehat{e_ie'_j}, & \text{如果}e_i,e'_j\text{都是超平面.}\end{cases}$$

当 $m>n+1$ 时，则有

$$\det[g(e_i,e'_j)_{i,j=1}^m]=0. \tag{9}$$

为方便，称度量方程 (9) 为双曲空间 $H_{n,r}$ 中 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 的广义度量方程.

2 定理的证明

下面仅给出定理 2 的证明，定理 1 的证明类似，此处略去.

定理 2 的证明 现在只需要证明 m 阶矩阵 $G=[g(e_i,e'_j)]$ 的秩为 $(n+1)$ 即可.

先证明矩阵 G 的秩不小于 $(n+1)$, 令 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 重合并且为 n 维双曲空间 $H_{n,r}$ 中非退化的 n 维单形，由单形构造定理 [6] 知矩阵 G 的秩不小于 $(n+1)$.

再证明矩阵 G 的秩不大于 $(n+1)$, 当 $m>n+1$, 下面证明 (1) 式成立，设 $e_1,e_2,\dots,e_p$; $e'_1,e'_2,\dots,e'_q$ 为 $H_{n,r}$ 中的点， $e_{p+1},e_{p+2},\dots,e_m$; $e'_{q+1},e'_{q+2},\dots,e'_m$ 为 $H_{n,r}$ 中的超平面，这里 $1\le p,q\le m$, 当 $1\le k\le p; 1\le l\le q$ 时，不妨令

$$e_k=(1,\sqrt{-1}u_{k1},\dots,\sqrt{-1}u_{kn}),\quad e'_l=(1,\sqrt{-1}u'_{l1},\dots,\sqrt{-1}u'_{ln})$$

满足： $\sum_{i=1}^n u_{ki}^2<1;\sum_{i=1}^n u'^2_{ki}<1$; 当 $p+1\le k\le m; q+1\le l\le m$ 时；则令 e_k 表示的超平面为： $u_{k0}+u_{k1}x_1+\cdots+u_{kn}x_n=0$, e'_l 表示的超平面为：

$$u'_{l0}+u'_{l1}x_1+\cdots+u'_{ln}x_n=0,$$

满足：

$$\sum_{i=1}^n u_{ki}^2>u_{k0}^2;\sum_{i=1}^n u'^2_{ki}>u'^2_{k0}.$$

于是可以得到

$$
\begin{aligned}
&\det(G)=\det[g(e_i,e_j')]\\
&=\det\begin{pmatrix}
\underbrace{\dfrac{1-\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}{\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}^2}\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{n}u_{jk}'^2}}}_{1\le i\le p,1\le j\le q} & \underbrace{\dfrac{\sqrt{-1}[u_{j0}'+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}']}{\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}^2}\sqrt{-u_{j0}'+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{jk}'^2}}}_{1\le i\le p,q+1\le j\le m}\\
\underbrace{\dfrac{\sqrt{-1}[u_{i0}+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}']}{\sqrt{-u_{i0}^2+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}^2}\sqrt{1-\sum\limits_{k=1}^{n}u_{jk}'^2}}}_{p+1\le i\le m,1\le j\le q} & \underbrace{\dfrac{-u_{i0}u_{j0}'+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}{\sqrt{-u_{i0}+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}^2}\sqrt{-u_{j0}'+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{jk}'^2}}}_{p+1\le i\le m,q+1\le j\le m}
\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{10}
$$

整理得到

$$
\det[g(e_i,e_j')]=\prod_{k=1}^{p}\sqrt{1-\sum_{k=1}^{n}u_{ik}^2}\prod_{k=1}^{q}\sqrt{1-\sum_{k=1}^{n}u_{jk}'^2}\prod_{k=p+1}^{m}\sqrt{-u_{i0}+\sum_{k=1}^{n}u_{ik}^2}
$$

$$
\prod_{k=q+1}^{m}\sqrt{-u_{j0}'+\sum_{k=1}^{n}u_{jk}'^2}\cdot\det\begin{pmatrix}
\underbrace{1-\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}_{1\le i\le p,1\le j\le q} & \underbrace{u_{j0}'+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}_{1\le i\le p,q+1\le j\le m}\\
\underbrace{u_{i0}+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}_{p+1\le i\le m,1\le j\le q} & \underbrace{-u_{i0}u_{j0}'+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}_{p+1\le i\le m,q+1\le j\le m}
\end{pmatrix}.\tag{11}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
G=[g(e_i,e_j')]&=\begin{pmatrix}
\underbrace{1-\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}_{1\le i\le p,1\le j\le q}\underbrace{u_{j0}'+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}_{1\le i\le p,q+1\le j\le m} & \\
\underbrace{u_{i0}+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}_{p+1\le i\le m,1\le j\le q} & \underbrace{-u_{i0}u_{j0}'+\sum\limits_{k=1}^{n}u_{ik}u_{jk}'}_{p+1\le i\le m,q+1\le j\le m}
\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}
1 & \sqrt{-1}u_{11} & \sqrt{-1}u_{12} & \dots & \sqrt{-1}u_{1n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & \sqrt{-1}u_{p1} & \sqrt{-1}u_{p2} & \dots & \sqrt{-1}u_{pn}\\
\sqrt{-1}u_{p+1,0} & u_{p+1,1} & u_{p+1,2} & \dots & u_{p+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\sqrt{-1}u_{m0} & u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \sqrt{-1}u'_{q+1,0} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{m0} \\ \sqrt{-1}u'_{11} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{q1} & \sqrt{-1}u'_{q+1,1} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{-1}u'_{1q} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{qq} & \sqrt{-1}u'_{q+1,q} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{mq} \\ \sqrt{-1}u'_{1,q+1} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{q,q+1} & \sqrt{-1}u'_{q+1,q+1} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{m,q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{-1}u'_{1n} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{qn} & \sqrt{-1}u'_{q+1,n} & \cdots & \sqrt{-1}u'_{mn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

由 (12) 式容易知道当 $m > n+1$ 时，有 $\det[g(e_i, e'_j)] = 0$, 所以矩阵 G 的秩不大于 $(n+1)$. 综上可知 (9) 式成立. □

3 一点应用

由于两个基本图形的广义度量方程 (8) 和 (9) 是杨路和张景中关于高维非欧空间 $S_{n,r}$ 或 $H_{n,r}$ 中度量方程 [2−5] 以及文献 [7] 主要结果的推广，因此它有更广泛的应用. 在本节中，将利用广义度量方程 (1) 和 (2) 导出两个单形的一些有趣的几何关系. 为方便，先约定一些记号:

设 $\Omega(A) = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ 和 $\Omega(A') = (A'_0, A'_1, \ldots, A'_n)$ 是 n 维双曲 (或球面) 空间 $H_{n,r}$(或 $S_{n,r}$) 中的两个非退化的 n 维单形， $\Omega(A)$ 的顶点 A_i 到 $\Omega(A')$ 的侧面 $\Omega_j(A')$ 的有向距离为 h_{ij},$\Omega(A')$ 的顶点 A'_i 到或 $\Omega(A)$ 的侧面 $\Omega_j(A)$ 的有向距离为 h'_{ij} 这里 $i,j = 0,1,\ldots,n$,h_i 是 $\Omega(A)$ 的侧面 $\Omega_i(A)$ 上所对应的高； h'_i 是 $\Omega(A')$ 的侧面 $\Omega_i(A')$ 上所对应的高. 记 $H_1 = (\sinh\frac{h_{ij}}{r})$(或 $S_1 = (\sin\frac{h_{ij}}{r})$),$H_2 = (\sinh\frac{h'_{ij}}{r})$(或 $S_2 = (\sin\frac{h'_{ij}}{r})$) 分别表示以 $\sinh\frac{h_{ij}}{r}$(或 $\sin\frac{h_{ij}}{r}$), $\sinh\frac{h'_{ij}}{r}$(或 $\sin\frac{h'_{ij}}{r}$) 其元素的 $(n+1)$ 阶方阵，记对角矩阵

$$\begin{cases} H = \mathrm{diag}(\sinh\frac{h_0}{r}, \sinh\frac{h_1}{r}, \ldots, \sinh\frac{h_n}{r}) \\ S = \mathrm{diag}(\sin\frac{h_0}{r}, \sin\frac{h_1}{r}, \sin\frac{h_2}{r}, \ldots, \sin\frac{h_n}{r}) \\ H' = \mathrm{diag}(\sinh\frac{h'_0}{r}, \sinh\frac{h'_1}{r}, \ldots, \sinh\frac{h'_n}{r}) \\ S' = \mathrm{diag}(\sin\frac{h'_0}{r}, \sin\frac{h'_1}{r}, \sin\frac{h'_2}{r}, \ldots, \sin\frac{h'_n}{r}) \end{cases}$$

另外，记侧面 $\Omega_i(A)$ 与 $\Omega_j(A')$) 所成的二面角为 θ_{ij}, 点 A_i 与 A'_j 点的距离为 ρ_{ij}; 记 $\Theta = (\cos\theta_{ij})$, $\Lambda_1 = (\cosh\frac{\rho_{ij}}{r})$ (或 $\Lambda_2 = (\cos\frac{\rho_{ij}}{r})$), $\mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)}$ 表示 $n+1$ 阶零矩阵.

本节的主要结果是

定理 3 沿用上述记号，则有

$$H' = H_1 H^{-1} H_2 \tag{13}$$

或

$$S' = S_1 S^{-1} S_2. \tag{14}$$

在 (13) 和 (14) 式两边取行列式整理即得

推论 1 沿用上述记号，则有

$$\det(H_1)\det(H_2) = \det(H)\det(H') = \prod_{k=0}^{n}(\sinh\frac{h_k}{r}\sinh\frac{h'_k}{r}) \tag{15}$$

或

$$\det(S_1)\det(S_2) = \det(S)\det(S') = \prod_{k=0}^{n}(\sin\frac{h_k}{r}\sin\frac{h'_k}{r}) \tag{16}$$

定理 4 沿用上述记号，则有

$$\Theta=(\cos\theta_{ij})=H\Lambda_1^{-1}H'=(H_1\Lambda_1^{-1}H_2)^{\tau} \tag{17}$$

或

$$\Theta=(\cos\theta_{ij})=S\Lambda_2^{-1}S'=(S_1\Lambda_2^{-1}S_2)^{\tau}. \tag{18}$$

现在应用广义度量方程非常简洁给出定理 3 和 4 的证明.

定理 3 的证明 设 $\Sigma(e)=\{A_0,\dots,A_n;A'_0,\dots,A'_n\}$ 并且 $\Sigma(e')=\{\Omega_0(A),\dots,\Omega_n(A);\Omega_0(A'),\dots,\Omega_n(A')\}$, 应用广义度量方程 (9), 可以知道 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 的度量矩阵

$$G=g(e_i,e'_j)=\begin{pmatrix} H & H_1 \\ H_2 & H' \end{pmatrix} \tag{19}$$

的秩不大于 $(n+1)$,H,H',H_1,H_2 均为 $n+1$ 阶方阵, 我们约定：行列式的行列号由 0 算起. 容易知道：H 可逆, 现在对 (4) 式中的矩阵作初等变换: 将由第 $0,1,\dots,n$ 行组成的 $(n+1)\times(2n+2)$ 矩阵右乘“ $-H^{-1}H_2$ ”加到由第 $n+1,n+2,\dots,2n+1$ 行组成的 $(n+1)\times(2n+2)$ 矩阵，得到

$$G'=\begin{pmatrix} H & H_1 \\ \mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)} & H'-H_1H^{-1}H_2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

由于初等变换不改变矩阵的秩，所以 G' 的秩不大于 $(n+1)$, 又因为矩阵 G' 的 $(n+1)$ 阶子阵 H 可逆，所以有

$$H'-H_1H^{-1}H_2=\mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)} \tag{21}$$

整理 (21) 式即得 (13) 式，类似可以证明 (14) 式，此处略去，定理 3 证毕.

定理 4 的证明 设 $\Sigma(e)=\{A_0,\dots,A_n;\Omega_0(A'),\dots,\Omega_n(A')\}$, $\Sigma(e')=\{A'_0,\dots,A'_n;\Omega_0(A),\dots,\Omega_n(A)\}$, 应用广义度量方程 (9), 可以知道 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 的度量矩阵

$$G=g(e_i,e'_j)=\begin{pmatrix} \Lambda_1 & H \\ H' & \Theta \end{pmatrix} \tag{22}$$

的秩不大于 $(n+1)$, 由文献 [9] 知道: Λ_1 可逆, 对 (22) 式中的矩阵作初等变换: 将由第 $1,2,\dots,n+1$ 行组成的 $(n+1)\times(2n+2)$ 矩阵右乘“ $-\Lambda_1^{-1}H'$ ”加到由第 $n+2,n+3,\dots,2n+2$ 行组成的 $(n+1)\times(2n+2)$ 矩阵，得到

$$G'=g(e_i,e'_j)=\begin{pmatrix} \Lambda_1 & H \\ \mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)} & \Theta-H\Lambda_1^{-1}H' \end{pmatrix}. \tag{23}$$

由于初等变换不改变矩阵的秩，所以 G' 的秩不大于 $(n+1)$, 又因为矩阵 G' 的 $(n+1)$ 阶子阵 Λ_1 可逆，所以有

$$\Theta-H\Lambda_1^{-1}H'=\mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)}. \tag{24}$$

整理 (24) 式即得 (17) 式前一等式.

再设 $\Sigma(e)=\{A_0,\dots,A_n;\Omega_0(A),\dots,\Omega_n(A)\}$, $\Sigma(e')=\{A'_0,\dots,A'_n;\Omega_0(A'),\dots,\Omega_n(A')\}$, 同理应用广义度量方程 (9) 可得 (17) 式后一等式，用类似的方法也可以证明 (18) 式. □

事实上，非欧空间的广义度量方程 (8) 和 (9) 还有广泛的应用，限于篇幅，在此不再叙述.

致谢 对于杨路教授多年来的关心、帮助和悉心指导，作者表示衷心的感谢！

参考文献：

[1] 杨路，张景中. 关于有限点集的一类几何不等式 [J]. 数学学报， 1980, **23**(5): 740–749.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *A class of geometric inequalities on finite points* [J]. Acta Math. Sinica, 1980, **23**(5): 740–749. (in Chinese)

[2] 杨路，张景中. 抽象距离空间的秩的概念 [J]. 中国科学技术大学学报， 1980, **10**(4): 52–65.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *The concept of the rank of an abstract distance space* [J]. J. China Univ. Sci. Tech., 1980, **10**(4): 52–65. (in Chinese)

[3] 杨路，张景中. 度量方程应用于 Sallee 猜想 [J]. 数学学报， 1983, **26**(4): 488–493.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *Application of the metric equation to a conjecture of Sallee* [J]. Acta Math. Sinica, 1983, **26**(4): 488–493. (in Chinese)

[4] 杨路，张景中. 非欧双曲几何的若干度量问题 I- 等角嵌入和度量方程 [J]. 中国科学技术大学学报 (数学专辑), 1983, **13**: 123–134.
YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *Some metric problems in non-Euclidean hyperbolic geometry. I. isogonal embedding and metric equation* [J]. J. China Univ. Sci. Tech., Math. Issue, 1983, **13**: 123–134. (in Chinese)

[5] YANG Lu, ZHANG Jing-zhong. *Metric equations in geometry and their applications* [P]. Internat Centre for Theory Phys Mira-mare-Trieste, 1989, **281**: 1–18.

[6] BLUMENTHAL L M. *Theory and Applications on Distance Geometry* [M]. Second edition Chelsea Publishing Co., New York, 1970.

[7] 杨世国. 非欧空间中双基本图形的度量方程及其应用 [J]. 数学研究与评论， 2001, **21**(2): 311–316.
YANG Shi-guo. *The metric equations of bifundamental figurate in non-euclidean space and applications* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2001, **21**: 311–316. (in Chinese)

[8] 杨定华. 高维欧氏空间中的广义度量方程及其应用 [J]. 数学进展， 2005, **34**(5): 584–590.
YANG Ding-hua. *The generalized metric equations in high-dimensional Euclidean space* [J]. Adv. Math., 2005, **34**: 584–590. (in Chinese)

[9] 徐丹，杨定华. 非欧空间中的 Darboux 定理 [J]. 大学数学. (待发表).
XU Dan, YANG Ding-hua. *The Darboux theorem in non-Euclidean space* [J]. College Math., (to print). (in Chinese)

Generalized Metric Equations in Non-Euclidean Space and Their Applications

YANG Ding-hua
(Chengdu Institute of Computer Applications, Academia Sinica, Sichuan 610041, China)

Abstract: In this paper, the metric equations of bifundamental figurate in non-Euclidean space obtained by Yang Shiguo are improved. The gereralized metric equations are given, which is more convenient for us to study the metric relations of two fundamental figurates. As its applications, some geometric relations of two simplexes in non-Euclidean space are given.

Key words: non-Euclidean space; simplex; fundamental figurate; generalized metric equation.