第26卷第4期 数学研究与评论 Vol.26, No.4
2006年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)04-0825-06 **文献标识码**: **A**

关于 de Sitter 空间中伪脐类空子流形

宋卫东， 潘雪艳
(安徽师范大学数学系，安徽 芜湖 241000)
(E-mail: songweidongahnu@126.com)

摘 要: 本文研究 de Sitter 空间中的紧致伪脐类空子流形，得到了这类空子流形的一个积分不等式及其一些刚性定理.

关键词: de Sitter 空间；伪脐类空子流形；全测地；积分不等式.
MSC(2000): 53C42, 53B50
中图分类: O186.12

1 引 言

指标为 p 的常曲率 $c(c>0)$ 的 $n+p$ 维完备的伪黎曼流形，称为 de Sitter 空间，记为 $S_p^{n+p}(c)$. 研究伪黎曼流形或许比研究黎曼流形更有意义，它们两者虽在研究方面有许多类似之处，但也有截然不同的地方. Minkowski 空间中极大类空超曲面的 Bernstein 定理 [1] 便是典型的一例. 对于 de Sitter 空间中极大类空子流形，文 [2] 证得

定理 A 设 M^n 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 中的紧致的类空子流形，若 M^n 极大，则 M^n 全测地.

文 [3] 研究 de Sitter 空间中具有常平均曲率的类空超曲面，给出了这类空超曲面成为全脐的一些条件.

本文继续研究 de Sitter 空间中的紧致伪脐类空子流形，获得了这类空子流形关于第二基本形式模长平方的一个积分不等式及其一些刚性定理. 具体结果如下

定理 1 设 M^n 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 中紧致无边的伪脐类空子流形，H 为平均曲率，则

$$\int_{M^n}[\frac{1}{p}S^2+n(c-H^2)S-cn^2H^2+n^2H\triangle H]^*1\leq 0\,, \tag{1.1}$$

其中 S 为 M^n 的第二基本形式模长的平方.

定理 2 设 M^n 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 中紧致伪脐类空子流形，且 M^n 的平均曲率为常数. 如果 S 满足

$$\frac{1}{p}S^2+n(c-H^2)S-cn^2H^2\geq 0\,, \tag{1.2}$$

则

(i) $p=1$, M^n 是 $S_1^{n+1}(c)$ 中全脐类空超曲面；或

(ii) M^n 是 $S_p^{n+p}(c)$ 中全测地类空子流形.

收稿日期: 2004-07-12
基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金重点项目 (2004kj166zd)

定理 3 设 M^n 是 de Sitter 空间 $S_p^{n+p}(c)$ 中紧致伪脐类空子流形，且 M^n 的平均曲率为常数. 则

(i) M^n 是 $S_p^{n+p}(c)$ 中全测地类空子流形；或

(ii) M^n 是 $S_p^{n+p}(c)$ 中具有平行平均曲率向量的类空子流形.

本文约定各类指标取值范围

$$1 \le A, B, C, \ldots \le n+p\,; \quad 1 \le i, j, k, \ldots \le n$$

$$n+1 \le \alpha, \beta, \gamma, \ldots \le n+p\,.$$

2 预备知识

设 L^{n+p+1} 是 $n+p+1$ 维实向量空间 R^{n+p+1} 赋予内积

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{\alpha=n+1}^{n+p+1} x_\alpha y_\alpha, \tag{2.1}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+p+1}), y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+p+1})$, 令

$$S_p^{n+p}(c) = \{x\,|x \in L^{n+p+1}, \langle x, x\rangle = \frac{1}{c}\}.$$

其中 $c > 0$, 称为 $n+p$ 维的 de Sitter 空间. 又设 M^n 是等距浸入到 $S_p^{n+p}(c)$ 中 n 维类空子流形，即 $S_p^{n+p}(c)$ 中的伪黎曼度量诱导了 M^n 上的黎曼度量. 现在选取 $S_p^{n+p}(c)$ 上局部伪黎曼正交标架场 $\{e_A\}$, 使得

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle e_i, e_\alpha\rangle = 0, \quad \langle e_\alpha, e_\beta\rangle = -\delta_{\alpha\beta}, \tag{2.2}$$

且 $\{e_i\}$ 与 M^n 相切，又设 $\{\omega_A\}$ 为 $\{e_A\}$ 的对偶标架场，使得 $S_p^{n+p}(c)$ 的伪黎曼度量为

$$ds^2 = \sum_A \varepsilon_A \omega_A^2, \tag{2.3}$$

其中 $\varepsilon_i = 1, \varepsilon_\alpha = -1$.

$\{\omega_{AB}\}$ 为 $S_p^{n+p}(c)$ 的联络 1– 形式，则 $S_p^{n+p}(c)$ 的结构方程为

$$d\omega_A = -\sum_B \varepsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \qquad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \tag{2.4}$$

$$d\omega_{AB} = -\sum_C \varepsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \frac{1}{2}\sum_{C,D} K_{ABCD}\varepsilon_C\varepsilon_D \omega_C \wedge \omega_D, \tag{2.5}$$

$$K_{ABCD} = \varepsilon_A \varepsilon_B c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}), \tag{2.6}$$

其中 K_{ABCD} 是 $S_p^{n+p}(c)$ 的曲率张量. 从而 $S_p^{n+p}(c)$ 具有常数截面曲率 c. 限制在 M^n 上有

$$ds^2 = \sum_i \omega_i^2, \tag{2.7}$$

$$\omega_{\alpha i}=\sum_j h_{ij}^{\alpha}\omega_j,\ h_{ij}^{\alpha}=h_{ji}^{\alpha}. \tag{2.8}$$

$$h=\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_\alpha, \tag{2.9}$$

$$\xi=\frac{1}{n}\sum_{\alpha,i} h_{ii}^{\alpha}\ e_\alpha, \tag{2.10}$$

$$R_{ijkl}=c(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})-\sum_\alpha(h_{ik}^{\alpha}h_{jl}^{\alpha}-h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}). \tag{2.11}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=\sum_i(h_{ik}^{\alpha}h_{il}^{\beta}-h_{il}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}). \tag{2.12}$$

其中 $h\,,\xi\,,R_{\alpha\beta ij}\,,R_{ijkl}$, 分别是 M^n 的第二基本形式，平均曲率向量，法曲率张量，曲率张量. 定义

$$S=\|h\|^2\,,H=\|\xi\|\,,H_\alpha=(h_{ij}^{\alpha})_{n\times n}.$$

定义 h_{ij}^{α} 的共变导数 h_{ijk}^{α} 和 h_{ijkl}^{α} 如下

$$\sum_k h_{ijk}^{\alpha}\omega_k=dh_{ij}^{\alpha}+\sum_k h_{kj}^{\alpha}\omega_{ki}+\sum_k h_{ik}^{\alpha}\omega_{kj}-\sum_\beta h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}, \tag{2.13}$$

$$\sum_l h_{ijkl}^{\alpha}\omega_l=dh_{ijk}^{\alpha}+\sum_l h_{ljk}^{\alpha}\omega_{li}+\sum_l h_{ilk}^{\alpha}\omega_{lj}+\sum_l h_{ijl}^{\alpha}\omega_{lk}-\sum_\beta h_{ijk}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}. \tag{2.14}$$

则有

$$h_{ijk}^{\alpha}=h_{ikj}^{\alpha}, \tag{2.15}$$

$$h_{ijkl}^{\alpha}-h_{ijlk}^{\alpha}=\sum_m(h_{mi}^{\alpha}R_{mjkl}+h_{mj}^{\alpha}R_{mikl})-\sum_\beta h_{ij}^{\beta}R_{\alpha\beta kl}. \tag{2.16}$$

由 (2.11),(2.12),(2.15),(2.16) 经简单计算 [4], 可得 h_{ij}^{α} 的 Laplacian 为

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij}^{\alpha}=&\sum_k h_{ijkk}^{\alpha}\\ =&\sum_k h_{kkij}^{\alpha}+cnh_{ij}^{\alpha}-c\sum_k h_{kk}^{\alpha}\delta_{ij}+\sum_{\beta,k,m} h_{km}^{\alpha}h_{mk}^{\beta}h_{ij}^{\beta}-2\sum_{\beta,k,m} h_{mk}^{\alpha}h_{mj}^{\beta}h_{ik}^{\beta}+\\ &\sum_{\beta,k,m} h_{mi}^{\alpha}h_{mk}^{\beta}h_{kj}^{\beta}-\sum_{\beta,k,m} h_{mi}^{\alpha}h_{mj}^{\beta}h_{kk}^{\beta}+\sum_{\beta,k,m} h_{jm}^{\alpha}h_{mk}^{\beta}h_{ki}^{\beta}\,,\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\triangle h_{ij}^{\alpha}=&\sum_{\substack{i,j,k,m\\ \alpha}} h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha}+cnS-cn^2H^2+\sum_{\alpha,\beta}\big[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)\big]^2-2\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2+\\ &2\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)-\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta H_\alpha)\mathrm{tr}(H_\beta)\,.\end{aligned} \tag{2.18}$$

3 定理的证明

定理 1 的证明 首先选取 e_{n+p} 与 ξ 的方向重合，则

$$\mathrm{tr}H_\alpha=\begin{cases} nH\,, & \alpha=n+p\,,\\ 0\,, & \alpha\neq n+p\,.\end{cases} \tag{3.1}$$

又 M^n 是伪脐的，即

$$h_{ij}^{n+p} = H\delta_{ij}\,. \tag{3.2}$$

由 (3.1),(3.2)

$$\sum_{\alpha,\beta} \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta H_\alpha)(\mathrm{tr}H_\beta) = nH^2S\,, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\alpha\\ i,j,k}} h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha &= \sum_{\substack{\alpha\\ i,j,k}}(h_{ij}^\alpha h_{kki}^\alpha)_j - \sum_{\substack{\alpha\\ i,j,k}} h_{ijj}^\alpha h_{kki}^\alpha\\ &= \sum_{\substack{\alpha\\ i,j,k}}(h_{ij}^\alpha h_{kki}^\alpha)_j - \sum_{\substack{\alpha\\ i,j,k}}(h_{ijj}^\alpha h_{kk}^\alpha)_i + \sum_{\substack{\alpha\\ i,j,k}} h_{kk}^\alpha h_{jjii}^\alpha\\ &= \sum_{\substack{\alpha\\ i,j,k}}(h_{ij}^\alpha h_{kki}^\alpha - h_{jii}^\alpha h_{kk}^\alpha)_j + n^2H\triangle H\,,\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $\triangle H = \sum_i H_{ii}\,.$

另外，由 [6]

$$2\sum_{\alpha,\beta}\left[\mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta^2) - \mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2\right] \geq 0\,, \tag{3.5}$$

$$\sum_{\alpha,\beta}\left[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)\right]^2 \geq \frac{1}{p}S^2\,. \tag{3.6}$$

于是由 (2.18) 及 (3.3)—(3.6)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle S &= \sum_{\substack{\alpha\\ i,j}}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{\substack{\alpha\\ i,j}} h_{ij}^\alpha \triangle h_{ij}^\alpha\\ &\geq \frac{1}{p}S^2 + n(c-H^2)S - cn^2H^2 + \sum_{\substack{\alpha\\ i,j,k}}(h_{ij}^\alpha h_{kki}^\alpha - h_{jii}^\alpha h_{kk}^\alpha)_j + n^2H\triangle H.\end{aligned} \tag{3.7}$$

由 M^n 的紧致无边，根据 Stokes 定理，对上式两边积分即完成定理 1 的证明.

定理 2 的证明 由已知的条件及 (3.7), $\triangle S \geq 0$, 根据 Hopf 极大原理， S 为常数，从而

$$h_{ijk}^\alpha = 0\,, \forall\, \alpha\,, i\,, j\,, k \tag{3.8}$$

$$\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha \triangle h_{ij}^\alpha = 0\,. \tag{3.9}$$

且 (3.7) 成立等号，结合 H 为常数，得

$$0 = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha \triangle h_{ij}^\alpha = \frac{1}{p}S^2 + n(c-H^2)S - cn^2H^2. \tag{3.10}$$

这样， (3.5) 取等号. 从而 M^n 具有平坦的法丛. 另一方面，由于 $(\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta))_{p\times p}$ 是实对称矩阵，故可选取法标架场 $\{e_\alpha\}$, 使之对角化. 即

$$\sum_{\alpha,\beta}\left[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)\right]^2 = \sum_\alpha \left(\mathrm{tr}H_\alpha^2\right)^2\,.$$

又根据 Cauchy 不等式，得

$$(\sum_\alpha \mathrm{tr}H_\alpha^2)^2 \le p\sum_\alpha \left(\mathrm{tr}H_\alpha^2\right)^2 .$$

由 (3.6) 等号成立及 (3.11) 可知，此不等式等号成立，于是

$$\mathrm{tr}H_{n+1}^2 = \mathrm{tr}H_{n+2}^2 = \cdots = \mathrm{tr}H_{n+p}^2. \tag{3.12}$$

而 M^n 是伪脐的，于是由 (3.2),(3.12) 得

$$S = \sum_\alpha \mathrm{tr}H_\alpha^2 = p\,\mathrm{tr}H_{n+p}^2 = p\,nH^2\,, \tag{3.13}$$

代入 (3.10) 得

$$cn^2H^2(p-1) = 0\,. \tag{3.14}$$

于是

(i) $p=1, M^n$ 是 $S_1^{n+1}(c)$ 中全脐类空超曲面．或

(ii) $H=0$, M^n 是 $S_p^{n+p}(c)$ 中极大类空子流形，由定理 A 可知， M^n 全测地．这样就完成了定理 2 的证明.

定理 3 的证明　由于 M^n 的平均曲率 H 为常数，于是

(i) 当 $H=0$ 时，有定理 A 可知， M^n 全测地.

(ii) 当 $H=$ 常数 $\neq 0$ 时，由 (2.13),(3.1),(3.2)

$$\begin{cases} \sum_{i,k} h_{iik}^{n+p}\omega_k = ndH = 0\,, \\ \sum_{i,k} h_{iikk}^{\alpha}\omega_k = -nH\omega_{n+p\,\alpha}\,, \alpha\neq n+p. \end{cases} \tag{3.15}$$

由 (2.14) 及 (3.15) 得

$$\sum_{i,k} h_{iikk}^{n+p} = \sum_{\alpha\neq n+p}(\sum_{i,k} h_{iik}^{\alpha})^2(nH)^{-1}. \tag{3.16}$$

另一方面，由 (3.2) 得

$$\sum_{i,k} h_{iikk}^{n+p} = n\triangle H = 0. \tag{3.17}$$

由 (3.16) 和 (3.17) 得

$$\sum_i h_{iik}^{\alpha} = 0\,, \forall\, k\,, \alpha\neq n+p. \tag{3.18}$$

再由 (3.15) 第一式得

$$\sum_i h_{iik}^{n+p} = 0\,, \forall\, k. \tag{3.19}$$

于是由 (3.18),(3.19) 可知 [5], M^n 具有平行平均曲率向量，这样就完成了定理 3 的证明.

注　由定理 3 知， de Sitter 空间中紧致的常平均曲率伪脐类空子流形研究可转化为紧致具有平行平均曲率向量的伪脐类空子流形的研究.

参考文献：

[1] CHENG S Y, YAN S T. *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces* [J]. Ann of Math., 1976, **104**: 407–419.

[2] ISHIHARA T. *Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space of constant curvature* [J]. Micchigan Math. J., 1988, **35**(3): 345–352.

[3] 许志才. de Sitter 空间中具有常平均曲率的类空超曲面 [J]. 数学学报, 1999, **42**(5): 787–794.
XU Zhi-cai. *On the Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in a de Sitter spaces* [J]. Acta Math. Sinica, 1999, **42**(5): 787–794. (in Chinese)

[4] CHENG Qing-ming. *Complete space-like submanifolds in de Sitter space with parallel mean curvature vetor* [J]. Math z. 1991, 206, 333–339.

[5] 欧阳崇珍. 伪黎曼空间型的 2– 调和类空子流形 [J]. 数学年刊 (A 辑), 2000, **21**: 649–654.
OUYANG Chong-zhen. *2-harmonic space-like submanifolds of a pseudo-Riemannian space form* [J]. Chinese Ann. Math. Ser. A, 2000, **21**: 649–654. (in Chinese)

[6] CHERN S S, CARMO D M, KOBAYASHI S. *Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundmental Form of Constant Lenghth* [M]. New York, Function Analysis and Retaled Fields, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, 1970, 59–75.

On Pseudo-Umbilical Spacelike Submanifolds in de Sitter Space

SONG Wei-dong, PAN Xue-yan
(Dept. of Math., Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: This paper deals with the compact pseudo-umbilical spacelike submanifolds in de Sitter space, and obtains an integrate inequality and some rigidity theorems.

Key words: pseudo-Riemannian space; pseudo-umbilical; spacelike; totally geodesic; integral inequality.