第27卷第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.27, No.3
2007年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)03-0654-05　　**文献标识码**: **A**

半连续格的刻画和映射

伍秀华,　李庆国
(湖南大学数学与计量经济学院, 湖南 长沙 410082)
(E-mail: wuxiuhuanma@163.com)

摘　要: 本文讨论了半连续格的一些性质. 在半连续格中引入半 Scott 开集族, 用半 Scott 开集族来刻画半连续格. 同时定义了半连续格之间的半连续映射, 得到闭包算子的像仍是半连续格的条件. 最后, 研究了半连续格上的半连续映射的全体不动点之集的性质.

关键词: 半素理想; 半连续格; 半连续映射; Galois 联络; 收缩.
MSC(2000): 06B35; 54A10; 54C08
中图分类: O153.1

1 引言和预备

1971 年, D. Scott 为了研究计算机语言引入连续格的概念 [1], 此后, 人们对连续格的研究不断深入, 从而连续格的理论得以迅速发展并在现代数学的许多领域特别是在计算机科学中有着重要的应用, 同时把连续格推广到更一般的范围内. D. Zhao 把连续格推广到半连续格, 把连续格中的一些性质移植到了半连续格中 [2]. 本文将继续讨论半连续格, 在半连续格中引入半 Scott 开集族, 详细讨论半 Scott 开集族的性质, 作为应用讨论了用半 Scott 开集族刻画半连续格的问题. 同时, 定义了半连续格之间的映射, 得到闭包算子的像仍是半连续格的条件. 最后, 研究了半连续格上的半连续映射的全体不动点之集的性质.

先给出要用的基本概念如下 (文中没有交代的概念和符号读者可参见文献 [2,3,5]).

设 L 是偏序集, $S\subseteq L$, 记 $\uparrow S=\{x\in L|\exists a\in S, a\leq x\}$. $\downarrow S=\{x\in L|\exists a\in S, x\leq a\}$, 特别地, 当 $S=\{p\}$ 时, 记 $\uparrow S=\uparrow p, \downarrow S=\downarrow p$, 并且当 $S=\uparrow S$ 时, 称 S 是上集, 当 $S=\downarrow S$ 时, 称 S 是下集.

定义 1.1[4] 格 L 的理想 I 称为半素理想, 若对于任意 $x,y,z\in L$, 当 $x\wedge y\in I$, $x\wedge z\in I$ 时, 有 $x\wedge(y\vee z)\in I$.

用 $\mathrm{Rd}(L)$ 表示所有半素理想组成的集合.

定义 1.2[2] 设 L 为完备格, 对于任意 $a,b\in L$, 称 $a\Leftarrow b$, 若对于任意 $I\in\mathrm{Rd}(L)$, $b\leq\vee I$, 有 $a\in I$. 记 $\Downarrow a=\{x\in L|x\Leftarrow a\}$, $\Uparrow a=\{x\in L|a\Leftarrow x\}$. 若 $a\Leftarrow a$, 称 a 是 $\Leftarrow$- 紧元. 记 $K(L)=\{a\in L|a$ 是 $\Leftarrow$- 紧元 $\}$. 易证 $K(L)$ 是带有最小元的并半格.

注 (1) 若 $a\leq b\Leftarrow c\leq d$, 则 $a\Leftarrow d$.

(2) 若 $Q\subseteq L$, $x,y\in Q$, 用 $x\Leftarrow_Q y$ 来表示在 Q 中 $x\Leftarrow y$ 成立.

定义 1.3[2] 完备格 L 称为半连续格, 若对于任意 $a\in L$, 有 $a\leq\vee\Downarrow a$.

引理 1.4[4] 设 L 为完备格, 则对任意 $a\in L$, $\Downarrow a=\cap\{I\in\mathrm{Rd}(L)|a\leq\vee I\}$.

收稿日期: 2005-05-19; **接受日期**: 2005-11-27
基金项目: 国家自然科学基金 (10471035); 教育部博士点基金 (2004194).

证明 设 $x \in \Downarrow a$, 即 $x \Leftarrow a$. 若对任意 $I \in \mathrm{Rd}(L)$, 满足 $a \leq \vee I$, 则 $x \in I$. 从而 $\Downarrow a \subseteq \cap\{I \in \mathrm{Rd}(L)|a \leq \vee I\}$.

反之，设 $y \in \cap\{I \in \mathrm{Rd}(L)|a \leq \vee I\}$. 对于任意 $I \in \mathrm{Rd}(L)$, 满足 $a \leq \vee I$, 有 $y \in I$, 从而 $y \Leftarrow a$. 因此 $\cap\{I \in \mathrm{Rd}(L)|a \leq \vee I\} \subseteq \Downarrow a$. □

引理 1.5[4] 格 L 中的理想 P 为半素理想当且仅当存在一族素理想 $\{P_j|j \in J\}$ 使 $P = \cap_{j\in J} P_j$.

注 每个素理想都是半素理想.

引理 1.6 设 L 是完备格，则对任意 $a \in L$, 有 $\Downarrow a \in \mathrm{Rd}(L)$.

证明 由引理 1.4, 1.5 直接得证. □

定义 1.7[2] 设 L 是完备格，若对于任意 $x \in L$, $x \leq \vee(\Downarrow x \cap K(L))$, 且 $\downarrow(\Downarrow x \cap K(L)) \in \mathrm{Rd}(L)$, 则称 L 是半代数格.

显然半代数格是半连续格.

引理 1.8 设 L 是半代数格，则对任意 $x, y \in L$, $y \Leftarrow x$ 当且仅当存在 $d \in \Downarrow x \cap K(L)$ $s.t.$ $y \leq x$.

证明 直接由定义 1.7 可证. □

2 半连续格的刻画

定义 2.1 设 L 是完备格，称 L 的子集为半 Scott 开集，如果 U 满足下面两个条件：

(1) $U = \uparrow U$.

(2) 对于任意 $I \in \mathrm{Rd}(L)$, $\vee I \in U$ 蕴含着 $I \cap U \neq \emptyset$.

易证所有满足定义 2.1 的半 Scott 开集组成的集族生成一个拓扑，我们称之为半 Scott 拓扑．记为 $\sigma_{\Leftarrow}(L)$.

引理 2.2[2] 设 L 是半连续格，对任意 $x, y \in L$, 若 $x \Leftarrow y$, 则存在 $z \in L$ 使 $x \Leftarrow z \Leftarrow y$.

命题 2.3 设 L 为半连续格，则对任意 $x \in L$, 有

(1) $\Uparrow x \in \sigma_{\Leftarrow}(L)$.

(2) $L \backslash \downarrow x \in \sigma_{\Leftarrow}(L)$.

证明 (1) 显然 $\Uparrow x$ 是上集．设 $I \in \mathrm{Rd}(L)$ 满足 $\vee I \in \Uparrow x$, 则 $x \Leftarrow \vee I$. 由引理 2.2 知 $\exists z \in L$ 使 $x \Leftarrow z \Leftarrow \vee I$, 因此 $z \in I$. 故 $\Uparrow x \cap I \neq \emptyset$.

(2) 显然 $L \backslash \downarrow x$ 是上集．设 $I \in \mathrm{Rd}(L)$ 满足 $\vee I \in L \backslash \downarrow x$. 假设 $I \cap (L \backslash \downarrow x) = \emptyset$, 则 $I \subseteq \downarrow x$. 从而 $\vee I \leq \vee \downarrow x = x$. 产生矛盾．因此 $I \cap (L \backslash \downarrow x) \neq \emptyset$. □

命题 2.4 设 L 为半连续格，则 $U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)$ 当且仅当 $U = \uparrow U$ 且 $U \subseteq \cup\{\Uparrow x|x \in U\}$.

证明 *必要性*．只须证明 $U \subseteq \cup\{\Uparrow x|x \in U\}$. 对任意 $x \in U$, 由引理 1.6 知 $\Downarrow x \in Rd(L)$. 由于 L 是半连续格，则 $x \leq \vee \Downarrow x$, 因此 $\vee \Downarrow x \in U$. 又因为 $U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)$, 从而 $\Downarrow x \cap U \neq \emptyset$. 故存在 $y \in \Downarrow x \bigcap U$, 从而 $U \subseteq \cup\{\Uparrow x|x \in U\}$.

充分性．设 $I \in \mathrm{Rd}(L)$, 满足 $\vee I \in U$, 由条件知 $U \subseteq \cup\{\Uparrow x|x \in U\}$, 从而存在 $x \in U$ s.t. $\vee I \in \Uparrow x$, 即 $x \Leftarrow \vee I$, 从而 $x \in I$. 因此 $I \cap U \neq \emptyset$. □

定理 2.5 设 L 是完备格，考虑下列条件：

(1) L 为半连续格.

(2) 对任意 $U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)$, $U \subseteq \cup\{\Uparrow x|x \in U\}$.

(3) 对任意 $x \in L$, $x = \vee\{\wedge U | x \in U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)\}$.

则 (3)⇒(1)⇔(2). 若对于任意 $a, b \in L$, $a \Leftarrow b$ 蕴含着 $a \leq b$, 则 (1)⇒(3), 从而上述三个条件等价.

证明 (1)⇒(2). 由命题 2.4 可知.

(2)⇒(1). 对任意 $x \in L$, 令 $y = \vee \Downarrow x$, 若 $x \not\leq y$, 则 $x \in L \backslash \downarrow y \in \sigma_{\Leftarrow}(L)$, 由命题 2.4 知，存在 $z \in L \backslash \downarrow y$ s.t. $z \Leftarrow x$, 因此 $z \leq y$, 产生矛盾. 故 $x \leq y = \vee \Downarrow x$.

(3)⇒(1). 设对于任意 $x \in L$, $x \in U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)$, $I \in \mathrm{Rd}(L)$ 满足 $x \leq \vee I$. 从而 $\vee I \in U$, 则 $I \cap U \neq \emptyset$, 即存在 $a \in I \cap U$, 则 $\wedge U \leq a \in I$, 因此 $\wedge U \in I$, 从而 $\wedge U \Leftarrow x$, 也即 $\{\wedge U | x \in U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)\} \subseteq \Downarrow x$. 故 $x = \vee\{\wedge U | x \in U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)\} \leq \vee \Downarrow x$.

(1)⇒(3). 设 $y = \vee\{\wedge U | x \in U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)\}$. 显然 $y \leq x$, 故只须证明 $x \leq y$. 假设 $x \not\leq y$, 则 $x \in L \backslash \downarrow y \in \sigma_{\Leftarrow}(L)$, 从而存在 $z \in L$ 满足 $z \Leftarrow x$, $z \not\leq y$, 则 $x \in \Uparrow z$. 由条件知，对任意 $y \in \Uparrow z$, $z \Leftarrow y$ 蕴含着 $z \leq y$, 则 $\Uparrow z \subseteq \uparrow z$, 从而 $z = \wedge \uparrow z \leq \wedge \Uparrow z \leq y$. 矛盾. 因此 $x = \vee\{\wedge U | x \in U \in \sigma_{\Leftarrow}(L)\}$. □

3 半连续映射

定义 3.1 设 L, L' 为完备格，映射 $f: L \longrightarrow L'$ 称为半连续映射，若对于任意 $I \in \mathrm{Rd}(L)$, $f(\vee I) = \vee f(I)$ 且 $\downarrow f(I) \in \mathrm{Rd}(L')$.

定义 3.2[3] 设 L 是偏序集，称映射 $f: L \longrightarrow L$ 为投影算子，若 f 保序且 $f^2 = f$. 若 f 为 L 上的投影算子且 $f \geq 1_L$, 则称 f 为 L 上的闭包算子.

引理 3.3[3] 设 L 为完备格， $p: L \longrightarrow L$ 为投影算子，则 $p(L)$ 是完备格.

定义 3.4[3] 设 P, Q 是偏序集，映射 $g: P \longrightarrow Q$, $d: Q \longrightarrow P$ 为保序映射，称 (g, d) 是 P 到 Q 的 Galois 联络，若 $gd \geq 1_Q$, $dg \leq 1_P$. 此时称 g 为 d 的左伴随， d 为 g 的右伴随.

引理 3.5[3] 设 P, Q 是偏序集， (g, d) 为从 P 到 Q 的 Galois 联络的充分必要条件是对于任意 $x \in P$, $y \in Q$, $g(x) \geq y$ 当且仅当 $x \geq d(y)$.

引理 3.6 设 P, Q 是完备格， (g, d) 为从 P 到 Q 的 Galois 联络. 若 g 是半连续映射，则 d 保 $\Leftarrow$- 关系，即对任意 $x, y \in Q$, $x \Leftarrow y$ 蕴含着 $d(x) \Leftarrow d(y)$.

证明 设 $x, y \in Q$, $x \Leftarrow y$, $I \in \mathrm{Rd}(P)$ 满足 $d(y) \leq \vee I$. 由引理 3.5 知 $y \leq g(\vee I)$. 由于 g 是半连续映射，则 $y \leq g(\vee I) = \vee g(I) = \vee \downarrow g(I)$, 从而 $x \in \downarrow g(I)$, 因而存在 $m \in I$ $s.t.$ $x \leq g(m)$, 则 $d(x) \leq dg(m) \leq m$, 因此 $d(x) \in I$, 故 $d(x) \Leftarrow d(y)$. □

引理 3.7 设 L 是半连续格，映射 $c: L \longrightarrow L$ 为保有限交的闭包运算，则 $c(K(L) \subseteq K(c(L))$. 若 L 为半代数格且对任意 $x \in L$, $c(\Downarrow x \cap K(L)) \in \mathrm{Rd}(c(L))$, 则 $c(K(L)) = K(c(L))$.

证明 令 $Q = c(L)$, 设 $k \in K(L)$, $I \in \mathrm{Rd}(Q)$ 满足 $c(k) \leq \vee I$, 由于 c 是闭包运算，从而 $k \leq c(k)$, 则 $k \Leftarrow c(k) \leq \vee I$. 我们称 I 在 L 中生成的下集 $\downarrow I \in \mathrm{Rd}(L)$. 首先， $\downarrow I$ 显然是 L 中的理想. 设 $x \wedge y$, $x \wedge z \in \downarrow I$, 则存在 $m, n \in I$ s.t. $x \wedge y \leq m$, $x \wedge z \leq n$. 由于 c 保有限交，则 $c(x \wedge y) = c(x) \wedge c(y) \leq c(m) = m$, $c(x \wedge z) = c(x) \wedge c(z) \leq c(n) = n$, 由引理 3.3 知 $c(L)$ 是完备格，从而 $c(x) \wedge c(y)$, $c(x) \wedge c(z) \in c(L)$, 则 $c(x) \wedge c(y)$, $c(x) \wedge c(z) \in I$, 从而 $c(x) \wedge (c(y) \vee c(z)) \in I$. 又因为 $x \wedge (y \vee z) \leq c(x) \wedge (c(y) \vee c(z)) \in I$, 因此 $x \wedge (y \vee z) \in \downarrow I$, 则 $\downarrow I \in \mathrm{Rd}(L)$. 由于 $k \Leftarrow c(k) \leq \vee I \leq \vee \downarrow I$, 则 $k \in \downarrow I$. 因此存在 $d \in I$ s.t. $k \leq d$, 从而 $c(k) \leq c(d) = d \in I$, 则 $c(k) \in I$, 故 $c(k) \in K(Q)$.

若 L 为半代数格，则对于任意 $x \in L$, $x \le \vee(\Downarrow x \cap K(L))$, $\downarrow(\Downarrow x \cap K(L)) \in \mathrm{Rd}(L)$. 设 $y \in K(Q)$, 则 $y \Leftarrow_Q y = c(y) \le c(\vee \Downarrow y \cap K(L)) = c(\vee \downarrow(\Downarrow y \cap K(L))) = \vee c(\downarrow(\Downarrow y \cap K(L))) \le \vee \downarrow c(\Downarrow y \cap K(L)) = \vee c(\Downarrow y \cap K(L))$, 由条件知 $y \in c(\Downarrow y \cap K(L))$, 从而 $\exists d \in K(L)$, $d \Leftarrow y$ s.t. $y = c(d)$. □

一般而言，半连续格上保有限交的闭包运算并不保 $\Leftarrow$- 关系．现举下例予以说明.

例 3.8 设 L 为图 1 所示的完备格．显然 L 是半连续格，定义映射 $f: L \longrightarrow L$, 对任意 $x \in L$, $f(x) = c$, 易知 f 是保有限交的闭包运算， $a \Leftarrow b$, $f(a) = c \not\Leftarrow c = f(b)$, 故 f 不保 $\Leftarrow$- 关系.

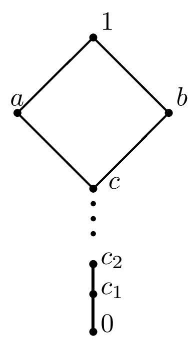

图 1

定理 3.9 设 L 是半连续格，映射 $f: L \longrightarrow L$ 为半连续的闭包运算，若 f 保有限交和 $\Leftarrow$- 关系，则 $f(L)$ 为半连续格.

证明 令 $Q = f(L)$, 由引理 3.3 知 Q 为完备格，故只须证明对任意 $x \in Q$, $x \le \vee \Downarrow_Q x$, 其中 $\Downarrow_Q x = \{y \in Q | y \Leftarrow_Q x\}$.

因为 L 是半连续格，从而 $x \le \vee \Downarrow x$, 则 $f(x) \le f(\vee \Downarrow x) = \vee f(\Downarrow x)$. 设 $x, y \in L$, $y \Leftarrow x$, 由于 f 保 $\Leftarrow$- 关系，则 $f(y) \Leftarrow f(x) = x$, 设 $I \in \mathrm{Rd}(Q)$ 满足 $x \le \vee I$, 由引理 3.7 的证明过程知 I 在 L 中生成的下集 $\downarrow I \in \mathrm{Rd}(L)$, 又 $x \le \vee I \le \vee \downarrow I$, 则 $f(y) \in \downarrow I$, 故存在 $d \in I$ 使 $f(y) \le d$, 因此 $f(y) \in I$, 从而 $f(y) \Leftarrow_Q x$, 则 $f(\Downarrow x) \subseteq \Downarrow_Q x$, 从而 $x = f(x) \le \vee f(\Downarrow x) \le \vee \Downarrow_Q x$. □

推论 3.10 设 L 是半连续格，映射 $f: L \longrightarrow L$ 为保有限交的半连续闭包运算，若 f 有半连续的上伴随，则 $f(L)$ 是半连续格.

证明 由引理 3.6, 定理 3.9 可证. □

映射的不动点为设置递归结构的意义提供了一种方法，并可用于解形如 $D \cong FD$ 的 Domain 方程，从而研究映射的不动点有重要意义．在文献 [6] 中，寇辉等分别证明了连续 L-domain 之间的稳定映射和 FS-domain 之间的一致交换映射的不动点集的性质，并得到相应的不动点集为其收缩的条件．现在我们讨论在半连续格中是否可得到类似的结论呢？

定义 3.11 设 L 为半连续格，映射 $f: L \longrightarrow L$ 为半连续映射，对于 $x \in L$, 若 $f(x) = x$, 则称 x 是 f 的不动点．记 f 的全体不动点集为 $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in L | f(x) = x\}$.

定义 3.12 设 L, L_1 为完备格，若存在保序的半连续映射 $r: L \longrightarrow L_1$, $h: L_1 \longrightarrow L$ 满足 $r \cdot h = id_{L_1}$, 则称 L_1 为 L 的收缩.

定理 3.13 设 L 是半连续格，映射 $f: L \longrightarrow L$ 为半连续映射，若 f 是保有限交和 $\Leftarrow$- 关

系的闭包运算，则 $\mathrm{Fix}(f)$ 是 L 的收缩.

证明 令 $Q=\mathrm{Fix}(f)$, 由于 f 为闭包运算，则 $Q=f(L)$. 由定理 3.9 知 Q 为半连续格. 设 f 的余限制为 $f^0: L \longrightarrow f(L)$, 显然 f^0 为保序映射. 对任意 $I \in \mathrm{Rd}(L)$, 有 $f^0(\vee I)=f(\vee I)=\vee f(I)=\vee f^0(I)$. 令 $I^*=\downarrow f^0(I) \in \mathrm{Rd}(L)$. 显然 $I^* \cap Q$ 为 Q 中的下集. 设 $x,y,z \in Q$ 满足 $x\wedge y \in I^*\cap Q$, $x\wedge z \in I^*\cap Q$, 则 $x\wedge y \in I^*$, $x\wedge z \in I^*$, $x\wedge y \in Q$, $x\wedge z \in Q$, 从而 $x\wedge(y\vee z) \in I^*$. 由引理 3.3 知 Q 为完备格，从而 $x\wedge(y\vee z)\in Q$, 则 $I^*\cap Q \in \mathrm{Rd}(Q)$. 因此 f^0 为保序的半连续映射. 定义映射 $r=f^0: L \longrightarrow Q$, 则当 $x \in Q$ 时， $r(x)=f^0(x)=x$. 令 $h: Q \longrightarrow L$ 是包含映射，显然 h 是保序的半连续映射，则对于任意 $x \in Q$, $rh(x)=r(x)=x$. □

定理 3.14 半连续格 L 的任意收缩 L_1 仍是半连续格.

证明 记 $\Downarrow_{L_1} x=\{y\in L_1 | y \Leftarrow_{L_1} x\}$. 我们只需证明对于任意的 $x \in L_1$, $x \le \vee \Downarrow_{L_1} x$.

由于 L_1 为 L 的收缩，由定义 3.12 知，存在保序的半连续映射 $r: L\to L_1$, $h: L_1 \to L$ 满足 $r\circ h=id_{L_1}$. 对任意 $x\in L_1$, $x=r\circ h(x)$, $h(x)\in L$. 因为 L 是半连续格，则 $h(x)\le \vee\Downarrow h(x)$, 故 $x=rh(x)\le r(\vee\Downarrow h(x))=\vee r(\Downarrow h(x))$. 对于任意 $y \Leftarrow h(x)$, 设 $I\in \mathrm{Rd}(L_1)$, $x\le \vee I$, 则 $h(x)\le h(\vee I)=\vee h(I)=\vee\downarrow h(I)$, 因此 $y\in\downarrow h(I)$, 故存在 $d\in I$ 使 $y\le h(d)$, 从而 $r(y)\le rh(d)=d$, 则 $r(y)\in I$, 因此 $r(y)\Leftarrow_{L_1} x$, 即 $r(\Downarrow h(x))\subseteq \Downarrow_{L_1} x$, 从而 $x\le \vee r(\Downarrow h(x))\le \vee\Downarrow_{L_1} x$. □

参考文献:

[1] SCOTT D. *Continuous Lattices* [M]. Lecture Notes in Math., Vol. 274, Springer, Berlin, 1972.
[2] ZHAO D. *Semicotinuous lattices*[J]. Algebra Universalis, 1997, 37: 458-476.
[3] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMEL K, et al. *Continuous Lattices and Domains* [M]. Cambridge University Press, 2003.
[4] RAY Y. *Semiprime ideals in general lattices* [J]. J. Pure Appl. Algebra, 1989, **56**: 105–118.
[5] 郑崇友，樊磊，崔宏斌. Frame 与连续格 [M]. 北京：首都师范大学出版社， 1994.
ZHENG Chong-you, FAN Lei, CUI Hong-bin. *Introduction to Frame and Continuous Lattices* [M]. 2nd ed., Beijing: Capital Normal University Press, 1994. (in Chinese)
[6] 寇辉，罗懋康. Scott 连续自映射的不动点 [J]. 中国科学 (A 辑), 2001, 31(6): 523–528.
KOU Hui, LUO Mao-kang. *Fixed points of Scott continuous self-maps* [J]. Sci. China Ser. A, 2001, **44**: 1433–1438.

Characterizations and Functions of Semicontinuous Lattices

WU Xiu-hua, LI Qing-guo
(College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: In this paper, we mainly discuss some properties of semicontinuous lattices and give the characterizations of semicontinuous lattices. We also define functions between two semicontinuous lattices and obtain the conditions under which the image of a closure operator is also semicontinuous. Finally we study the property about fixed points of semicontinuous lattices.

Key words: semiprime ideal; semicontinuous lattice; semicontinuous function; Galois connection; retract.