第20卷第3期　　高能物理与核物理　　Vol.20, No.3
1996年3月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　1996

# 与不变量有关的幺正变换方法和三次量子化宇宙波函数的演化*

高孝纯　高隽　符建

（浙江大学物理系　杭州　310027）

1995-03-03 收稿

**摘　要**

首先在推广了的量子不变量理论的基础上建立了与不变量有关的幺正变换方法，并用此方法研究了三次量子化宇宙波函数的演化，求得了系统的相因子、波函数．并通过构造相干态求得了 Wheeler－DeWitt 方程的解以及由三次量子化引起的相对量子起伏．

**关键词**　与不变量有关的幺正变换，三次量子化宇宙波函数，Wheeler－DeWitt 方程的解，量子起伏．

## 1 引　言

量子不变量理论是由 Lewis 和 Riesenfeld 首先提出的[1]，它特别适用于一维含时系统的研究[2,3]．在文献[4]中，我们求得了不变量的形式解，引入了基本不变量的概念，推广了 Lewis－Riesenfeld 不变量理论．这一推广使我们有可能找到不变量的完全集、建立不变量表象，用不变量理论研究含时高维量子系统和无穷维场论系统．本文将应用在推广了的量子不变量理论基础上建立起来的幺正变换方法研究一个无穷维场论问题——三次量子化宇宙波函数的演化．

在量子宇宙学中，描述宇宙状态的波函数适合 Wheeler－DeWitt 方程[5,6]，但由于该方程是双曲型的，会导致负几率困难[5－7]．为了克服这一困难，一些物理学家模仿 Klein－Gordon 场的处理，提出了三次量子化表述[8,9]，即把宇宙波函数再一次量子化．这类三次量子化表述在宇宙学的其它问题中也得到了应用[10]．最近，Abe[11] 用我们提出的推广了的量子不变量理论[4] 研究了三次量子化宇宙波函数的演化，讨论了 Wheeler－DeWitt ‘经典’轨道（Wheeler－DeWitt 方程的解）附近的量子起伏，他所采用的是充满了均匀无质量标量场的开放及平直的 Friedmann－Robertson－Walker(FRW) 微超空间宇宙模型．然而，他并没有求得相因子、波函数以及 Wheeler－DeWitt 轨道的正确表达式，这是因为我们在文献[4]中主要研究的是系统演化满足循环条件时的 Aharonov－Anandan 相因子，而宇宙波函数的演化并不满足循环条件，因此象 Abe 那样简单地应用文献[4]中的

* 国家自然科学基金、国家教委博士点基金、浙江省自然科学基金资助．

方法不能得到正确的结果，而必须采用新的方法．在本文中，我们首先在推广了的量子不变量理论的基础上建立与不变量有关的幺正变换方法，然后用此方法研究三次量子化宇宙波函数的演化，求得相因子、宇宙波函数 Wheeler－DeWitt 轨道的正确表达式以及由三次量子化引起的相对量子起伏，修正了 Abe 的工作．

## 2　与不变量有关的幺正变换方法

在本节中，以一维量子系统为例建立与不变量有关的幺正变换方法．考虑一个一维含时系统，其哈密顿为 $\hat{H}(t)$．系统的厄密不变量 $\hat{I}(t)$ 满足

$$\partial\hat{I}(t)/\partial t-(\mathrm{i}/\hbar)[\hat{I}(t),\hat{H}(t)]=0. \tag{1}$$

$\hat{I}(t)$ 的本征方程为

$$\hat{I}(t)|\lambda_n,t\rangle=\lambda_n|\lambda_n,t\rangle,\ \partial\lambda_n/\partial t=0. \tag{2}$$

利用 Lewis－Riesenfeld 量子不变量理论[1]，可以证明系统含时 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar\partial|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}/\partial t=\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \tag{3}$$

的特解 $|\lambda_n,t\rangle_{\mathrm{S}}$ 与 $\hat{I}(t)$ 的本征态 $|\lambda_n,t\rangle$ 相差一个相因子 $\exp[\mathrm{i}\varphi_n(t)]$，即

$$|\lambda_n,t\rangle_{\mathrm{S}}=\exp[\mathrm{i}\varphi_n(t)]|\lambda_n,t\rangle. \tag{4}$$

于是方程 (3) 的通解可写为

$$|\psi(t)\rangle_{\mathrm{S}}=\Sigma_n C_n\exp[\mathrm{i}\varphi_n(t)]|\lambda_n,t\rangle, \tag{5}$$

其中 $\varphi_n(t)=\int_0^t\langle\lambda_n,t'|\mathrm{i}\partial/\partial t'-\hat{H}(t')/\hbar|\lambda_n,t'\rangle\mathrm{d}t'$，$C_n=\langle\lambda_n,0|\psi(0)\rangle_{\mathrm{S}}$．

在文献 [4] 中，我们推广了 Lewis－Riesenfeld 不变量理论[1]，证明了：(i) 方程 (1) 的形式解为：$\hat{I}(t)=\hat{U}(t)\hat{I}(0)\hat{U}^{+}(t)$，其中 $\hat{U}(t)=\hat{P}\exp\left(-\mathrm{i}\hbar^{-1}\int_0^t\hat{H}(t')\,\mathrm{d}t'\right)$ 是系统的时间演化算符．$\hat{I}(0)$ 可以任意选择，因此 $\hat{I}(t)$ 既可以是厄密的，也可以是非厄密的．(ii) 对于一维系统，存在两个基本不变量 $\hat{x}(t)=\hat{U}(t)\hat{x}\hat{U}^{+}(t)$, $\hat{p}(t)=\hat{U}(t)\hat{p}\hat{U}^{+}(t)$．任意不变量 $\hat{I}(t)=\hat{U}(t)\hat{I}(0)\hat{U}^{+}(t)$ 均可表示成 $\hat{x}(t)$ 和 $\hat{p}(t)$ 的幂次项的和，只要 $\hat{I}(0)$ 可以表示成 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 的幂次项的和．(iii) 在某些情形下，可以用一个非厄密的不变量从 Schrödinger 方程的一个解构造出解的完全集．(iv) 通过选择一个相互对易的不变量的完全集，可以将以上概念用于高维和无穷维系统[11]的研究．

下面我们在上述推广了的不变量理论的基础上建立与不变量有关的幺正变换方法．在某些物理上感兴趣的情形中，对 $\hat{I}(t)$，有可能找到一个依赖于时间的幺正变换 $\hat{V}(t)$，使得 $\hat{I}_{\mathrm{v}}=\hat{V}^{+}(t)\hat{I}(t)\hat{V}(t)$ 不依赖于时间．$\hat{I}_{\mathrm{v}}$ 的本征方程为

$$\hat{I}_{\mathrm{v}}|\lambda_n\rangle=\lambda_n|\lambda_n\rangle,\ |\lambda_n\rangle=\hat{V}^{-1}|\lambda_n,t\rangle. \tag{6}$$

注意，式 (6) 中的 $\lambda_n$ 与式 (2) 中的相同．在这个幺正变换下，$\hat{H}(t)$ 变为 $\hat{H}_{\mathrm{v}}(t)$

$$\hat{H}_{\mathrm{v}}(t)=\hat{V}^{+}(t)\hat{H}(t)\hat{V}(t)-\mathrm{i}\hbar\hat{V}^{+}(t)\partial\hat{V}(t)/\partial t. \tag{7}$$

很容易证明此幺正变换保证：与 $\hat{H}_{\mathrm{v}}(t)$ 对应的含时 Schrödinger 方程的特解 $|\lambda_n,t\rangle_{\mathrm{SV}}$ 与 $\hat{I}_{\mathrm{V}}$ 的

本征态 $|\lambda_n>$ 仅仅相差一个相因子 $\exp[i\varphi_n(t)]$，即

$$|\lambda_n,t\rangle_{SV}=\exp[i\varphi_n(t)]|\lambda_n\rangle. \tag{8}$$

值得强调的是此相因子与式(4)中的完全相同. 将 $|\lambda_n,t\rangle_{SV}$ 代入与 $\hat{H}_V(t)$ 对应的含时 Schrödinger 方程:

$$i\hbar\partial|\lambda_n,t\rangle_{SV}/\partial t=\hat{H}_V(t)|\lambda_n,t\rangle_{SV}, \tag{9}$$

可得: $-\hbar\dot{\varphi}(t)|\lambda_n\rangle=\hat{H}_V(t)|\lambda_n\rangle$. 这表明 $\hat{H}_V(t)$ 与 $\hat{I}_V$ 的区别仅为一个依赖于时间的相乘的 $c$ 数. 因此, 只要能找到幺正变换 $\hat{V}(t)$, 那么含时 Schrödinger 方程(3)的求解就转化为较为简单的方程(9)的求解.

## 3 用与不变量有关的幺正变换方法研究三次量子化宇宙波函数的演化

充满了均匀无质量标量场 $\varphi(t)$ 的 FRW 宇宙模型的 Wheeler-DeWitt 方程为[7,9] ($\hbar=c=[4\pi G/3]^{1/2}=1$, $G$ 为引力常数)

$$[\partial^2/\partial\alpha^2-\partial^2/\partial\varphi^2+U(\alpha,\varphi)]\psi(\varphi,\alpha)=0,$$
$$U(\alpha,\varphi)=2v^2\exp(4\alpha)[\exp(2\alpha)V(\varphi)-k/2],\ \alpha=\ln[a(t)], \tag{10}$$

其中 $\psi(\varphi,\alpha)$ 是描写宇宙状态的波函数; $a(t)$ 是宇宙标度因子; $k$ 为时空曲率参量, $k=0$、1、$-1$ 分别代表平直、封闭、开放宇宙; $v$ 是所考虑的空间体积, 它对不同的 $k$ 是一个固定的有限常数[9]; $V(\varphi)$ 称为物质势. 可取 $\alpha$ 作为 '时间'(内时间)变数, $\varphi$ 作为 '空间' 变数[5,11,12]. 方程(10)是一个二阶的双曲型(Klein-Gordon 型)偏微分方程, 如果把 $\psi(\varphi,\alpha)$ 当作量子波函数就会导致负几率问题[5-7,9].

一些物理学家为了解决这个问题, 提出了三次量子化表述[8,9], 将 $\psi(\varphi,\alpha)$ 再一次量子化. 为了方便, 一般采用微超空间模型[9], 即取 $V(\varphi)=V_0$(常数), 这时 $U(\alpha,\varphi)=\eta(\alpha)=2v^2\exp(4\alpha)[\exp(2\alpha)V_0-k/2]$. 在三次量子化表述中, Wheeler-DeWitt 方程(10)被看成是由 '经典' 作用量 $S=\int d\alpha d\varphi \mathbb{L}=(1/2)\int d\alpha\, d\varphi[(\partial\psi/\partial\alpha)^2-(\partial\psi/\partial\varphi)^2-\eta(\alpha)\psi^2]$ 导出的 'Euler-Lagrange' 方程, 在这里, $\psi$ 已不再是波函数, 而是 '经典' 场. '经典' 正则动量 $\pi$ 和 '经典' 哈密顿 $H$ 分别为: $\pi=\partial\mathbb{L}/\partial\dot{\psi}=\dot{\psi}$, $H=(1/2)\int d\varphi[\pi^2+(\partial\psi/\partial\varphi)^2+\eta(\alpha)\psi^2]$, 其中 $\dot{\psi}=\partial\psi/\partial\alpha$. 采用正则量子化, $\psi$ 和 $\pi$ 成为算符, 它们满足等 "时" 对易关系

$$[\hat{\psi}(\varphi,\alpha),\hat{\pi}(\varphi',\alpha)]=i\delta(\varphi-\varphi'),$$
$$[\hat{\psi}(\varphi,\alpha),\hat{\psi}(\varphi',\alpha)]=[\hat{\pi}(\varphi,\alpha),\hat{\pi}(\varphi',\alpha)]=0. \tag{11}$$

在 '泛函' Schrödinger 图象中, $\hat{\pi}(\varphi)\to -i\delta/\delta\psi(\varphi)$, 三次量子化哈密顿为

$$\hat{H}(\alpha)=(1/2)\int d\varphi([-i\delta/\delta\psi(\varphi)]^2+(\partial\hat{\psi}/\partial\varphi)^2+\eta(\alpha)\hat{\psi}^2). \tag{12}$$

三次量子化宇宙波函数 $\Phi[\psi,\alpha]\equiv\langle\psi|\Phi(\alpha)\rangle$ 满足含 "时" Schrodinger 方程[11,12]

$$i\partial\Phi[\psi,\alpha]/\partial\alpha=\hat{H}(\alpha)\Phi[\psi,\alpha], \tag{13}$$

此方程完全可以用推广了的量子不变量方法来求解[4]. 这正是 Abe 在他最近的工作中所作的. 但是由于他没有注意到文献[4]中有关不变量循环条件的讨论，所以他没有得出相因子、宇宙波函数以及 Wheeler－DeWitt 轨道的正确表达式.

在本节中我们用与不变量有关的幺正变换方法研究 $\Phi[\psi,\alpha]$ 的演化，求得相因子、波函数及 Wheeler－DeWitt 轨道的正确表达式. 采用'动量'表象，

$$\hat{\psi}(\varphi)=(2\pi)^{-1/2}\int \mathrm{d}p\,[\exp^{\mathrm{i}p\varphi}\hat{J}(p)],$$

$$-\mathrm{i}\delta/\delta\psi(\varphi)=(2\pi)^{-1/2}\int \mathrm{d}p(\exp^{-\mathrm{i}p\varphi}[-\mathrm{i}\delta/\delta J(p)]),\tag{14}$$

由于 $\psi$ 为实，所以 $\hat{J}(p)=\hat{J}^*(-p)$. 在'动量'表象，式(12)中的 $\hat{H}(\alpha)$ 变为

$$\hat{H}(\alpha)=\int \mathrm{d}p\hat{H}(p,\alpha),$$

$$\begin{aligned}\hat{H}(p,\alpha)\equiv\ &(1/2)\{[-\mathrm{i}\delta/\delta J(p)][-\mathrm{i}\delta/\delta J(-p)]\\&+[\bar{p}^2+\eta(\alpha)]\hat{J}(p)\hat{J}(-p)\}\ .\end{aligned}\tag{15}$$

系统存在着满足方程：$\partial\hat{I}(\alpha)/\partial\alpha-\mathrm{i}[\hat{I}(\alpha),\hat{H}(\alpha)]=0$ 的不变量 $\hat{I}(\alpha)$,

$$\hat{I}(\alpha)=\int \mathrm{d}p[\hat{E}^{+}(p,\alpha)\ \hat{E}(p,\alpha)+W/(4\pi)],$$

$$\begin{aligned}\hat{E}(p,\ )\equiv&(2^{-1/2})\exp[-\mathrm{i}\chi(\bar{p},\alpha)]\{[y^{-1}(\bar{p},\alpha)-\mathrm{i}\dot{y}(\bar{p},\alpha)]\hat{J}(p)\\&+\mathrm{i}y(\bar{p},\alpha)[-\mathrm{i}\delta/\delta J(-p)]\},\\
\hat{E}^{+}(p\ ,)\equiv&(2^{-1/2})\exp[\mathrm{i}\chi(\bar{p},\alpha)]\{[y^{-1}(\bar{p},\alpha)+\mathrm{i}\dot{y}(\bar{p},\alpha)]\hat{J}(-p)\\&-\mathrm{i}y(\bar{p},\alpha)[-\mathrm{i}\delta/\delta J(p)]\},\end{aligned}\tag{16}$$

其中 $\bar{p}=|p|$, $\chi(\bar{p},\alpha)\equiv-\mathrm{tg}^{-1}\{y(\bar{p},\alpha)\dot{y}(\bar{p},\alpha)/[1+y^2(\bar{p},\alpha)]\}$, $W\equiv(2\pi)\delta(p=0)$ 是 $\varphi$ 空间的体积，$y(\bar{p},\alpha)$ 是下列辅助方程

$$\ddot{y}(\bar{p},\alpha)+[\bar{p}^2+\eta(\alpha)]y(\bar{p},\alpha)=y^{-3}(\bar{p},\alpha)\tag{17}$$

的实数解. 易证 $\hat{E}(p,\alpha)$, $\hat{E}^{+}(\bar{p},\alpha)$ 适合等"时"对易关系: $[\hat{E}(p,\alpha),\ \hat{E}^{+}(p',\alpha)]=\delta(p-p')$. 经过繁复的计算发现可以构造出幺正变换 $\hat{Q}(\alpha)$

$$\begin{aligned}\hat{Q}(\alpha)=\exp\Big[(\mathrm{i}/4)\int \mathrm{d}p[&f(\bar{p},\alpha)\sin\beta(\bar{p},\alpha)\\&\times\{\hat{J}(p)\hat{J}(-p)-[-\mathrm{i}\delta/\delta J(p)][-\mathrm{i}\delta/\delta J(-p)]\}\\&+f(\bar{p},\alpha)\cos\beta(\bar{p},\alpha)\\&\times\{\hat{J}(-p)[-\mathrm{i}\delta/\delta J(-p)]+[-\mathrm{i}\delta/\delta J(p)]\hat{J}(p)\}\Big],\end{aligned}\tag{18}$$

其中 $f(\bar{p},\alpha)$ 和 $\beta(\bar{p},\alpha)$ 的定义为 $\cosh f(\bar{p},\alpha)\equiv(1/2)[y^{-2}(\bar{p},\alpha)+y^2(\bar{p},\alpha)+\dot{y}^2(\bar{p},\alpha)]$,

$\sinh f(\bar{p},\alpha)\exp[i\beta(\bar{p},\alpha)]\equiv(1/2)[y^{-2}(p,\alpha)-y^2(\bar{p},\alpha)+\dot{y}^2(\bar{p},\alpha)]+iy(\bar{p},\alpha)\dot{y}(\bar{p},\alpha)$. 利用式(11)易证式(18)中的$\hat{Q}(\alpha)$将式(16)中的$\hat{I}(\alpha)$, $\hat{E}(p,\alpha)$, $\hat{E}^+(p,\alpha)$变为$\hat{I}_0$, $\hat{E}_0(p)$, $\hat{E}_0^+(p)$

$$\hat{I}_0=\hat{Q}^+(\alpha)\hat{I}(\alpha)\hat{Q}(\alpha)=\int \mathrm{d}p\hat{\bar{I}}_0(p),\quad \hat{\bar{I}}_0(p)\equiv[\hat{E}_0^+(p)\hat{E}_0(p)+W/(4\pi)],$$

$$\hat{E}_0(p)=\hat{Q}^+(\alpha)\hat{E}(p,\alpha)\hat{Q}(\alpha)=(2^{-1/2})\{\hat{J}(p)+i[-i\delta/\delta J(-p)]\},$$

$$\hat{E}_0^+(p)=\hat{Q}^+(\alpha)\hat{E}^+(p,\alpha)\hat{Q}(\alpha)=(2^{-1/2})\{\hat{J}(-p)-i[-i\delta/\delta J(p)]\},\tag{19}$$

$\hat{E}_0(p)$, $\hat{E}_0^+(p)$满足对易关系: $[\hat{E}_0(p),\hat{E}_0^+(p')]=\delta(p-p')$. 从式(19)可见, $\hat{I}_0$是不依赖于'时间'的. 根据式(7), $\hat{Q}(\alpha)$将式(15)中的哈密顿$\hat{H}(\alpha)$变为$\hat{H}_0(\alpha)=\hat{Q}^+(\alpha)\hat{H}(\alpha)\hat{Q}(\alpha)-i\hat{Q}^+(\alpha)\partial\hat{Q}(\alpha)/\partial\alpha$. 利用式(11), (17)和Baker－Haustorf－Campbell公式[13], 经过复杂的计算, 最终得到$\hat{H}_0(\alpha)$的表达式

$$\hat{H}_0(\alpha)=\int \mathrm{d}p\hat{\bar{H}}_0(p,\alpha),$$

$$\hat{\bar{H}}_0(p,\alpha)=[y^{-2}(\bar{p},\alpha)+\dot{\chi}(\bar{p},\alpha)]\hat{\bar{I}}_0(p),\tag{20}$$

其中 $\chi(\bar{p},\alpha)=-\mathrm{tg}^{-1}\{y(\bar{p},\alpha)\dot{y}(\bar{p},\alpha)/[1+y^2(\bar{p},\alpha)]\}$. 从式(20)中可以看出, 对于$p$空间的每一个模$p$, $\hat{\bar{H}}_0(p,\alpha)$与$\hat{\bar{I}}_0(p)$的区别仅为一个依赖于$p=|p|$和'时间'$\alpha$的相乘的因子$[y^{-2}(\bar{p},\alpha)+\dot{\chi}(\bar{p},\alpha)]$. 下面我们来求$\hat{I}_0$的本征态. $\hat{I}_0$是不依赖于'时间'的, 它在间断的表述下可看成是超动量空间无穷多频率为1的简谐振子的哈密顿之和, 这些简谐振子的量子数为$m_1, m_2, \cdots(m_1,m_2,\cdots=0,1,2,\cdots)$, 分别对应$p_1, p_2, \cdots$. $\hat{I}_0$的基态$|0\rangle\equiv|m_1=0, m_2=0,\cdots\rangle$满足: $\hat{E}_0(p)|0\rangle=0.|0\rangle$在$\hat{J}$表象的表达式为: $\langle J|0\rangle=N\exp[(-1/2)\int \mathrm{d}pJ(p)J(-p)]$, 其中$N$是归一化常数. 利用基态$|0\rangle$和式(19)中的升算符$E_0^+(p)$, 可得$I_0$的粒子激发态$|M\rangle(M=1,2,3,\cdots)$

$$\begin{aligned}|M\rangle&\equiv|m_1,m_2,\cdots(m_1+m_2+\cdots=M)\rangle\\&=\{[m_1!]^{-1/2}[\hat{E}_0^+(p_1)[\delta(p_1=0)]^{-1/2}]^{m_1}\\&\quad\times[m_2!]^{-1/2}[\hat{E}_0^+(p_2)[\delta(p_2=0)]^{-1/2})^{m_2}\cdots\}|0\rangle,\end{aligned}$$

$$(m_1,m_2,\cdots=0,1,2,\cdots;\ m_1+m_2+\cdots=M;\ M=1,2,3,\cdots).\tag{21}$$

它满足: $\hat{I}_0|M\rangle=(M+\int \mathrm{d}p[W/(4\pi)])|M\rangle$. 利用式(8), 我们得到与$\hat{H}_0(\alpha)$对应的含'时' Schrödinger方程的解$|M,\alpha\rangle_{S0}$

$$|M,\alpha\rangle_{S0}=\exp[i\theta_M(\alpha)]|M\rangle,\ (M=0,1,2,\cdots),$$

$$\begin{aligned}\theta_M(\alpha)&=-\int_{\alpha_0}^{\alpha}\mathrm{d}\alpha'\langle M|\hat{H}_0(\alpha')|M\rangle\\&=\theta_0(\alpha)+m_1\lambda(p_1,\alpha)+m_2\lambda(p_2,\alpha)+\cdots,(m_1+m_2+\cdots=M),\end{aligned}$$

$$\theta_0(\alpha)=[-V/(4\pi)]\int \mathrm{d}p\lambda(\overline{p},\alpha),$$

$$\lambda(\overline{p},\alpha)=\left\{\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha}\mathrm{d}\alpha' y^{-2}(\overline{p},\alpha')\right]+\chi(\overline{p},\alpha)-\chi(\overline{p},\alpha_0)\right\},\tag{22}$$

于是含‘时’Schrödinger 方程 (13) 的解 $|\Phi_M(\alpha)\rangle$为

$$|\Phi_M(\alpha)\rangle=\hat{Q}(\alpha)|M,\alpha\rangle_{S0}=\exp[\mathrm{i}\theta_M(\alpha)]\hat{Q}(\alpha)|M\rangle,\tag{23}$$

而基态解 $|\Phi_0(\alpha)\rangle$在 $\hat{J}$ 表象中的表达式为

$$\begin{aligned}\Phi_0[J,\alpha]&\equiv\langle J|\Phi_0(\alpha)\rangle\\&=N\exp[\mathrm{i}\theta_0(\alpha)]\left[\prod_p y^{-1/2}(\overline{p},\alpha)\right]\exp\left\{(-1/2)\int\mathrm{d}pJ(p)\right.\\&\quad\left.\times[y^{-2}(\overline{p},\alpha)-\mathrm{i}y^{-1}(\overline{p},\alpha)\dot{y}(\overline{p},\alpha)]J(-p)\right\}.\end{aligned}\tag{24}$$

将式(22)和(24)与文献 [11] 中 Abe 所得结果进行比较，可以看出，我们所得的表达式中多了与 $\Sigma(\overline{p},\alpha)=\chi(\overline{p},\alpha)-\chi(\overline{p},\alpha_0)$ 有关的相因子，因此 Abe 求得的相因子、波函数以及 Wheeler－DeWitt 轨道是不正确的．我们在文献 [4] 中主要研究系统演化满足循环条件时的 $AA$ 相因子，而宇宙波函数的演化并不满足循环条件，因而不能象 Abe 那样简单地用文献 [4] 提出的方法来研究，而必须借助于本文提出的与不变量有关的幺正变换方法．

下面通过构造相干态求出 Wheeler－DeWitt 方程的解并研究 Wheeler－DeWitt 轨道附近的量子起伏．用式 (23) 中的精确解来构造相干态 $|\kappa,\alpha\rangle$[14]

$$\begin{aligned}|\kappa,\alpha\rangle=\exp&\left\{\int\mathrm{d}p'[\kappa(p')\exp[-\mathrm{i}\lambda(\overline{p}',\alpha)]\hat{E}^{+}(p',\alpha)\right.\\&\left.-\kappa^{*}(p')\exp[\mathrm{i}\lambda(\overline{p}',\alpha)]\hat{E}(p',\alpha)]\right\}\\&\times\exp[\mathrm{i}\theta_0(\alpha)]|0,\alpha\rangle_I,\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $\kappa(p')$ 是与‘时间’$\alpha$ 无关的复数，$|0,\alpha\rangle_I=\hat{Q}(\alpha)|0\rangle$是不变量 $\hat{I}(\alpha)$ 的本征基态．$|\kappa,\alpha\rangle$是式 (16) 中的降算符 $\hat{E}(p,\alpha)$ 的本征态，对应的本征值为 $\kappa(p)\exp[-\mathrm{i}\lambda(\overline{p},\alpha)]$. 利用式(14)和(16)，经过计算可得 $\hat{\psi}(\varphi)$ 和 $\hat{\pi}(\varphi)=[-\mathrm{i}\delta/\delta\psi(\varphi)]$ 在相干态 $|\kappa,\alpha\rangle$的期待值

$$\begin{aligned}\psi(\varphi,\alpha)&=\langle\kappa,\alpha|\hat{\psi}(\varphi)|\kappa,\alpha\rangle\\&=(4\pi)^{-1/2}\int\mathrm{d}py(\overline{p},\alpha)\exp(\mathrm{i}p\varphi)\\&\quad\times\{\kappa(p)\exp[-\mathrm{i}\lambda(\overline{p},\alpha)]\exp[\mathrm{i}\chi(\overline{p},\alpha)]\\&\quad+\kappa^{*}(-p)\exp[\mathrm{i}\lambda(\overline{p},\alpha)]\exp[-\mathrm{i}\chi(\overline{p},\alpha)]\},\end{aligned}\tag{26a}$$

$$\begin{aligned}\pi(\varphi,\alpha)&=\langle\kappa,\alpha|\hat{\pi}(\varphi)|\kappa,\alpha\rangle\\&=(4\pi)^{-1/2}\int\mathrm{d}p\ \exp(-\mathrm{i}p\varphi)\{\kappa(-p)\exp[-\mathrm{i}\lambda(\overline{p},\alpha)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \exp[i\chi(\bar{p}, \alpha)][\dot{y}(\bar{p}, \alpha) - iy^{-1}(\bar{p}, \alpha)] \\
&+\kappa^{*}(p)\exp[i\lambda(\bar{p}, \alpha)]\exp[-i\chi(\bar{p}, \alpha)] \\
&\times[\dot{y}(\bar{p}, \alpha) + iy^{-1}(\bar{p}, \alpha)]\}.
\end{aligned} \tag{26b}
$$

易证 $\psi(\varphi, \alpha)$ 是‘经典’方程—— Wheeler－DeWitt 方程的解. 从上式很清楚地看出 $\Sigma(\bar{p}, \alpha) = \chi(\bar{p}, \alpha) - \chi(\bar{p}, \alpha_0)$ 给 $\hat{\psi}(\varphi)$ 和 $\hat{\pi}(\varphi)$ 的相干态期待值带来的影响.

现在来计算由三次量子化引起的 Wheeler－DeWitt‘经典’轨道附近的量子起伏. Bohr 和 Rosenfeld 认为, 在量子场论中, 可测量的并不是量子场本身, 而是它在某一测量区域的平均值[15]. 根据这个观点, Abe 定义了算符 $\hat{X}$, $\hat{P}$ 作为可测量的力学量 $\hat{X} = (2\varphi_1)^{-1/2}\int_{\varphi_0-\varphi_1}^{\varphi_0+\varphi_1} d\varphi\ \hat{\psi}(\varphi)$, $\hat{P} = (2\varphi_1)^{-1/2}\int_{\varphi_0-\varphi_1}^{\varphi_0+\varphi_1} d\varphi \times[-i\delta/\delta\psi(\varphi)]$. 它们满足对易关系: $[\hat{X}, \hat{P}] = i$. $\hat{X}$和$\hat{P}$在相干态的均方偏差为

$$
\begin{aligned}
(\Delta X)^2 &= \langle\kappa, \alpha|\hat{X}^2|\kappa, \alpha\rangle - X_0^2 \\
&= [1/(2\pi\ \varphi_1)]\int dp\,[\sin(p\varphi_1)/p]^2 y^2(\bar{p}, \alpha),
\end{aligned} \tag{27a}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta P)^2 &= \langle\kappa, \alpha|\hat{P}^2|\kappa, \alpha\rangle - P_0^2 \\
&= [1/(2\pi\ \varphi_1)]\int dp\,[\sin(p\varphi_1)/p]^2 \\
&\quad\times[y^{-2}(\bar{p}, \alpha) + \dot{y}^2(\bar{p}, \alpha)].
\end{aligned} \tag{27b}
$$

其中 $X_0 = \langle\kappa, \alpha|\hat{X}|\kappa, \alpha\rangle$, $P_0 = \langle\kappa, \alpha|\hat{P}|\kappa, \alpha\rangle$. $\Sigma(\bar{p}, \alpha)$ 对 $X_0$ 和 $P_0$ 有贡献, 因此它给 $X$ 和 $P$ 的相对量子起伏 $[(\Delta X)^2/X_0^2]$ 和 $[(\Delta X)^2/P_0^2]$ 带来影响.

以上用与不变量有关的幺正变换方法研究了三次量子化宇宙波函数的演化, 求得了相因子、波函数以及由三次量子化引起的相对量子起伏, 修正了 Abe 的工作[11].

## 参 考 文 献


[1] H. R. Lewis, W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10** (1969) 1485.

[2] Xiaochun Gao, Jingbo Xu, Tiezheng Qian, *Phys. Lett.*, **152A** (1991) 449; Xiaochun Gao, Jingbo Xu, Jun Gao, *Prog. Theor. Phys.* (*Tokyo*), **87** (1992) 861.

[3] L. Yeh, *Phys. Rev.*, **47A** (1993); 3587; K. H. Yeon *et al.*, *Phys. Rev.*, **50A** (1994) 1035.

[4] Xiaochun Gao, Jingbo Xu, Tiezheng Qian, *Phys. Rev.*, **44A** (1991) 7016.

[5] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.*, **160** (1967) 1113.

[6] J. A. Wheeler, in Battelle Rencontres, edited by C. DeWitt and J. A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968).

*Phys. Rev.*, **33D** (1986) 3560.

[8] M. McGuigan, *Phys. Rev.*, **38D** (1988) 3031; *Phys. Rev.*, **39D** (1989) 2229.

[9] A. Hosoya, *Phys. Rev.*, **39D** (1989) 1123.

[10] V. A. Rubakov, *Phys. Lett.*, **214B** (1988) 503; T. Banks, *Nucl. Phys.*, **309B** (1988) 493; S. B. Giddings, A. Strominger, *Nucl. Phys.*, **321B** (1989) 481.

[11] S. Abe, *Phys. Rev.*, **47D** (1993) 718.

[12] Hans-Jurgen Pohle, *Phys. Lett.*, **261B** (1991) 257.

[13] J. Wei, E. Norman, *J. Math. Phys.* (*N. Y.*), **4** (1963) 575.

[14] Xiaochun Gao, Jingbo Xu, Tiezheng Qian, *Ann. Phys.* (*N.Y.*), **204** (1990) 235.

[15] N. Bohr, L. Rosenfeld, K. Dan. Vidensk. Selsk., *Mat. Fys. Medd.*, **12** (1933) [English translation reprinted in Quantum Theory and Measurement, edited by J. A. Wheeler, W. H. Zurek (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983)].

# Invariant-Related Unitary Transformation Method and Evolution of the Third-Quantized Wave Function of the Universe

Gao Xiaochun　　Gao Jun　　Fu Jian

(*Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027*)

Received 3 March 1995

## Abstract

On the basis of the generalized invariant theory, the invariant-related unitary transformation method is developed and used to study the evolution of the third-quantized wave function of the universe. The expressions for the phases and the wave functions are obtained. Then, by means of the construction of the coherent state, the solutions of the Wheeler-DeWitt equation and the quantum fluctuations caused by the third quantization are found.

**Key words**　invariant-related unitary transformation, third-quantized wave function of the universe, solutions of the Wheeler-DeWitt equation, quantum fluctuations.