白矮星的平衡质量上限

朱美玉

摘　　要

本文主要根据白矮星的理想模型和白矮星的平衡条件，系统地、详细地导出了Emden方程，然后用Emden方程的解计算了白矮星的平衡质量上限，也即钱德拉塞卡质量$M_C=1.4M_\odot$，$M_\odot$代表太阳质量，M_C叫做钱德拉塞卡极限。只有当白矮星的质量小于M_C时，白矮星才是稳定的。

已知的晚期恒星主要有白矮星、中子星和黑洞，它们的奇特性质引起了天文学家的广泛兴趣。白矮星的密度高达10^6—10^8克/厘米^3，中子星的密度更高。这么高的密度是怎样产生的呢？这个问题必须从恒星的演化过程来说明。本文主要讨论白矮星的平衡质量上限，即钱德拉塞卡极限。

我们知道一个恒星在它的一生中由于两种力相互抵销而保持平衡，一个是向里的拉力，另一个是向外推的压力。中年时期的恒星，其内部正进行着氢聚变为氦的热核反应，热核反应所产生的向外的辐射压力与向内的引力相抗衡，使恒星处于一个相对稳定的阶段。但是，这种稳定总有一天要被打破的，而稳定的传面一旦被打破，它们便开始日趋衰亡。恒星上虽然有大量的氢，但总有一天要消耗光。由于恒星核心的温度要比外层高得多，因此热核反应的速度也快得多，核心的氢首先燃烧完毕，逐渐形成一个氦的核心。当氦核的质量扩展到整个恒星质量的10～15%时，靠氢聚变为氦产生的辐射压力已抵挡不住引力，于是氦核在引力作用下开始塌缩。由于塌缩引起了一连串地联锁反应，星球越塌缩，其密度越大，引力越大，塌缩越厉害。在巨大的引力下，原子被挤得很密，密度急剧上升，恒星中心停止发光，体积缩小，温度剧增，原子被电离，电子脱离原子而成为自由电子。电子是费密子，它遵守泡利不相容原理，当电子被挤到一起时会出现一种排斥压力，称为费密压力。这个排斥力企图使塌缩停止，这一企图能否成功决定于恒星质量的大小，其分界限是钱德拉塞卡质量$M_C=1.4M_\odot$，$M_\odot$代表太阳质量，M_C叫做钱德拉塞卡极限。当恒星质量不超过极限值M_C时，电子简并压力足以使塌缩停止在某一状态上，形成白矮星发出微弱的光跨入老年期。

一、白矮星的理想模型

白矮星是晚期恒星，它不亮是因为作为星的主要能源的氢被用光了。它主要是由氦组成，它所具有的小的亮度是来自通过星体的缓慢收缩而放出的引力能。根据观测白矮星的质量M、密度ρ、中心温度T的数量级约为：$M\sim10^{33}$克，$\rho\sim10^7$克/厘米，$T\sim10^7$°K。白矮

本文于1982年9月11日收到

星中每个粒子所具有的平均热能为：$KT\approx10^3eV$，而氦原子的电离能是 $50eV$，这就是说 10^3eV 已经大大的超过了氦原子的电离能，因而白矮星中的氦原子全部电离成自由电子和氦核。氦原子由两个电子和氦核组成，所以白矮星可以认为是由N个电子和$\frac{N}{2}$个氦核组成。设电子的静质量为 m_e，质子质量为 m_p，则白矮星的总质量为：

$$M\simeq Nm_e+\frac{N}{2}\cdot 4m_p\simeq 2Nm_p$$

若以μ表示一个原子中的核子数和电子数之比，即 $\mu=\frac{4}{2}=2$，则白矮星的总质量又可以写成：

$$M\simeq\mu Nm_p$$

因而单位体积的电子数为：

$$n=\frac{N}{V}\simeq\frac{M/\mu m_p}{M/\rho}=\frac{\rho}{\mu m_p}$$

已知：$m_p=1.67\times10^{-24}$克，$\rho\simeq10^7$克/厘米^3，所以在白矮星中 $n\simeq10^{30}$/厘米^3，相应的费密能量是：

$$\varepsilon_F=\left(\frac{3N}{4\pi gV}\right)^{2/3}\cdot\frac{h^2}{2m_e}=\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}\cdot\frac{h^2}{2m_e}\simeq10^{-6}\text{尔格}$$

式中 h 是普朗克常数，$h=6.626\times10^{-27}$ 尔格·秒，$g(=2)$ 是电子的简并度。费密温度 $T_F=\frac{\varepsilon_F}{K}\simeq10^{10}{}^\circ K$，白矮星的中心温度与费密温度的比值为：

$$\frac{T}{T_F}\simeq\frac{10^7}{10^{10}}\simeq10^{-3}\ll1$$

因为白矮星的密度很高，以致使费密温度比星体的温度高得多，所以电子气体是完全简并性气体，其表现和在绝对零度时的电子气没有什么不同，因而可以认为电子气体是处于基态的理想费密气体。白矮星的表面密度是比较低的，这类恒星的外层不会出现任何简并物质。但是非简并层的实际厚度是很薄的，所以我们可以把这种恒星里里外外都当作简并态来处理。

由于白矮星的密度很高，致使电子气体的费密能量 ε_F 可以与电子的静止能量 m_ec^2 相比较，因此必须用相对论来处理这些电子。

总结上面所述我们得到白矮星的理想模型是：白矮星是处于基态的N个电子的体系，它所处的密度使得我们必须用相对论来处理这些电子。这些电子在$\frac{N}{2}$个不动的氦核的背景上运动。这些氦核提供引力把整个体系保持在一起，而电子气体所施加的巨大零点压强被用来束缚星体中的引力所抵消。因此这一模型必定显示出泡利原理、相对论力学和引力定律相结合的效应。

在低温下，理想费密气体的熵为：

$$S=NK\left[\frac{\pi^2}{2}\ \frac{KT}{\varepsilon_F}+\cdots\cdots\right]$$

对于白矮星来说，因为$\frac{KT}{\varepsilon_F}=\frac{T}{T_F}\simeq10^{-3}\ll1$，也即熵 $S\to0$，所以白矮星是等熵星。

二、简并性气体的物态方程

根据统计理论，初量在 $p-p+dp$ 之间的量子态数目为：

$$gV\frac{4\pi p^2dp}{h^3}=2V\frac{4\pi p^2dp}{h^3}$$

其中 h^3 为粒子相空间的小体积，而动量空间小体积元为$\frac{h^3}{V}$，V 为粒子所占有的位置空间的体积，$g(=2)$表示电子有两种可能的自旋，所以量子态数目要加倍。按照泡利不相容原理，每个量子态最多只能有一个电子，这表示动量在 $p-p+dp$ 之间的电子数 dN 应满足下列关系式

$$dN\leqslant V\cdot\frac{8\pi p^2dp}{h^3}$$

因为电子气体是完全简并化的，即自由电子占据着从最低动量状态一直到某个确定动量状态为止的全部量子态。这个确定的动量 p_F 称为费密动量，与之相应的能量称为费密能量 ε_F。对完全简并的电子气有

$$dN=V\frac{8\pi p^2dp}{h^3}\tag{1}$$

设体积 V 内有 N 个电子，则

$$N=\int_0^{p_F}dN=\int_0^{p_F}\frac{8\pi V}{h^3}p^2dp=\frac{8\pi V}{3h^3}p_F^3$$

单位体积的电子数

$$n=\frac{N}{V}=\frac{8\pi}{3h^3}p_F^3\tag{2}$$

根据统计理论，电子的动量在 $p-p+dp$ 之间的几率为 $\frac{dN}{N}$，气体压力 P_G 为

$$P_GV=\frac{1}{3}N\overline{mv^2}=\frac{1}{3}N\overline{pv}=\frac{1}{3}N\int_0^{p_F}pv\frac{dN}{N}$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^{p_F}pv\frac{8\pi V}{h^3}p^2dp$$

所以

$$P_G=\frac{8\pi}{3h^3}\int_0^{p_F}p^3vdp\tag{3}$$

式中 v 是电子速度。设电子的静质量为 m_e，运动质量为 m，c 为光速，根据爱因斯坦相对论电子的总能量W为

$$W=\sqrt{p^2c^2+m_e^2c^4}=m_ec^2\sqrt{1+\left(\frac{p}{m_ec}\right)^2}$$

又因　$W=mc^2$，　$p=mv=\frac{W}{c^2}v$，所以有

$$v=\frac{pc^2}{W}=\frac{p}{m_e}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{m_ec}\right)^2}}$$

考虑到相对论情况，P_G 为如下形式：

$$P_G=\frac{8\pi}{3h^3m_e}\int_0^{p_F}\frac{p^4dp}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{m_ec}\right)^2}} \tag{4}$$

引进新变数θ，令

$$\left.\begin{aligned} Sh\theta&=\frac{p}{m_ec}\\ Sh\theta_F&=\frac{p_F}{m_ec}=x\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

则

$$\begin{aligned}P_G&=\frac{8\pi m_e^4c^5}{3h^3}\int_0^{\theta_F}Sh^4\theta d\theta\\ &=\frac{8\pi m_e^4c^5}{3h^3}\left[\frac{1}{32}Sh4\theta_F-\frac{1}{4}Sh2\theta_F+\frac{3}{8}\theta_F\right]\end{aligned}$$

但因

$$Sh4\theta=8Sh^3\theta ch\theta+2Sh2\theta$$

故

$$\begin{aligned}P_G&=\frac{\pi m_e^4c^5}{3h^3}\left[2Sh^3\theta_Fch\theta_F-\frac{3}{2}Sh2\theta_F+3\theta_F\right]\\ &=\frac{\pi m_e^4c^5}{3h^3}\left[2x^3(1+x^2)^{1/2}-\frac{3}{2}2x(1+x^2)^{1/2}+3\text{arc}Shx\right]\\ &=\frac{\pi m_e^4c^5}{3h^3}\left[x(2x^2-3)(1+x^2)^{1/2}+3\text{arc}Shx\right]\end{aligned} \tag{6}$$

因为气体质量密度为：

$$\rho=n\mu m_p \tag{7}$$

根据（5）式有：$p_F=m_e^3c^3x^3$，以此代入（2）式得

$$n=\frac{8\pi}{3h^3}p_F^3=\frac{8\pi m_e^3c^3}{3h^3}x^3$$

故（7）式可写为

$$\rho=\frac{8\pi m_e^3c^3}{3h^3}\mu m_px^3=Bx^3 \tag{8}$$

其中

$$B=\frac{8\pi m_e^3c^3m_p}{3h^3}\mu \tag{9}$$

由（6）式和（8）式消去参数x即得简并电子气的物态方程，它是以统计力学为基础求得的，并不牵涉到有关恒星的任何假定。它是一个对部分相对论性简并气体普遍适用的物态方程。应该注意，在这个方程中压力同温度无关；它仅仅依赖于x，而x则是对具有费密能电子气体的动量的一种量度；因而压力只同密度有关。所以，计算恒星中心有关条件的数学问题可以分为两个部分，即流体静力学部分和热力学部分。下面我们先讨论这个方程的两种极限情况。

1．在非相对论简并情况下，由于$p_F\ll m_ec$，$x=\frac{p_F}{m_ec}\ll1$，所以$x\to0$。

$$(1+x^2)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4 \tag{10}$$

$$(1+x^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4$$

$$\operatorname{arc}Shx=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_0^x(1+x^2)^{-1/2}dx=\int_0^x\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4\right)dx$$

$$=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5 \tag{11}$$

将（10）式和（11）式代入（6）式，再经整理后得非相对论情况下简并电子气的压力 P_{G1} 为

$$P_{G1}=\frac{\pi m_e^4c^5}{3h^3}\left[\frac{64}{40}x^5\right]$$

其中略去 x^7 的项。根据（8）式和（9）式

$$x^5=\frac{1}{B^{5/3}}\cdot\rho^{5/3}=\frac{(3h^3)^{5/3}}{(8\pi m_e^3c^3)^{5/3}}\cdot\frac{1}{(\mu m_p)^{5/3}}\cdot\rho^{5/3}$$

所以

$$P_{G1}=\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3}\cdot\frac{1}{m_e(\mu m_p)^{5/3}}\cdot\rho^{5/3}=K_1\rho^{5/3} \tag{12}$$

其中

$$K_1=\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{m_e(\mu m_p)^{5/3}} \tag{13}$$

2. 在极端相对论情况下，当密度很大时，极大动量 p_F 的值开始超过 m_ec，在极限情况下，$p_F\gg m_ec$，$x=\frac{p_F}{m_eC}\to\infty$。在极端相对论的情况下，简并电子气的压力为 P_{G2}，根据（6）式有

$$P_{G2}=\frac{\pi m_e^4c^5}{3h^3}\cdot 2x^4$$

$$=\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\cdot\frac{hc}{8(\mu m_p)^{4/3}}\cdot\rho^{4/3}=K_2\rho^{4/3} \tag{14}$$

其中

$$K_2=\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\cdot\frac{hc}{8(\mu m_p)^{4/3}} \tag{15}$$

由此可见电子简并气体的压力具有如下的普遍形式

$$P_G=K\rho^\gamma \tag{16}$$

在非相对论情况下，

$$K=K_1,\ \gamma=\frac{5}{3}$$

在极端相对论情况下，

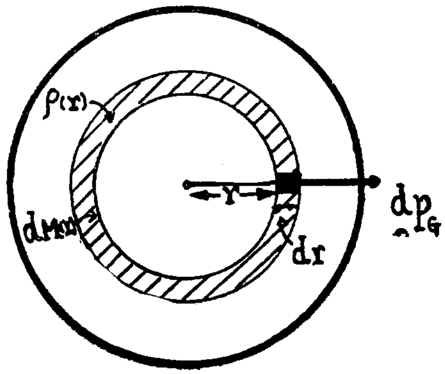
$$K=K_2,\ \gamma=\frac{4}{3}$$

物态方程具有 $P_G=K\rho^\gamma$ 的形式的天体叫多层球。

三、白矮星的平衡条件

现在讨论星体的平衡条件。假定星体是不转动的，因此在平衡状态下，它具有球形，而且其密度也是中心对称的，如图所示。设 r 为离恒星中心距离，向外为正。在离恒星中心的

距离 r 处考虑一个柱体，底面积为 1 [厘米]^2，柱体轴沿恒星半径方向，这个柱体的重量为 $g\rho dr$，g 是给定点的重力加速度，ρ 为给定的物质总密度（由所有原子决定），P_G 为给定层的简并气体压力，P_R 为同一层的辐射压力。当恒星既不膨胀，又不塌缩时，说明它处于力学平衡状态，其平衡条件为



$$dP_G + dP_R = -g\rho dr$$

因为 $P_G \gg P_R$（证明详见附录），所以

$$\frac{dP_G}{dr} = -g\rho(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)$$

$$\therefore \quad M(r) = -\frac{r^2}{G\rho(r)} \cdot \frac{dP_G(r)}{dr}$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = -\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{G\rho(r)} \cdot \frac{dP_G(r)}{dr}\right]$$

又因为：

$$dM(r) = \rho(r)4\pi r^2 dr$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{G\rho(r)} \cdot \frac{dP_G(r)}{dr}\right] = -4\pi r^2 \rho(r)$$

或

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{\rho(r)} \cdot \frac{dP_G(r)}{dr}\right] = -4\pi G\rho(r) \tag{17}$$

根据现有的有关白矮星的观察资料，白矮星的引力场较弱，因而(17)式是成立的。引入独立变量 ξ，设 $\rho(0)$ 代表恒星中心密度，即 $r=0$ 处的密度，令

$$r = \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{1/2}\rho(0)^{\frac{(\gamma-2)}{2}}\xi \tag{18}$$

再引入新独立变量 φ 使

$$\rho(r) = \rho(0)\varphi^{1/(\gamma-1)} \tag{19}$$

根据 (16) 式有

$$P_G = K\rho^{\gamma-1} = K\rho(0)^{\gamma} \cdot \varphi^{\gamma/(\gamma-1)} \tag{20}$$

将 (18)、(19)、(20) 式代入方程 (17) 式得

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\varphi}{d\xi}\right) + \varphi^{1/(\gamma-1)} = 0 \tag{21}$$

上式称为指数为 $\frac{1}{\gamma-1}$ 的 Emden 方程。从 (19) 式可以看出，其边界条件为，在恒星中心即

$\xi=0$ 或 $r=0$ 处有

$$\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=0$$

所定义的 $\varphi(\xi)$ 叫做指数为 $\frac{1}{\gamma-1}$ 的 Emden 函数，方程 (21) 不能以解析的形式解出，必须用数值积分。仔细研究发现当 $\gamma>\frac{6}{5}$ 以后的每一个 γ 值，解都存在，对给定的 γ 值可求出给定的 ξ_1 及 $\xi_1^2|\varphi'(\xi)|$ 值，$\varphi(\xi)$ 在有限的 ξ_1（或 r_1）变为零。

$$\varphi(\xi_1)=0$$

从 (19) 式可知 $\varphi(\xi_1)=0$ 即意味着 $\rho(r_1)=0$，可见 r_1 即为恒星半径 R，所以恒星半径为

$$R=r_1=\left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{1/2}\rho(0)^{(\gamma-2)/2}\xi_1 \tag{22}$$

四、应用 Emden 方程计算白矮星的平衡质量上限

根据 Emden 方程 (21) 有

$$\frac{d}{d\xi}[\xi^2\varphi'(\xi)]=-\xi^2\varphi^{1/(\gamma-1)}$$

$$d[\xi^2|\varphi'(\xi)|]=\xi^2\varphi^{1/(\gamma-1)}d\xi$$

$$\therefore\quad \int_0^{\xi_1}\xi^2\varphi^{1/(\gamma-1)}d\xi=\int_0^{\xi_1}d[\xi^2|\varphi'(\xi)|]=\xi_1^2|\varphi'(\xi_1)| \tag{22}$$

根据 (22) 式，我们可以计算白矮星的平衡质量上限。因为

$$dM(r)=4\pi r^2\rho(r)dr$$

所以

$$\begin{aligned}M&=\int_0^R 4\pi r^2\rho(r)dr\\&=4\pi\left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{3/2}\rho(0)^{(3\gamma-4)/2}\int_0^{\xi_1}\xi^2\varphi^{1/\gamma-1}(\xi)d\xi\\&=4\pi\rho(0)^{(3\gamma-4)/2}\left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right)^{3/2}\xi_1^2|\varphi'(\xi_1)|\end{aligned} \tag{23}$$

从(23)式可以看出，当 $\gamma=\frac{4}{3}$ 时，M 与 $\rho(0)$ 无关，M 达到临界值 M_C，这个最大质量叫钱德拉塞卡极限，超过这一上限的白矮星就不能保持稳定的结构，因为即使中心压力（或中心密度）为无穷大也不能阻止恒星的进一步塌缩。因此多层球的稳定性决定于 $\gamma>\frac{4}{3}$（稳定）还是 $\gamma<\frac{4}{3}$（不稳定）。

对极端相对论的情况，例如质量最大的白矮星，$\gamma=\frac{4}{3}$，此时可以从 Emden 方程解出

$$\xi_1=6.89685,\ \xi_1^2|\varphi'(\xi_1)|=2.01824\simeq 2.02$$

已知对于已经耗尽了氢的白矮星，$\mu=2$，太阳的质号 $M_\odot=2\times10^{33}$ 克，质子的静质量 $m_p=1.67\times10^{-24}$ 克，引力常数 $G=6.67\times10^{-8}$ 达因·厘米^2·克$^{-2}$，普朗克常数 $h=6.626\times10^{-27}$

尔格·秒，$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-27}$ 尔格·秒，光速 $c = 2.998 \times 10^{10}$厘米/秒$\simeq 3 \times 10^{10}$厘米/秒。

根据（23）式，则得

$$M_C = 4\pi\left[\frac{K_2 \cdot \frac{4}{3}}{4\pi G \cdot \frac{1}{3}}\right]^{3/2} \times 2.02 = 4\pi\left[\frac{\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{\hbar c}{8(\mu m_p)^{4/3}}}{\pi G}\right]^{3/2} \times 2.02$$

$$= 4\pi\left[\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{4 \times 2^{4/3}}\right]^{3/2} \cdot \frac{1}{m_p^2}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \times 2.02$$

$$= 4\pi\left[\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{4 \times 2^{4/3}}\right]^{3/2} \cdot \left(\frac{1}{1.67 \times 10^{-24}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1.05 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}}{6.67 \times 10^{-8}}\right)^{3/2} \times 2.02$$

$$= 1.4 \times 2 \times 10^{33}\text{克} = 1.4 M_\odot \tag{24}$$

(24)式即是白矮星的钱德拉塞卡极限，它的物理意义是，假如白矮星的质量小于 M_C，则白矮是稳定的；如果白矮星的质量大于 M_c，则由遵从泡利不相容原理的电子气体所产生的压力不足以抗拒引力而使星体崩溃。

应该注意，如果我们考虑到相对论性和非相对论性两种情况下星体中心的压力和密度间所具有的完全不同的关系，那么存在质量上限的原因就很清楚了。从（12）和（14）式：

非相对论的情况　$P_G \propto \rho^{5/3}$，$\frac{dP_G}{dr} \propto \rho^{2/3}\frac{d\rho}{dr}$

相对论性情况　$P_C \propto \rho^{4/3}$，$\frac{dP_G}{dr} \propto \rho^{1/3}\frac{d\rho}{dr}$

同时，引力所造成的压力梯度是

$$\frac{dP}{dr} \propto -\frac{\rho(r)}{r^2}\int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

作为最粗略的近似，我们可以认为密度等于恒星的质量除以半径 R 的三次方，所以

非相对论性情况　$\frac{dP_G}{dr} \propto \frac{M^{5/3}}{R^6}$

相对论性情况　$\frac{dP_G}{dr} \propto \frac{M^{4/3}}{R^5}$

引力的压力梯度　$\frac{dP}{dr} \propto \frac{M^2}{R^5}$

我们看到，相对论性压力梯度与半径的关系和引力的压力梯度具有相同的幂次，两者都随着恒星的收缩按 R^{-5} 增加。这意味着一旦相对对论性白矮星在流体静压力作用下受迫收缩，那么因收缩而产生的反力就会增加，其增加的速率同引力的增长率相同，结果恒星就可以继续收缩下去。所以，恒星无论如何也不可能出现平衡状态。另一方面，白矮星中心的非相对论性气体总是可以随着收缩过程的进行而实现自身调节，一直到压缩恒星的引力受到抵销为止。由此可见，恒星中心的压强和密度间的关系，即物态方程的不同是恒星能否到达稳定平衡的关键。恒星能否成为稳定的白矮星主要由其原始质量而定，质量比较小的恒星在收缩过程中其中心密度不太高时，可以用非相对论性近似较好地确定它们的中心压力，因而恒星总可以到达某种稳定的平衡状态。对于质量比较大的恒星来说，其中心密度很高而成为相对论性气体，于是不可能出现某种平衡状态。因此，钱德拉塞卡极限表征着从主要是非相对

论性气体的中心核向主要是相对论性气体的中心核过渡的界限。

从(22)式及(23)式中消去$\rho(0)$即得到白矮星的质量与半径之间的关系为

$$M=4\pi R^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}}\left[\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}\right]^{-\frac{1}{(\gamma-2)}}\cdot\xi_2^{-\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}}\cdot\xi_1^2|\varphi'(\xi_1)| \tag{25}$$

对不同恒星质量M可计算出恒星半径R，例如对质量小的白矮星，即非相对论简并化情况，$\gamma=\frac{5}{3}$，$\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}=-3$，从Emden方程解得

$$\xi_1=3.65375,\ \xi_1^2|\varphi'(\xi_1)|=2.71406$$

再根据(25)式可得

$$R\propto\frac{1}{M^{1/3}} \tag{26}$$

即白矮星的质量越大，它的半径就越小。

附：

证明　$P_G\gg P_R$

鉴于辐射压力是简并化气体压力的一部分，现在我们分两种情况来讨论辐射压力在简并气体压力中的作用。

根据热力学理论，辐射压力P_R为

$$P_R=\frac{8\pi^5\cdot K^4}{45c^3h^3}T^4$$

1. 对于非相对论情况

$$\frac{P_{G1}}{P_R}=\frac{\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\cdot\frac{h^2}{m_e(\mu m_p)^{5/3}}n^{5/3}(\mu m_p)^{5/3}}{\frac{8\pi^5\cdot K^4}{45c^3h^3}T^4}$$

$$=\frac{3^{3/2}}{\pi^{19/6}2^{5/2}}\left[\frac{nh^3}{(2\pi m_eKT)^{3/2}}\right]^{5/3}\left(\frac{m_ec^2}{KT}\right)^{3/2}$$

在非相讨论的情况下，$KT\ll m_ec^2$。根据统计物理又有

$$\frac{nh^3}{(2\pi m_eKT)^{3/2}}\gg 1$$

所以

$$\frac{P_{G1}}{P_R}\gg 1\ \text{或}\ P_{G1}\gg P_R$$

这说明简并电子气的压力远大于辐射压力，因而在非相对论简并气体里可以忽略辐射压力。而在非相对论简并气体里可以忽略辐射压力。

2. 对于极端相对论情况

$$\frac{P_{G2}}{P_R}=\frac{\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\cdot\frac{hc}{8(\mu m_p)^{4/3}}n^{4/3}(\mu m_p)^{4/3}}{\frac{8\pi^5K^4}{45c^3h^3}T^4}=\frac{2^6\cdot 15}{\pi^5}\cdot\left[\frac{3}{8_\pi^3}\cdot\frac{n(hc)^3}{(KT)^3}\right]^{4/3}$$

在相对论情况下，气体压力P_{G_2}远大于理想非简并化气体压力$P_1=nKT$，所以

$$P_{G_2}=\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{hc}{8(\mu m_p)^{4/3}}n^{4/3}(\mu m_p)^{4/3}\gg nKT$$

即

$$\frac{\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n^{1/3} hc}{8KT} \gg 1 \quad 或 \quad \frac{3}{8^3\pi} \cdot \frac{n(hc)^3}{(KT)^3} \gg 1$$

因而有

$$\frac{P_{G2}}{P_R} \gg 1 \quad 或 \quad P_{G2} \gg P_R$$

从以上讨论可以看出，无论在极端相对论情况还是非相对论情况下，在简并性气体里都可以忽略辐射压力。

参 考 文 献

[1] R. K. Pathria *Statistical Mechanics* (1972) 248

[2] Kerson Huang *Statistical Mechanics* (1963) 230

[3] Л·Д·朗道 E·M 栗弗席兹著，杨训恺等译 《统计物理学》人民教育出版社 (1964) 402

[4] [美]马丁·哈威特著，万籁等译《天体物理学概念》科学出版社(1981) 411

[5] [美]S·温伯格著，邹振隆、张历宁等译 《引力论和宇宙论》科学出版社 (1980) 355。

The Upper-limit of the Equilibrium Mass of the White Dwarf Star

Zhu Meiyu

Abstract

In this paper the Emden equation is derived systematically and thoroughly according to the ideal model of the white dwarf star and the equilibrium condition of the white dwarf star. Then, by applying the solution of the Emden equation, the upper-limit of the equilibrium mass of the white dwarf star is calculated. That is the Chandrasekhar mass $M_C = 1.4M_\odot$, where $M_\odot$ denotes the mass of the sun, M_C is known as the Chandrasekhar limit. Only when mass of the white dwarf star is less than M_C, then the white dwarf star can be stable.