

# 系统的增速依赖于不可测状态非线性系统全局输出反馈渐近镇定

尚芳<sup>1</sup> 刘允刚<sup>1</sup> 张承慧<sup>1</sup>

**摘要** 研究了一类非线性增长速度依赖于不可测状态且有稳定零动态非线性系统的全局输出反馈渐近稳定控制问题. 因所研究的系统隐含有零动态, 所以首先定义了一系列新的线性变换, 从而成功地分离出原系统的零动态, 得到了便于输出反馈设计的新系统. 然后给出了变换后系统的较为简洁的输出反馈控制设计过程, 并且, 闭环系统的渐近稳定性可由所导出矩阵的正定性来保证. 最后, 仿真算例验证了文中理论结果的正确性.

**关键词** 非线性系统, 线性变换, 输出反馈, 全局渐近稳定  
**中图分类号** TP273

## Globally Asymptotical Output-feedback Stabilization for Nonlinear Systems with Unmeasured States Dependent Growth

SHANG Fang<sup>1</sup> LIU Yun-Gang<sup>1</sup> ZHANG Cheng-Hui<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, the globally asymptotical output-feedback stabilization problem is investigated for a class of nonlinear systems with unmeasured states dependent growth and stable zero-dynamics. Because of the existence of zero-dynamics, a series of novel linear transformations are first defined to successfully separate the zero-dynamics from the original system, and the new system is thus derived which is convenient for the output-feedback design. Then, a simple design procedure is given for the output-feedback control of the transformed system. Besides, the globally asymptotical stability of the closed-loop system can be guaranteed by the positive definiteness of the derived matrix. Finally, a simulation example is given to illustrate the correctness of the theoretical results.

**Key words** Nonlinear system, linear transformation, output-feedback, globally asymptotical stabilization

### 1 引言

非线性系统全局反馈稳定控制设计是当前控制理论研究的热点<sup>[1~4]</sup>. 反馈线性化<sup>[5]</sup>和积分反推<sup>[2,3]</sup>是设计非线性系统全局反馈控制器的主要方法. 自上世纪 90 年代以来, 积分反推方法在严格反馈系统控制方面已取得一系列研究成果<sup>[3,4,6]</sup>.

由于所能利用的系统状态信息不完全, 所以输出反馈控制比状态反馈控制更具挑战性, 也更难以实现<sup>[4]</sup>. 不同于线性系统, 对于非线性系统, 由于分离原理一般不成立, 所以常将观测器设计和控制器设计结合在一起. 控制设计的目标不

仅要确保闭环系统的稳定性, 还要保证观测误差的收敛性. 由于观测器理论发展缓慢<sup>[7~11]</sup>, 因而依赖于它的输出反馈控制的发展还不够成熟, 仍有许多问题有待研究<sup>[4,12]</sup>. 一个基本问题是非线性系统能否实现输出反馈控制的充分必要条件问题. 另外, 系统非线性关于不可测状态的增速对输出反馈控制的实现起至关重要作用. 文献 [13] 指出, 如果非线性依赖于不可测状态增长速度的幂次大于 2, 则存在无法实现输出反馈控制的反例.

最近, 一类具有依赖于不可测状态增长速度的非线性系统的输出反馈控制设计得到了人们的广泛关注和集中研究<sup>[14~19]</sup>. 文献 [14] 研究了一类线性依赖于不可测状态的广义输出反馈规范型非线性系统的跟踪问题, 首次给出了全局自适应输出反馈跟踪控制器的反推设计方法. 文献 [15] 研究了一类具有三角结构且满足线性增长条件的非线性系统的全局输出反馈控制问题, 并应用反推技术, 给出了不基于分离原理的指数稳定控制器设计方法. 作为文献 [15] 的推广, 文献 [16] 研究了系统非线性的线性增长率未知的情况, 提出了一种高增益参数在线调整的自适应输出反馈控制设计方法; 文献 [17] 研究了高阶非线性系统的情况. 文献 [18,19] 研究了系统非线性的增长率依赖于可量测输出的情况, 给出了基于在线调整高增益观测器的输出反馈控制设计方法.

本文研究了一类非线性增长速度依赖于不可测状态, 且具有稳定零动态非线性系统的输出反馈全局渐近稳定控制设计问题. 所研究的非线性系统隐含有零动态 (相对阶为  $\rho, \rho = 2, \dots, n$ ), 所以较文献 [15,16] 中的系统 (相对阶为  $n$ ) 更具有一般性, 也不是文献 [17] 中系统  $p = 1$  时的特例. 此外, 因所研究的非线性系统难以直接进行输出反馈控制器的设计, 所以该文给出了一系列新的线性变换, 从而成功地分离出原系统的零动态, 并得到了形如文献 [18,19] 中的便于输出反馈设计的新系统. 考虑到反推设计方法较为复杂 (例如文献 [15,17]), 本文通过推广文献 [16] 中的方法, 给出了变换后新系统的更为简洁的输出反馈控制设计过程, 并且闭环系统的渐近稳定性可由所导出矩阵的正定性来保证.

本文通篇采用如下符号:  $I_i$  表示  $i \times i$  单位矩阵; 对  $n$  维列向量  $\mathbf{x}$ , 用  $\mathbf{x}_{[i]}$  表示  $[x_1, \dots, x_i]^T$ ;  $\mathbf{0}_{[i]}$  表示所有元素皆为零的  $i$  维列向量;  $\mathbf{e}_i$  表示第  $i$  个元素为 1, 其余元素皆为零的  $n$  维单位列向量;  $\mathbf{e}_{i,j} (i \leq j)$  表示  $[\mathbf{0}_{[i-1]}^T, 1, \mathbf{0}_{[j-i]}^T]^T$ ;  $\mathbf{b}_{[i,0]}$  表示  $[b_i, b_{i-1}, \dots, b_1, b_0]^T$ ;  $\mathbf{g}_{i,[j]}$  表示  $[g_{i1}, \dots, g_{ij}]^T$ ;  $\varphi_{i,[j,k]}$  表示  $[\varphi_{i,j}, \varphi_{i,j+1}, \dots, \varphi_{i,k}]^T$ .

### 2 系统与问题描述

考虑如下  $n$  阶单输入单输出非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i(t, \mathbf{x}, u), & i = 1, \dots, \rho - 1 \\ \dot{x}_j = x_{j+1} + \sigma(y)b_{m+\rho-j}u + \phi_j(t, \mathbf{x}, u), & j = \rho, \dots, n - 1 \\ \dot{x}_n = \sigma(y)b_0u + \phi_n(t, \mathbf{x}, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $n \in \mathbf{N}, \rho \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}$  且  $m + \rho = n$ ;  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为系统状态, 其初值为  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ;  $u \in \mathbf{R}$  和  $y \in \mathbf{R}$  分别为系统的控制输入和输出;  $b_i, i = 0, \dots, m$  是已知常数, 且  $b_m \neq 0$ ; 函数  $\sigma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  充分光滑且对任意  $y \in \mathbf{R}, \sigma(y) \neq 0$ ; 函数  $\phi_i: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, \dots, n$  关于第一变元为分段连续的、关于其他变元为局部 Lipschitz

收稿日期 2006-6-20 收修改稿日期 2006-11-20  
Received June 20, 2006; in revised form November 20, 2006  
国家自然科学基金 (60304002, 60674036), 山东省科技发展计划 (2004GG4204014), 教育部新世纪优秀人才支持计划资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60304002, 60674036), the Science and Technology Development Plan of Shandong Province (2004GG4204014), and the Program for New Century Excellent Talents in University of China  
1. 山东大学控制科学与工程学院 济南 250061  
1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061  
DOI: 10.1360/aas-007-1326

连续的. 本文中, 假定仅系统输出  $y$  可量测, 系统的相对阶  $\rho > 1$ .

本文的主要结论建立在以下假设条件基础之上:

**假设 1.** 对任意  $i = 1, \dots, n$ , 存在已知常数  $c \geq 0$ , 使得对任意  $t \in \mathbf{R}^+$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{R}$ ,  $|\phi_i(t, \mathbf{x}, u)| \leq c(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|)$ ,  $k = \min\{i, \rho\}$ .

**假设 2.** 多项式方程  $b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 = 0$  的所有根均有负实部.

假设 1 表明原点  $\mathbf{0}_{[n]}$  是开环系统 (1) 的平衡点. 假设 2 表明系统 (1) 是最小相位的, 即系统具有稳定的零动态.

**注 1.** 当系统 (1) 的相对阶  $\rho = n$  时, 就是文献 [15] 中的研究对象, 也是文献 [17] 中  $p = 1$  时的研究系统. 假设 1 显示系统的非线性增速关于不可测状态是线性的. 从文献 [14~19] 中可知该约束条件是实现输出反馈控制的关键, 其中文献 [15~17] 研究了  $c$  为常数的情况, 文献 [14, 18, 19] 研究了  $c$  为可量测输出的函数的情况.

本文的目标是设计动态输出反馈控制律, 使得闭环系统全局渐近收敛于原点. 该控制目标的实现将在第 3 节中完成.

### 3 输出反馈控制器设计

#### 3.1 线性变换

系统 (1) 可写成如下紧凑型

$$\dot{\mathbf{x}} = A_n \mathbf{x} + \sigma(y) \mathbf{b} u + \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}, u) \quad (2)$$

其中,

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & I_{n-1} & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[\rho-1]} \\ \mathbf{b}_{[m,0]} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \phi_1(t, \mathbf{x}, u) \\ \vdots \\ \phi_n(t, \mathbf{x}, u) \end{bmatrix}.$$

第一次线性变换  $T_1$  (即坐标变换矩阵) 的作用是将向量  $\mathbf{b}$  除了第  $\rho$  个元素非零外皆为零. 令  $\mathbf{z}_1 = T_1 \mathbf{x}$ , 其中  $T_1$  和  $T_1^{-1}$  与  $I_n$  的不同在于其第  $\rho$  列分别为  $[\mathbf{0}_{[\rho-1]}^T, 1, -b_{m-1}/b_m, \dots, -b_0/b_m]^T$  和  $[\mathbf{0}_{[\rho-1]}^T, 1, b_{m-1}/b_m, \dots, b_0/b_m]^T$ , 可得  $\mathbf{z}_1$  的动态方程为

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = C_1 \mathbf{z}_1 + \sigma(y) \mathbf{d} u + \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{x}, u) \quad (3)$$

其中,

$$C_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\rho-1} \\ \mathbf{0}_{(m+1) \times (\rho-1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[\rho-2]} \\ 1 \\ \mathbf{g}_{1, [m+1]} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[\rho-1]} \\ 1 \\ -\frac{\mathbf{b}_{[m-1, 0]}}{b_m} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\rho \times (m-1)} \\ I_{m-1} \\ \mathbf{0}_{[m-1]}^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{d} = T_1 \mathbf{b} = [\mathbf{0}_{[\rho-1]}^T, b_m, \mathbf{0}_{[m]}^T]^T = b_m \mathbf{e}_\rho, \\ \boldsymbol{\varphi}_1 = T_1 \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}, u).$$

剩余的  $\rho - 1$  次线性变换主要是针对矩阵  $C_1$  设计的, 目的是得到  $C_\rho$ , 其仅在第 1 和  $\rho + 1$  列与  $I_n$  不同. 构造第

$i (i = 2, \dots, \rho - 1)$  次线性变换  $T_i$ , 使得  $C_{i-1}$  的第  $\rho - i + 2$  列成为向量  $\mathbf{e}_{\rho-i+1}$ . 令  $\mathbf{z}_i = T_i \mathbf{z}_{i-1}$ , 其中  $T_i$  和  $T_i^{-1}$  与  $I_n$  的不同在于其第  $\rho - i + 1$  列分别为  $[\mathbf{0}_{[\rho-i]}^T, 1, -\mathbf{g}_{i-1, [m+i-1]}^T]^T$  和  $[\mathbf{0}_{[\rho-i]}^T, 1, \mathbf{g}_{i-1, [m+i-1]}^T]^T$ . 注意到  $\mathbf{d} = T_i T_{i-1} \dots T_2 \mathbf{d}$ , 可得

$$\dot{\mathbf{z}}_i = C_i \mathbf{z}_i + \sigma(y) \mathbf{d} u + \boldsymbol{\varphi}_i(t, \mathbf{x}, u) \quad (4)$$

其中,

$$C_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\rho-i} \\ \mathbf{0}_{(m+i) \times (\rho-i)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[\rho-i-1]} \\ 1 \\ \mathbf{g}_{i, [m+i]} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(\rho-i) \times (i-1)} \\ I_{i-1} \\ \mathbf{0}_{(m+1) \times (i-1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[\rho-1]} \\ 1 \\ -\frac{\mathbf{b}_{[m-1, 0]}}{b_m} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\rho \times (m-1)} \\ I_{m-1} \\ \mathbf{0}_{[m-1]}^T \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varphi}_i = T_i \boldsymbol{\varphi}_{i-1}(t, \mathbf{x}, u).$$

最后, 构造第  $\rho$  次线性变换  $\mathbf{z}_\rho = T_\rho \mathbf{z}_{\rho-1}$ , 使得  $C_{\rho-1}$  的第 2 列成为单位列向量  $\mathbf{e}_1$ , 其中  $T_\rho$  和  $T_\rho^{-1}$  与  $I_n$  的不同在于其第 1 列分别为  $[1, -\mathbf{g}_{\rho-1, [n-1]}^T]^T$  和  $[1, \mathbf{g}_{\rho-1, [n-1]}^T]^T$ . 注意到  $\mathbf{d} = T_\rho T_{\rho-1} \dots T_2 \mathbf{d}$ , 从而得到  $\mathbf{z}_\rho$  的如下动态方程

$$\dot{\mathbf{z}}_\rho = C_\rho \mathbf{z}_\rho + \sigma(y) \mathbf{d} u + \boldsymbol{\varphi}_\rho(t, \mathbf{x}, u) \quad (5)$$

其中,

$$C_\rho = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\rho, [n]}, \begin{bmatrix} I_{\rho-1} \\ \mathbf{0}_{(m+1) \times (\rho-1)} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[\rho-1]} \\ 1 \\ -\frac{\mathbf{b}_{[m-1, 0]}}{b_m} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\rho \times (m-1)} \\ I_{m-1} \\ \mathbf{0}_{[m-1]}^T \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varphi}_\rho = T_\rho \boldsymbol{\varphi}_{\rho-1} = [\varphi_{\rho, 1}, \dots, \varphi_{\rho, n}]^T.$$

至此, 线性状态变换完成.

在设计状态观测器以及输出反馈控制器之前, 还须对系统 (5) 进行适当的分解. 令  $\boldsymbol{\chi} = [\chi_1, \dots, \chi_\rho]^T = \mathbf{z}_{\rho, [1, \rho]}$  和  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_m]^T = \mathbf{z}_{\rho, [\rho+1, n]}$ , 则系统 (5) 转化为如下结构

$$\begin{cases} \Sigma_\xi : \dot{\boldsymbol{\xi}} = D \boldsymbol{\xi} + \mathbf{g}_{\rho, [\rho+1, n]} \chi_1 + \boldsymbol{\varphi}_{\rho, [\rho+1, n]}(t, \mathbf{x}, u) \\ \Sigma_\chi : \dot{\boldsymbol{\chi}} = A_\rho \boldsymbol{\chi} + \mathbf{e}_{\rho, \rho} (b_m \sigma(y) u + \xi_1) + \mathbf{g}_{\rho, [\rho]} \chi_1 + \boldsymbol{\varphi}_{\rho, [\rho]}(t, \mathbf{x}, u) \\ y = \chi_1 = \mathbf{e}_{1, \rho}^T \boldsymbol{\chi} \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $D = \left[ -\frac{\mathbf{b}_{[m-1, 0]}}{b_m}, \begin{bmatrix} I_{m-1} \\ \mathbf{0}_{[m-1]}^T \end{bmatrix} \right]$ . 由假设 2 知, 矩阵  $D$  为 Hurwitz 的, 从而存在  $Q = Q^T > 0$ , 满足 Lyapunov 方程:  $D^T Q + Q D = -I_m$ .

由上述线性变换  $T_i, i = 1, \dots, \rho$  以及假设 1 易于证明下面的引理 1, 故不再赘述; 引理 2 指出子系统  $\Sigma_\xi$  为输入到状态稳定的, 故可将其看作整个系统 (6) 的零动态.

**引理 1.** 存在已知的正常数  $c'$ , 使得在子系统  $\Sigma_\chi$  和  $\Sigma_\xi$  中的未知非线性分量  $\varphi_{\rho, i}(\cdot, \cdot, \cdot), i = 1, \dots, n$  对任意

$(t, \mathbf{x}, u) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ , 都有

$$|\varphi_{\rho,i}(t, \mathbf{x}, u)| \leq c'(|\chi_1| + \dots + |\chi_k|), k = \min\{i, \rho\} \quad (7)$$

**引理 2.** 考虑 (6) 的子系统  $\Sigma_\xi$ . 令  $V_\xi = \xi^T Q \xi$  和  $E_\varepsilon = \text{diag}[1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{\rho-1}]$ , 其中  $0 < \varepsilon < 1$ , 则存在正常数  $c_{01}$  (不依赖于  $\varepsilon$ ) 和  $c_{02}$  (依赖于  $\varepsilon$ ), 使得

$$\dot{V}_\xi \leq -c_{01} \|\xi\|^2 + c_{02} \|E_\varepsilon \chi\|^2 \quad (8)$$

**证明.** 沿着子系统  $\Sigma_\xi$  的轨迹求  $V_\xi$  的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &= -\|\xi\|^2 + 2\xi^T Q g_{\rho, [\rho+1, n]} \chi_1 + \\ & 2\xi^T Q \varphi_{\rho, [\rho+1, n]}(t, \mathbf{x}, u) \leq \\ & -\|\xi\|^2 + 2\|Q g_{\rho, [\rho+1, n]}\| \cdot \|\xi\| \cdot |\chi_1| + \\ & 2\|\xi\| \cdot \|Q\| \cdot \|\varphi_{\rho, [\rho+1, n]}(t, \mathbf{x}, u)\|_1 \end{aligned}$$

由引理 1 和  $0 < \varepsilon < 1$ , 可知上式的第三项满足

$$\begin{aligned} 2\|\xi\| \cdot \|Q\| \cdot \|\varphi_{\rho, [\rho+1, n]}(t, \mathbf{x}, u)\|_1 &\leq \\ 2mc' \|Q\| \cdot \|\xi\| (|\chi_1| + |\chi_2| + \dots + |\chi_\rho|) &\leq \\ \frac{2mc' \rho^{\frac{1}{2}} \|Q\|}{\varepsilon^{\rho-1}} \|\xi\| \cdot \|E_\varepsilon \chi\| \end{aligned}$$

因此, 可进一步求得

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &\leq -\|\xi\|^2 + \delta_1 \|\xi\|^2 + \frac{\|Q g_{\rho, [\rho+1, n]}\|^2}{\delta_1} \|E_\varepsilon \chi\|^2 + \\ \delta_2 \|\xi\|^2 + \frac{\rho(mc')^2 \|Q\|^2}{\delta_2 \varepsilon^{2\rho-2}} \|E_\varepsilon \chi\|^2 &= \\ -(1 - \delta_1 - \delta_2) \|\xi\|^2 + \\ \left( \frac{\|Q g_{\rho, [\rho+1, n]}\|^2}{\delta_1} + \frac{\rho(mc')^2 \|Q\|^2}{\delta_2 \varepsilon^{2\rho-2}} \right) \|E_\varepsilon \chi\|^2 \end{aligned}$$

其中,  $\delta_1$  和  $\delta_2$  为其和小于 1 的正数. 如此, 选取  $c_{01} = 1 - \delta_1 - \delta_2$  和  $c_{02} = \frac{\|Q g_{\rho, [\rho+1, n]}\|^2}{\delta_1} + \frac{\rho(mc')^2 \|Q\|^2}{\delta_2 \varepsilon^{2\rho-2}}$ , 其中  $\varepsilon$  是待定的设计参数. 从而得到 (8) 式.  $\square$

### 3.2 基于状态观测器的输出反馈控制设计

要实现整个系统 (6) 的全局稳定控制, 须首先设计适当的观测器, 重构子系统  $\Sigma_\chi$  的状态, 然后基于该观测器设计输出反馈控制器. 本文设计如下形式的观测器和控制器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\chi}} &= A_\rho \hat{\chi} + l_\varepsilon (\hat{\chi}_1 - \chi_1) + b_m \sigma(y) e_{\rho, \rho} u + g_{\rho, [\rho]} \chi_1 \\ u &= \frac{1}{b_m \sigma(y)} k_\varepsilon \hat{\chi} \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $l_\varepsilon = [l_1/\varepsilon, l_2/\varepsilon^2, \dots, l_\rho/\varepsilon^\rho]^T$ ,  $k_\varepsilon = [k_1/\varepsilon^\rho, k_2/\varepsilon^{\rho-1}, \dots, k_\rho/\varepsilon]$ .

定义观测误差  $\tilde{\chi} = \chi - \hat{\chi}$ . 则由系统 (6) 和 (9), 可得  $\tilde{\chi}$  的动态方程

$$\dot{\tilde{\chi}} = A_{l_\varepsilon} \tilde{\chi} + e_{\rho, \rho} \xi_1 + \varphi_{\rho, [\rho]}(t, \mathbf{x}, u) \quad (10)$$

其中,  $A_{l_\varepsilon} = A_\rho + l_\varepsilon e_{1, \rho}^T$ .

将控制器 (9) 带入系统 (6), 得到闭环系统

$$\dot{\chi} = A_{k_\varepsilon} \chi + e_{\rho, \rho} (\xi_1 - k_\varepsilon \tilde{\chi}) + g_{\rho, [\rho]} \chi_1 + \varphi_{\rho, [\rho]}(t, \mathbf{x}, u) \quad (11)$$

其中,  $A_{k_\varepsilon} = A_\rho + e_{\rho, \rho} k_\varepsilon$ .

由于  $A_l$  和  $A_k$  是 Hurwitz 的, 所以存在对称正定矩阵  $P_l$  和  $P_k$ , 满足

$$A_l^T P_l + P_l A_l = -I_n, A_k^T P_k + P_k A_k = -I_n \quad (12)$$

因为  $E_\varepsilon = \text{diag}[1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{\rho-1}]$ , 所以  $\varepsilon A_{l_\varepsilon} = E_\varepsilon^{-1} A_l E_\varepsilon$ . 因此, 可得如下新的 Lyapunov 方程

$$A_{l_\varepsilon}^T P_{l_\varepsilon} + P_{l_\varepsilon} A_{l_\varepsilon} = -\frac{E_\varepsilon^2}{\varepsilon}, A_{k_\varepsilon}^T P_{k_\varepsilon} + P_{k_\varepsilon} A_{k_\varepsilon} = -\frac{E_\varepsilon^2}{\varepsilon} \quad (13)$$

其中,  $P_{l_\varepsilon} = E_\varepsilon P_l E_\varepsilon, P_{k_\varepsilon} = E_\varepsilon P_k E_\varepsilon$ . 显而易见,  $P_{l_\varepsilon}$  和  $P_{k_\varepsilon}$  都是对称正定矩阵.

关于误差系统和闭环系统, 有如下两引理, 其中引理 3 的证明见附录中的 A.1, 引理 4 与引理 3 的证明类似, 故不再给出.

**引理 3.** 考虑误差系统 (10).  $P_{l_\varepsilon} = P_{l_\varepsilon}^T > 0$  满足 (13), 则  $V_{\tilde{\chi}}(\tilde{\chi}) = \tilde{\chi}^T P_{l_\varepsilon} \tilde{\chi}$  满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{\chi}} &\leq -\frac{1}{\varepsilon} \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\|^2 + 2\varepsilon^{\rho-1} \|P_l\| \cdot \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\| \cdot \|\xi\| + \\ & 2\rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_l\| \cdot \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\| \cdot \|E_\varepsilon \chi\| \end{aligned} \quad (14)$$

**引理 4.** 考虑闭环系统 (11).  $P_{k_\varepsilon} = P_{k_\varepsilon}^T > 0$  满足 (13), 则  $V_\chi(\chi) = \chi^T P_{k_\varepsilon} \chi$  满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_\chi &\leq -\left(\varepsilon^{-1} - 2\|P_k\| \cdot \|e_{\rho, [\rho]}\| - 2\rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_k\|\right) \|E_\varepsilon \chi\|^2 + \\ & 2\varepsilon^{\rho-1} \|P_k\| \cdot \|E_\varepsilon \chi\| \cdot \|\xi\| + \\ & \frac{2}{\varepsilon} \|P_k e_{\rho, \rho} k\| \cdot \|E_\varepsilon \chi\| \cdot \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\| \end{aligned} \quad (15)$$

本文的主要结果由下面的定理给出:

**定理 1.** 考虑系统 (1) 的输出反馈控制问题. 假设该系统满足假设 1 和假设 2. 若选择  $l = [l_1, \dots, l_\rho]^T$  和  $k = [k_1, \dots, k_\rho]$ , 使得  $A_l = A_\rho + l e_{1, \rho}^T$  和  $A_k = A_\rho + e_{\rho, \rho} k$  皆是 Hurwitz 矩阵, 则存在常数  $\varepsilon^* > 0$ , 当  $0 < \varepsilon < \min\{1, \varepsilon^*\}$  时, 动态输出反馈控制 (9) 使得闭环系统全局渐近稳定.

**证明.** 选取  $V(\xi, \tilde{\chi}, \chi) = \gamma_1 V_\xi + \gamma_2 V_{\tilde{\chi}} + \gamma_3 V_\chi$ , 其中  $\gamma_i, i = 1, 2, 3$  为待定的正常数,  $V_\xi = \xi^T Q \xi, V_{\tilde{\chi}} = \tilde{\chi}^T P_{l_\varepsilon} \tilde{\chi}, V_\chi = \chi^T P_{k_\varepsilon} \chi$ . 则由引理 2 ~ 4, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\gamma_1 c_{01} \|\xi\|^2 + \gamma_1 c_{02} \|E_\varepsilon \chi\|^2 - \frac{\gamma_2}{\varepsilon} \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\|^2 + \\ & 2\gamma_2 \|P_l\| \cdot \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\| \left(\varepsilon^{\rho-1} \|\xi\| + \rho^{\frac{3}{2}} c' \|E_\varepsilon \chi\|\right) - \\ & \gamma_3 \left(\varepsilon^{-1} - 2\|P_k\| \cdot \|g_{\rho, [\rho]}\| - 2\rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_k\|\right) \|E_\varepsilon \chi\|^2 + \\ & 2\gamma_3 \varepsilon^{\rho-1} \|P_k\| \cdot \|E_\varepsilon \chi\| \cdot \|\xi\| + \\ & \frac{2\gamma_3}{\varepsilon} \|P_k e_{\rho, \rho} k\| \cdot \|E_\varepsilon \chi\| \cdot \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\| = \\ & - \begin{bmatrix} \|\xi\| \\ \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\| \\ \|E_\varepsilon \chi\| \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} \|\xi\| \\ \|E_\varepsilon \tilde{\chi}\| \\ \|E_\varepsilon \chi\| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

其中,

$$P = \begin{bmatrix} \gamma_1 c_{01} & -\gamma_2 \varepsilon^{\rho-1} \|P_l\| & (1, 3) \\ -\gamma_2 \varepsilon^{\rho-1} \|P_l\| & \frac{\gamma_2}{\varepsilon} & (2, 3) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) \end{bmatrix} \quad (17)$$

上式中  $(1, 3) = (3, 1) = -\gamma_3 \varepsilon^{\rho-1} \|P_k\|$ ,  $(2, 3) = (3, 2) = -\gamma_2 \rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_1\| - \frac{\gamma_3}{\varepsilon} \|P_k e_{\rho, \rho} k\|$ ,  $(3, 3) = \frac{\gamma_3}{\varepsilon} - \gamma_1 c_{02} - 2\gamma_3 \|P_k\| (\|g_{\rho, [\rho]}\| + \rho^{\frac{3}{2}} c')$ .

针对式 (17) 中的设计参数, 有如下两命题, 其证明分别见附录中的 A.2 和 A.3.

**命题 1.** 一定存在正的  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  和  $\varepsilon$ , 使得由式 (17) 定义的矩阵  $P$  为正定的.

**命题 2.** 当  $\gamma_1 = \varepsilon^{2\rho-1}$ ,  $\gamma_2 = \varepsilon^a$ ,  $\gamma_3 = \varepsilon^b$ , 且  $0 < a < b < 1$  时, 则在如下范围内取值的  $\varepsilon$ :  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ , 使得式 (17) 所定义的矩阵  $P$  为正定的, 其中,

$$\varepsilon^* = \min \left\{ 1, \left( \frac{\|P_k e_{\rho, \rho} k\|}{\rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_1\|} \right)^{\frac{1}{a+1-b}}, \left( \frac{c_{01}}{3 \|P_1\|^2} \right)^{\frac{1}{a}}, \frac{1}{6 \|P_k\| (\|g_{\rho, [\rho]}\| + \rho^{\frac{3}{2}} c')}, \left( \frac{1}{36 \|P_k e_{\rho, \rho} k\|^2} \right)^{\frac{1}{b-a}}, \left( \frac{c_{01}}{9 \|P_k\| (\|P_k\| + 4 \|P_1\| \cdot \|P_k e_{\rho, \rho} k\|)} \right)^{\frac{1}{b}}, \left( \frac{1}{3 c'_{02}} \right)^{\frac{1}{2-b}} \right\}$$

由命题 1, 选取  $\gamma_1 = \varepsilon^{2\rho-1}$ ,  $\gamma_2 = \varepsilon^a$ ,  $\gamma_3 = \varepsilon^b$ . 那么当  $0 < a < b < 1$  时, 若  $\varepsilon$  充分小, 则矩阵  $P$  为正定的, 进而由 (16), 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(t) \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) \rightarrow 0.$$

这意味着  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\chi}(t) \rightarrow 0$ , 进而意味着  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ , 即闭环系统全局渐近稳定.  $\square$

**注 2.** 命题 2 所给出的  $\varepsilon$  充分小的界限  $\varepsilon^*$ , 但它并不是最大的. 从应用角度讲,  $\varepsilon$  越小, 所付出的代价将越大, 因此, 给出一个“尽量大”的  $\varepsilon^*$  很重要.

### 4 仿真算例

考虑下面的三阶非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \sin x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + (1 + y^2)u + \frac{x_2}{2 + \exp(x_2)} \\ \dot{x}_3 = 2(1 + y^2)u + \frac{1}{2}x_2 \cos x_1^2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (18)$$

易验证该系统满足假设 1 和假设 2, 且  $c = 1$ .

参照第 3 节的内容, 对系统 (18) 进行稳定控制设计, 计算可得  $D = -2$ . 选择  $Q = \frac{1}{4}$ ,  $c' = 7$ ,  $\delta_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\delta_2 = \frac{1}{4}$ ,  $c_{01} = \frac{1}{2}$ ,  $c_{02} = 16 + \frac{49}{2\varepsilon^2}$ . 并令  $\mathbf{l} = [-3, -2]^T$  和  $\mathbf{k} = [-1, -2]$ , 以及  $a = 1/3$ ,  $b = 2/3$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

设置闭环系统的初值为:  $\mathbf{x}(0) = [0.1, 0.1, -0.2]^T$ ,  $\hat{\chi}(0) = [0, 0]^T$ . 应用 Matlab 系统仿真软件, 得到闭环系统状态  $\mathbf{x}$  的运动轨迹, 如图 1~6 所示. 从中可以看出闭环系统为渐近稳定的, 且观测器实现了对所要估计的闭环系统状态的渐近重构.

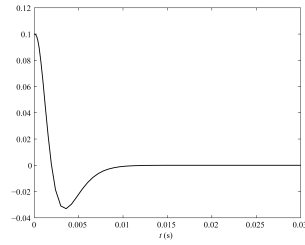


图 1 闭环系统状态  $x_1$

Fig. 1 State  $x_1$  of the closed-loop system

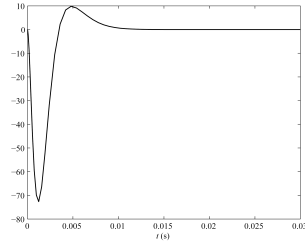


图 2 闭环系统状态  $x_2$

Fig. 2 State  $x_2$  of the closed-loop system

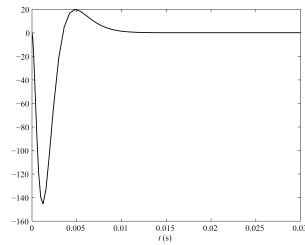


图 3 闭环系统状态  $x_3$

Fig. 3 State  $x_3$  of the closed-loop system

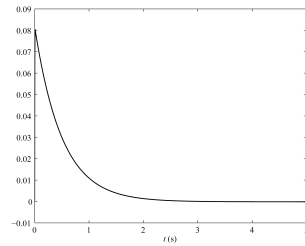


图 4 闭环系统状态的零动态  $\xi$

Fig. 4 Zero dynamics  $\xi$  of the closed-loop system

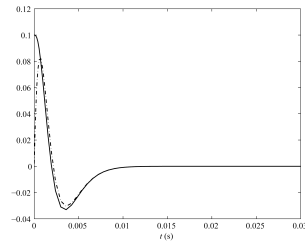


图 5 闭环系统状态  $x_1$  (实线) 及其估计  $\hat{x}_1$  (虚线)

Fig. 5 State  $x_1$  (real) and its estimate  $\hat{x}_1$  (dashed)

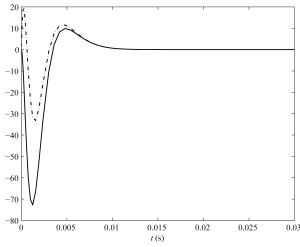


图 6 闭环系统状态  $\chi_2$ (实线) 及其估计  $\hat{\chi}_2$ (虚线)

Fig. 6 State  $\chi_2$ (real) and its estimate  $\hat{\chi}_2$ (dashed)

5 结 论

本文研究了一类具有依赖于不可测状态增量的非线性系统的全局输出反馈渐近稳定控制设计. 通过引入一系列线性变换, 将原系统隐含的稳定零动态分离出来. 然后针对变换后的新系统构造了状态观测器, 设计了基于该观测器的输出反馈控制器, 证明了整个闭环系统的全局渐近稳定性. 本文所给出的控制算法的关键是选取适当的设计参数, 从而使得文中所定义的矩阵  $P$  正定, 进而确保闭环系统的全局渐近稳定性. 还有待进一步研究的问题是当系统或依赖于不可测状态增量中含有参数不确定性时, 如何设计全局稳定的输出反馈控制器.

附录 A

A.1 引理 3 的证明

沿着 (10) 的轨迹求  $V_{\tilde{\chi}}$  的导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{\chi}} = & -\frac{1}{\varepsilon} \|E_{\varepsilon} \tilde{\chi}\|^2 + 2\tilde{\chi}^T E_{\varepsilon} P_1 E_{\varepsilon} e_{\rho, \rho} \xi_1 + \\ & 2\tilde{\chi}^T E_{\varepsilon} P_1 E_{\varepsilon} \varphi_{\rho, [\rho]}(t, \mathbf{x}, u) \end{aligned} \quad (A1)$$

由假设 1 及  $0 < \varepsilon < 1$ , 上式右边第 2 项和第 3 项分别满足

$$\begin{aligned} 2\tilde{\chi}^T E_{\varepsilon} P_1 E_{\varepsilon} e_{\rho, \rho} \xi_1 \leq & 2\varepsilon^{\rho-1} \|P_1\| \cdot \|E_{\varepsilon} \tilde{\chi}\| \|\xi_1\| \leq \\ & 2\varepsilon^{\rho-1} \|P_1\| \cdot \|E_{\varepsilon} \tilde{\chi}\| \cdot \|\xi\| \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{\chi}^T E_{\varepsilon} P_1 E_{\varepsilon} \varphi_{\rho, [\rho]} \leq & 2\|P_1\| \cdot \|E_{\varepsilon} \tilde{\chi}\| \cdot \|E_{\varepsilon} \varphi_{\rho, [\rho]}\|_1 \\ \leq & 2\rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_1\| \cdot \|E_{\varepsilon} \tilde{\chi}\| \cdot \|E_{\varepsilon} \chi\| \end{aligned} \quad (A3)$$

注意到在上式的处理中用到了如下不等式

$$\begin{aligned} \|E_{\varepsilon} \varphi_{\rho, [\rho]}\|_1 \leq & c'(1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^{\rho-1})|\chi_1| + \\ & c'(\varepsilon + \dots + \varepsilon^{\rho-1})|\chi_2| + \dots + c'\varepsilon^{\rho-1}|\chi_{\rho}| \leq \\ & \rho c'(|\chi_1| + \varepsilon|\chi_2| + \dots + \varepsilon^{\rho-1}|\chi_{\rho}|) = \\ & \rho c' \|E_{\varepsilon} \chi\|_1 \leq \rho^{\frac{3}{2}} c' \|E_{\varepsilon} \chi\|. \end{aligned} \quad (A4)$$

将 (A2) 和 (A3) 代入 (A1) 即得 (14). □

A.2 命题 1 的证明

令  $\gamma_1 = \varepsilon^{2\rho-1}$ ,  $\gamma_2 = \varepsilon^a$ ,  $\gamma_3 = \varepsilon^b$ , 其中  $a, b$  为待定的小于 1 的正数. 由于  $0 < \varepsilon < 1$ , 所以  $\gamma_1 c_{02} < \varepsilon \left( \frac{\|Q e_{\rho, [\rho+1, n]}\|^2}{\delta_1} + \frac{\rho(m c')^2 \|Q\|^2}{\delta_2} \right) = \varepsilon c'_{02}$ . 如此, 要使得矩

阵  $P$  为正定, 只需如下矩阵  $P'$  正定 (因为  $P \geq P'$ )

$$P' = \begin{bmatrix} \varepsilon^{2\rho-1} c_{01} & -\varepsilon^{\rho-1+a} \|P_1\| & -\varepsilon^{\rho-1+b} \|P_k\| \\ -\varepsilon^{\rho-1+a} \|P_1\| & \varepsilon^{a-1} & (2, 3) \\ -\varepsilon^{\rho-1+b} \|P_k\| & (3, 2) & (3, 3) \end{bmatrix} \quad (2, 3)$$

其中,  $(2, 3) = (3, 2) = -\varepsilon^a \rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_1\| - \varepsilon^{b-1} \|P_k e_{\rho, \rho} k\|$ ,  $(3, 3) = \varepsilon^{b-1} - \varepsilon c'_{02} - 2\varepsilon^b \|P_k\| (\|g_{\rho, [\rho]}\| + \rho^{\frac{3}{2}} c')$ . 定义

$$P'' = \begin{bmatrix} \varepsilon^{2\rho-1} c_{01} & -\varepsilon^{\rho-1+a} \|P_1\| & -\varepsilon^{\rho-1+b} \|P_k\| \\ -\varepsilon^{\rho-1+a} \|P_1\| & \varepsilon^{a-1} & (2, 3) \\ -\varepsilon^{\rho-1+b} \|P_k\| & (3, 2) & \varepsilon^{b-1} \end{bmatrix},$$

其中,  $(2, 3) = (3, 2) = -\varepsilon^{b-1} \|P_k e_{\rho, \rho} k\|$ , 以及

$$P''' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^a \rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_1\| \\ 0 & -\varepsilon^a \rho^{\frac{3}{2}} c' \|P_1\| & (3, 3) \end{bmatrix},$$

其中,  $(3, 3) = -\varepsilon c'_{02} - 2\varepsilon^b \|P_k\| (\|g_{\rho, [\rho]}\| + \rho^{\frac{3}{2}} c')$ . 显然, 当  $\varepsilon$  充分小, 且  $0 < a < b < 1$  时,  $P' = P'' + P''' = P'' + o(P'')$ . 则此时矩阵  $P''$  的正定性蕴涵着  $P'$  的正定性. 而在  $0 < a < b < 1$  时, 总存在充分小的  $\varepsilon$  使  $P''$  正定. □

A.3 命题 2 的证明

构造

$$P'''' = \begin{bmatrix} \varepsilon^{2\rho-1} c_{01} & -\varepsilon^{\rho-1+a} \|P_1\| & (1, 3) \\ -\varepsilon^{\rho-1+a} \|P_1\| & \varepsilon^{a-1} & (2, 3) \\ (3, 1) & (3, 2) & \frac{1}{3} \varepsilon^{b-1} \end{bmatrix}$$

其中,  $(1, 3) = (3, 1) = -\varepsilon^{\rho-1+b} \|P_k\|$ ,  $(2, 3) = (3, 2) = -2\varepsilon^{b-1} \|P_k e_{\rho, \rho} k\|$ . 如此,  $P \geq P' \geq P''''$ , 而由  $\varepsilon$  的取值易知:  $P''''$  为正定的, 从而  $P$  是正定的. □

References

- 1 Artstein Z. Stabilizations with relaxed controls. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1983, **7**(11): 1163~1173
- 2 Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(11): 1241~1253
- 3 Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: Wiley, 1995. 576
- 4 Khalil H K. *Nonlinear Systems (Third Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 750
- 5 Isidori A. *Nonlinear Control Systems (Third Edition)*. London: Springer-Verlag, 1995
- 6 Kokotovic P V, Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective. *Automatica*, 2001, **37**(5): 637~662
- 7 Kou S R, Elliott D L, Tarn T J. Exponential observers for nonlinear dynamic systems. *Information and Control*, 1975, **29**(2): 204~216

- 8 Krener A J, Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and Control Letters*, 1983, **3**(1): 47~52
- 9 Arcak M, Kokotovic P V. Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 2001, **37**(12): 1923~1930
- 10 Arcak M, Kokotovic P V. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(7): 1146~1150
- 11 Fan X Z, Arcak M. Observer design for systems with multi-variable monotone nonlinearities. *Systems and Control Letters*, 2003, **50**(4): 319~330
- 12 Marino R, Tomei P. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*. London: Prentice-Hall, 1995
- 13 Mazenc F, Praly L, Dayawansa W P. Global stabilization by output feedback: examples and counterexamples. *Systems and Control Letters*, 1994, **23**(2): 119~125
- 14 Krishnamurthy P, Khorrami F. Global adaptive output feedback tracking for nonlinear systems linear in unmeasured states. In: Proceedings of American Control Conference. Arlington, USA: IEEE, 2001. 4814~4819
- 15 Qian C J, Lin W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(10): 1710~1715
- 16 Choi H L, Lim J T. Stabilization of a class of nonlinear systems by adaptive output feedback. *Automatica*, 2005, **41**(6): 1091~1097
- 17 Yang B, Lin W. Robust output feedback stabilization of uncertain nonlinear systems with uncontrollable and unobservable linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(5): 619~630
- 18 Praly L, Jiang Z P. Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 2004, **53**(2): 107~116
- 19 Chen Z Y, Huang J. Global output feedback stabilization for uncertain nonlinear systems with output dependent incremental rate. In: Proceedings of American Control Conference. Boston, USA: IEEE, 2004. 3047~3052

尚 芳 2004 年获山东大学学士学位. 现为山东大学控制科学与工程学院博士研究生. 主要研究方向为非线性输出反馈控制, 自适应控制理论.  
E-mail: shangfang@mail.sdu.edu.cn

(SHANG Fang Received her bachelor's degree at Shandong University in 2004. Now she is a Ph.D. candidate at School of Control Science and Engineering, Shandong University. Her research interest covers nonlinear output feedback control and adaptive control theory.)

刘允刚 山东大学控制科学与工程学院教授. 主要研究方向为随机控制、非线性系统分析、自适应控制. 本文通信作者.

E-mail: lygfr@sdu.edu.cn

(LIU Yun-Gang Professor at School of Control Science and Engineering, Shandong University. His research interest covers stochastic control, nonlinear system analysis, and adaptive control. Corresponding author of this paper.)

张承慧 山东大学控制与科学工程学院教授. 主要研究方向为工程优化控制、自适应控制、电气传动自动化及电力电子技术.

E-mail: zchui@sdu.edu.cn

(ZHANG Cheng-Hui Professor at School of Control Science and Engineering, Shandong University. His research interest covers engineering optimization control, adaptive control, and power electronic and motion control.)