

# 相位的可辨识性及极大似然反褶积<sup>1)</sup>

褚家晋 王英  
(清华大学)

## 摘 要

本文所述系统有两个特点：输入为不可量测的随机信号；系统可以具有不稳定的零点或者说系统可以是非最小相位的。文中研究了将一类输入信号与具有正确相位的脉冲响应从输出信号中分开的条件，并对以状态空间模型为基础的极大似然反褶积方法进行了改进。利用合成数据进行了仿真研究，仿真结果验证了非最小相位系统的可辨识性。

**关键词** —— 系统辨识, 参数估计, 反褶积, 相位可辨识性, 信号处理。

## 一、引 言

在地震信号处理领域,如认为地下是由水平层状的无损介质构成,则可用离散化模型

$$y(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\tau)\mu(t-\tau), \quad (1)$$

$$z(t) = y(t) + n(t) \quad (2)$$

来描述系统。其中,子波  $h(t)$  是一个确定性信号;反射率序列  $\mu(t)$  是一个随机信号;  $z(t)$  和  $n(t)$  分别为量测输出和干扰。我们应解决的问题是从已知的  $z(t)$  中将  $h(t)$  和  $\mu(t)$  提取出来。通常称这个过程为反褶积。反褶积是油气勘探中提高分辨率的一种重要方法。

传统的反褶积方法<sup>[1]</sup>基于平稳过程的谱分解定理,估计的子波均是最小相位的。近十年来,根据实际问题的需要,研究非最小相位条件下的反褶积方法已引起重视。得到正确相位的子波有利于提高分辨率及进行岩性勘探。

目前,对相位可辨识性及辨识方法的研究多以  $\mu(t)$  平稳具有非高斯分布为基础<sup>[2-5]</sup>,由于地下构造的复杂性,我们认为其非平稳性也是一个应当考虑的因素。极大似然反褶积<sup>[6]</sup>以状态空间模型为基础进行平滑和滤波。根据子波和反射率序列的特点,文中将子波视为系统脉冲响应,反射率序列视为不可量测的随机输入。

## 二、相位的可辨识性

相位的可辨识性取决于输入信号的类型。当输入是高斯白噪音时,从输出信号的统

本文于1987年1月21日收到。

1) 国家教委科学基金资助的课题。

计特征中不能获得系统脉冲响应的相位信息;当输入是非高斯白噪音时,从输出的统计特征中可获取相位信息<sup>[4,5]</sup>.

当输入是非平稳序列时, Kormylo<sup>[6]</sup> 针对一类特殊的输入信号给出了相位可辨识性定理及辨识方法. 考虑到许多系统可以认为是在零初始条件下激励的, 而且在过渡过程这一段时间内是非平稳的, 我们<sup>[7]</sup>证明了下述定理:

**定理.** 已知  $\mu(t)$  为零均值单边白噪音 ( $t$  小于零时其值为零), 因果稳定的系统在零初始条件下被  $\mu(t)$  激励, 如果能将  $y(t)$  分解为

$$y(t) = h_1(t) * \mu_1(t), \quad (3)$$

$$y(t) = h_2(t) * \mu_2(t), \quad (4)$$

则

$$h_2(t) = ch_1(t). \quad (5)$$

其中  $c$  为一个常数因子, 因此如不计常数乘积因子则分解是唯一的.

定理中利用了零初始条件及系统过渡过程阶段的非平稳性, 因此必须用多次实现来估计  $h(t)$ . 根据定理的证明我们有

**推论.** 满足定理所给条件的系统在已知其输出功率谱及输出一次实现的条件下, 如不计常数因子  $c$  则可以唯一地得到  $h(t)$ .

利用脉冲响应的因果性及输入、输出信号的单边性即可证明该推论, 这里从略. 量测噪音的存在及功率谱估计的不准确会给应用推论中的结果带来困难, 因篇幅所限, 省去仿真结果.

### 三、极大似然反褶积

由于  $h(t)$  是一个能量有限随时间衰减的信号, 因此可用 ARMA 参数表示

$$\begin{aligned} h(t) + a_1 h(t-1) + \dots + a_n h(t-n) \\ = b_0 \delta(t) + b_1 \delta(t-1) + \dots + b_{n-1} \delta(t-n+1). \end{aligned} \quad (6)$$

由此可得到系统的能控标准形状态空间方程

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t-1) + B\mu(t), \quad (7)$$

$$z(t) = C\mathbf{x}(t) + n(t). \quad (8)$$

假定

$$\mu(t) = r(t)q(t). \quad (9)$$

其中  $r(t)$  服从高斯分布,  $q(t)$  为伯努利序列. 则在  $q(t)$  已知的条件下,  $z(t)$  服从高斯分布. 用极大似然法推得目标函数

$$J(\theta) = - \left[ \sum_{k=1}^N (\tilde{z}_{k/k-1})^2 / \eta_k + \ln(\eta_k) \right] / N. \quad (10)$$

其中  $N$  为采样点个数;  $\tilde{z}_{k/k-1}$  为新息序列, 其方差为  $\eta_k$ ; 参数矢量  $\theta = [a_n \dots a_1 b_{n-1} \dots$

1) 王英, 非最小相位子波估计——极大似然反褶积, 清华大学硕士论文, 1984.

$b_0]^\top$ . 选择  $\theta$  使(10)式达最大值即得到了参数估计值, 利用(6)式则可得到  $h(t)$  的估值.

对  $\theta$  的估计是一个非线性寻优过程, 利用敏感函数法求梯度及二阶导数<sup>[6]</sup>. 考虑到滤波的稳定性, 我们采用了  $U-D$  分解算法. 在实现该算法时进一步做了如下改进: 模型阶次  $n$  及初始参数的估计, 请见附录 1; 去掉稳定这一约束条件给寻优带来的不便, 采用了一种变换, 将稳定域变换到整个实空间, 请见附录 2; 当  $q(t)$  序列未知时, 需同时估计参数及检测  $q(t)$ . 我们舍弃了原文<sup>[6]</sup>中的检测方法, 这是因为原方法计算量大且效果不理想, 为此设计了二步门槛检测器. 第一步, 选择常数  $c_1 > 0$  得到

$$q_1(t) = \begin{cases} \hat{\mu}(t), & |\hat{\mu}(t)| > c_1, \\ 0, & |\hat{\mu}(t)| \leq c_1. \end{cases} \quad (11)$$

$\hat{\mu}(t)$  由固定区间的平滑器给出. 第二步, 首先将  $q_1(t)$  中连续的正值进行平方求和并将此值放在该区域的最大值位置, 对负值进行同样的运算, 将平方和放在绝对值最大处, 这个过程在整个采样区间上进行, 非极值处赋零, 得到了新的序列  $q_2(t)$ ; 选择常数  $c_2 > 0$  得到估值

$$\hat{q}(t) = \begin{cases} 1, & |q_2(t)| > c_2, \\ 0, & |q_2(t)| \leq c_2. \end{cases} \quad (12)$$

实现极大似然反褶积方法的程序框图已在作者硕士论文“非最小相位子波估计-极大似然反褶积”中给出.

## 四、仿真结果

由于篇幅所限, 这里仅给出几个典型的例子. 首先给出几个参数的定义. 定义  $R$  为干扰噪音  $n(t)$  的方差,  $P$  为  $q(t)$  等于 1 的概率. 波形相似度定义为

$$S = \frac{\sum_i h(t)\hat{h}(t)}{\left[\sum_i h^2(t)\right]^{1/2} \left[\sum_i \hat{h}^2(t)\right]^{1/2}}.$$

$S$  的直接接近 1 表明真实波形与估计的波形相似程度高. 在整个仿真过程中均取  $r(t)$  的方差等于 0.05.

图 1 所示的脉冲响应由 4 阶 ARMA 模型

$$\begin{aligned} h(t) &= 2.3h(t-1) + 1.8h(t-2) - 0.50h(t-3) + 0.046h(t-4) \\ &= -0.76\delta(t) + 1.6\delta(t-1) - 0.82\delta(t-2) + 0.00022\delta(t-3) \end{aligned}$$

给出. 在  $P = 0.2$ ,  $R = 0.002$  的条件下产生合成数据所估计的脉冲响应绘于图 2. 波形相似度的值为  $S = 0.997$ . 真实的系统和估计的系统均有一个不稳定的零点. 为书写方便, 我们只给出估计的参数省略符号  $\hat{h}(\cdot)$  和  $\delta(\cdot)$ , 参数估值为  $-2.76$ ,  $2.90$ ,  $-1.37$ ,  $0.259$ ,  $-0.800$ ,  $2.03$ ,  $-1.63$ ,  $0.398$ .

下面给出  $P$  值增大对估计结果的影响.  $P = 0.8$ ,  $R = 0.002$ , 估计的脉冲响应绘于图 3. 波形相似度的值为  $S = 0.993$ , 参数估值为  $-2.38$ ,  $2.03$ ,  $-0.696$ ,  $0.0884$ ,  $-0.721$ ,  $1.59$ ,  $-0.980$ ,  $0.114$ .

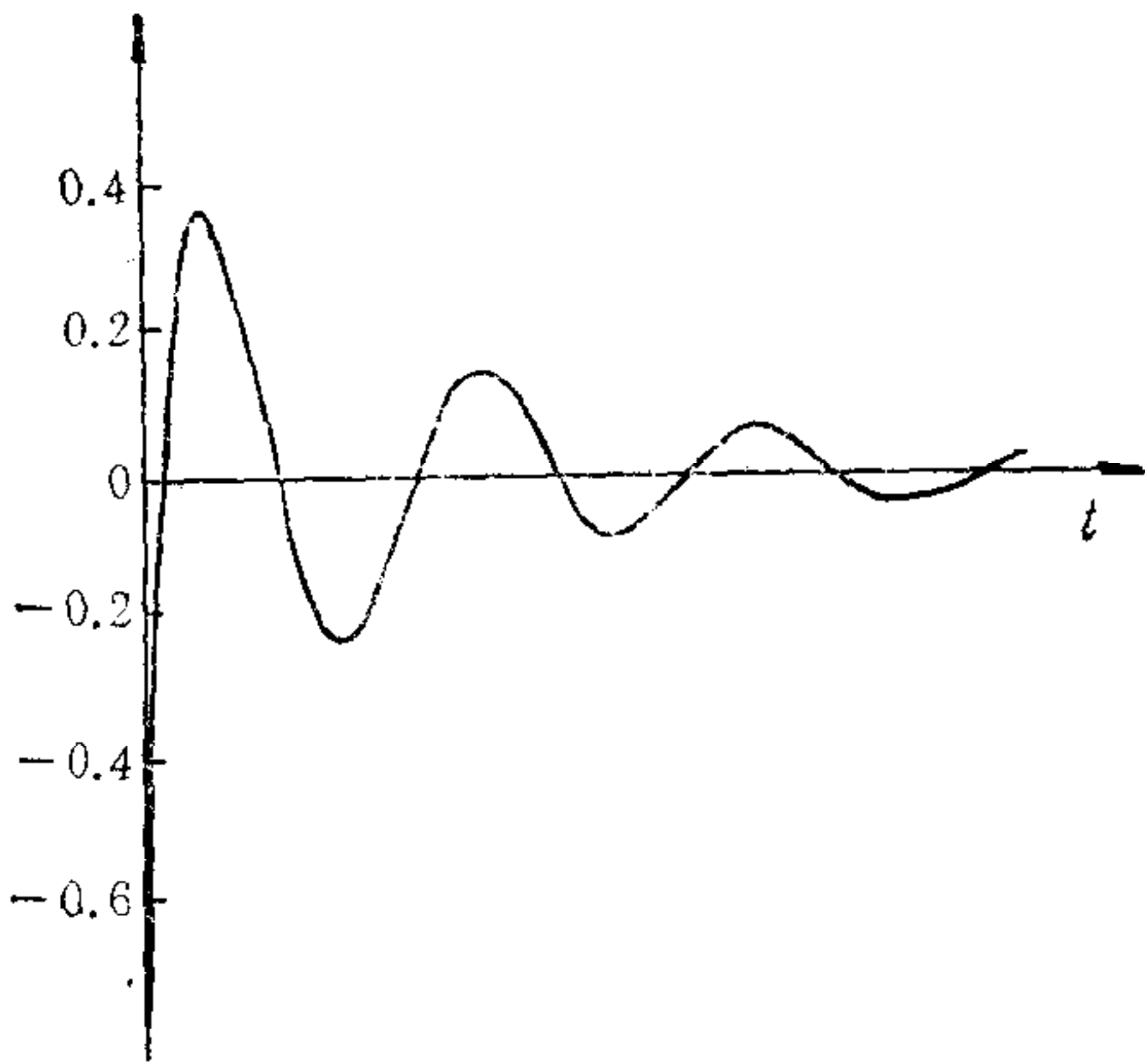


图 1

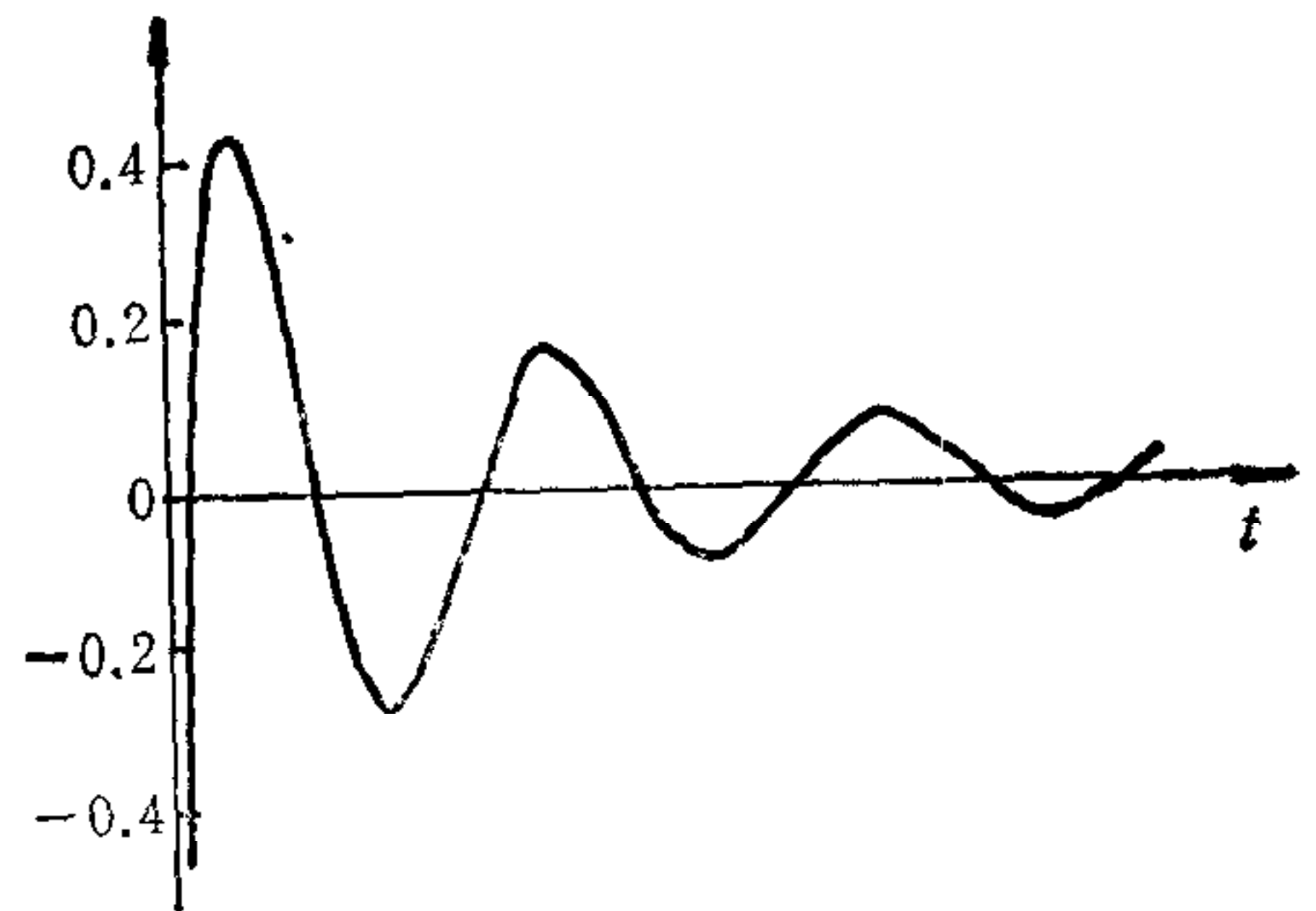


图 2

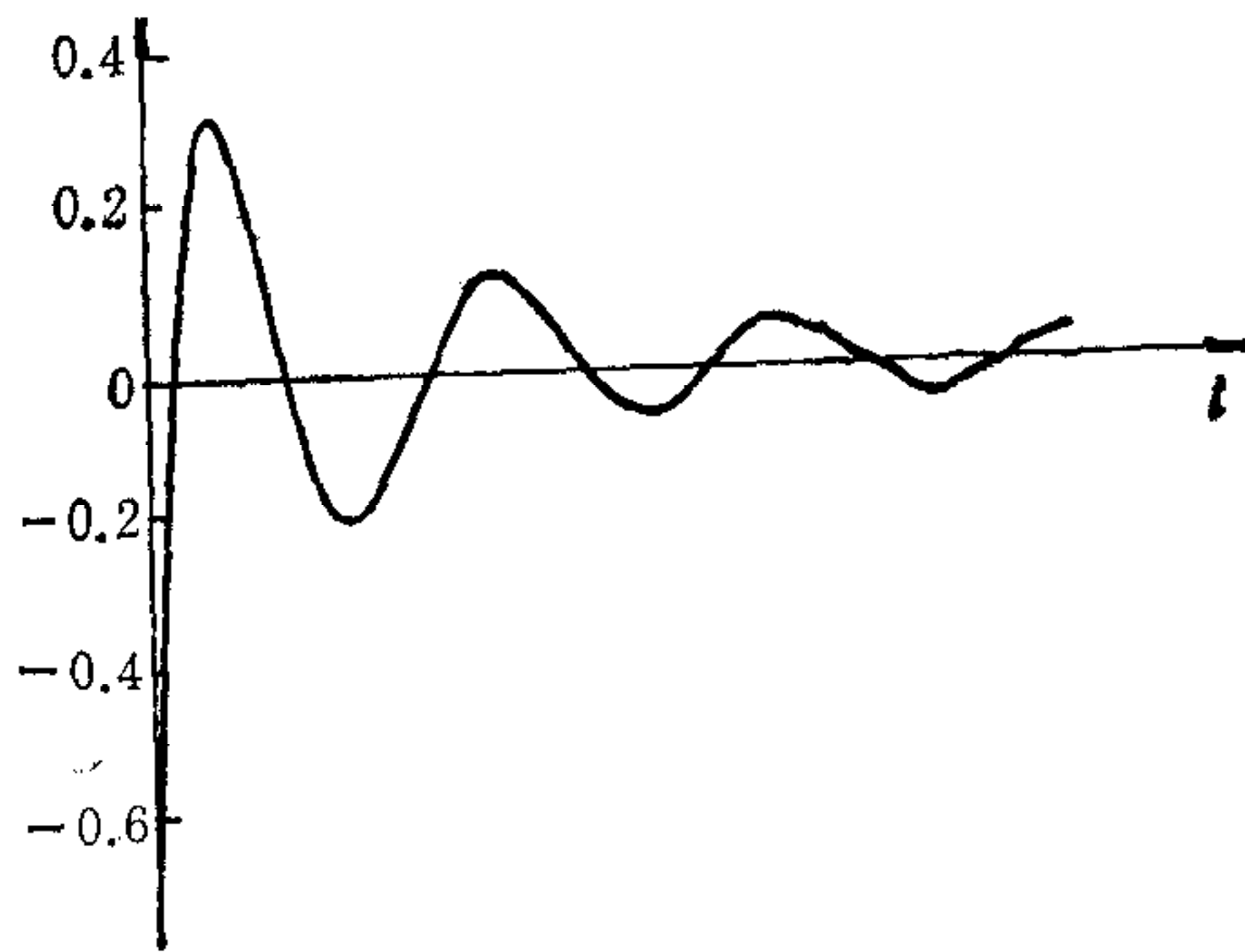


图 3

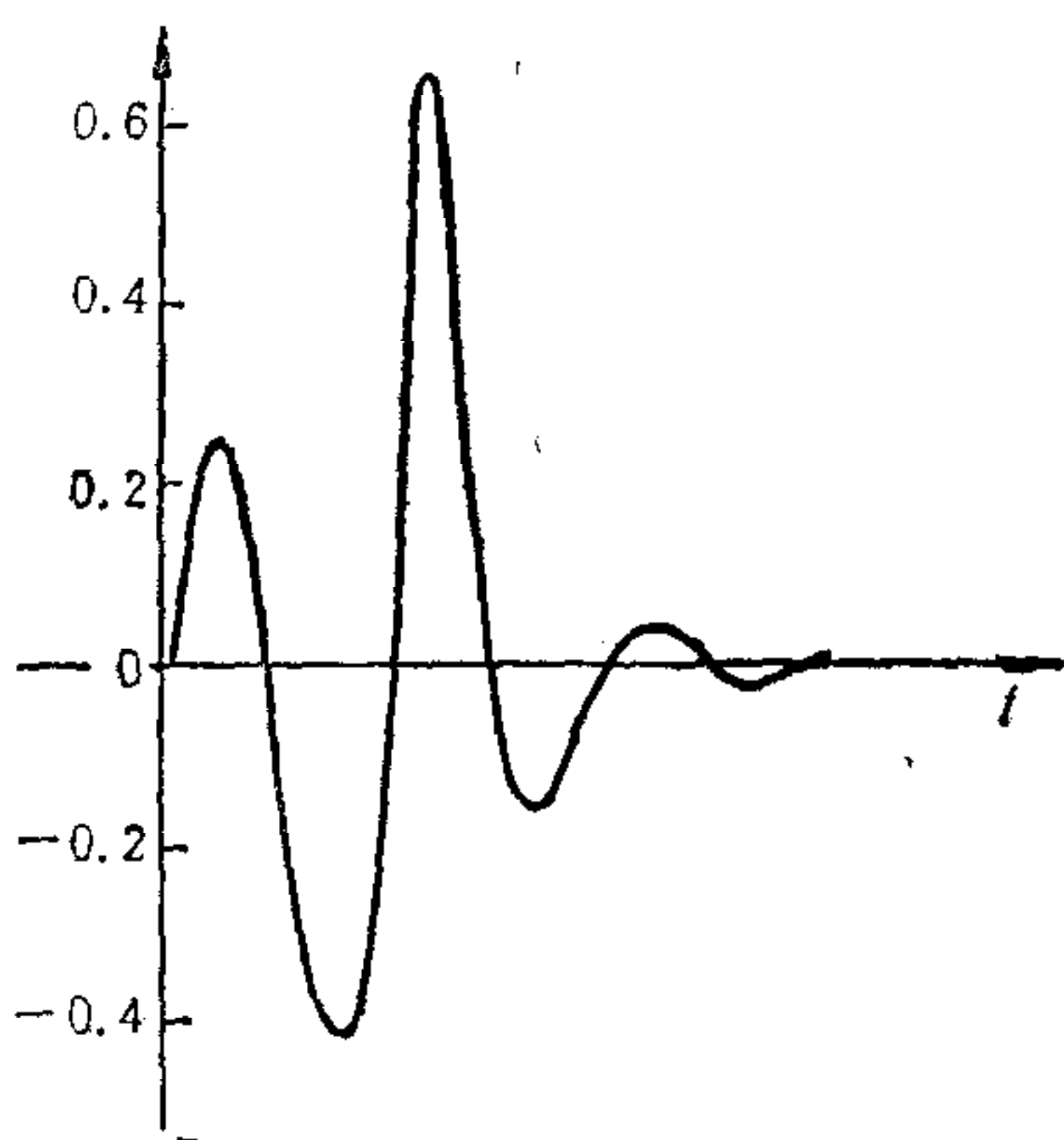


图 4

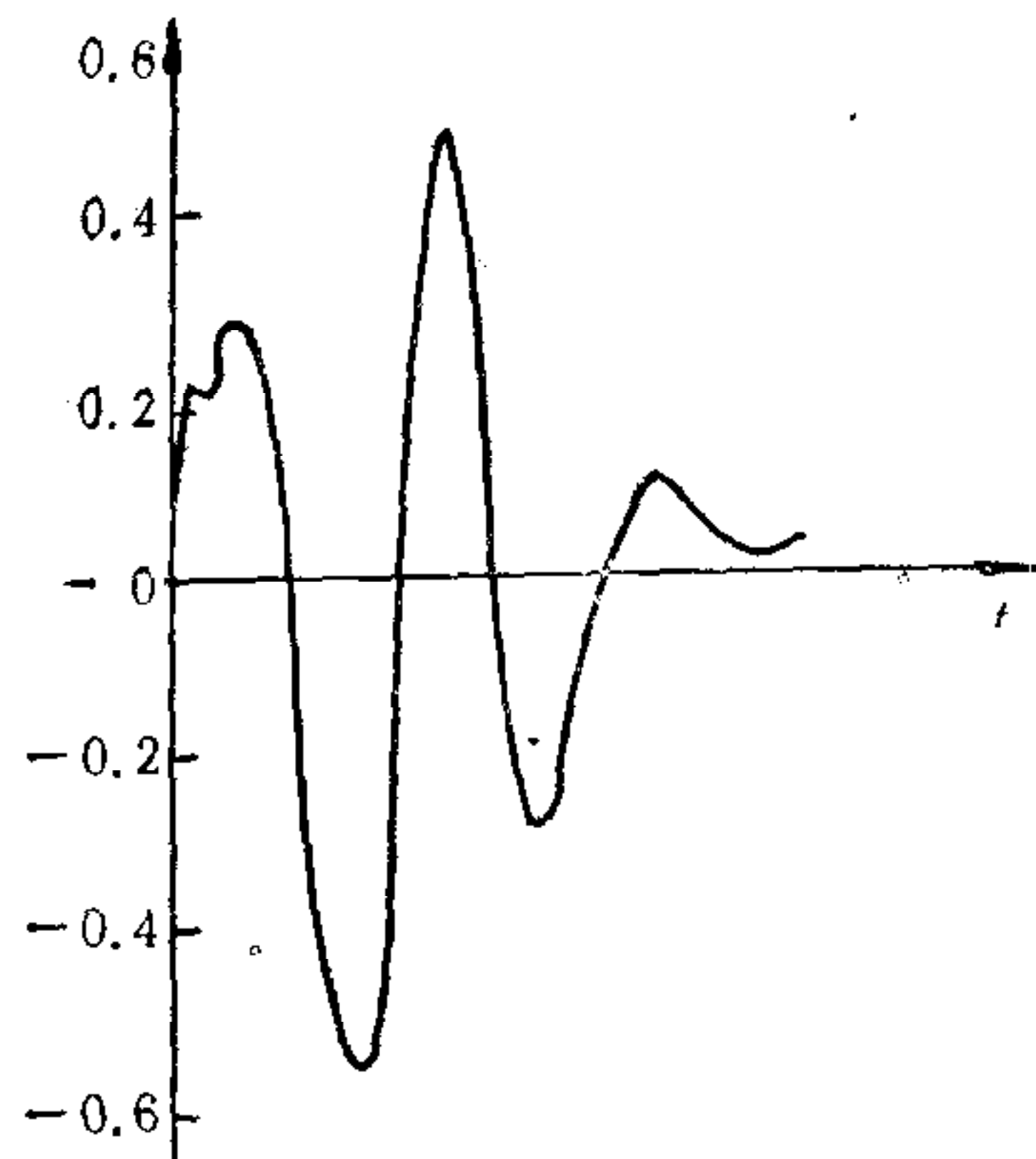


图 5

图 4 所绘出的脉冲响应由下述公式给出,

$$h(t) = ae^{-\alpha_1(t-t_0)} \sin \omega t, t < t_0,$$

$$h(t) = ae^{-\alpha_2(t-t_0)} \sin \omega t, t \geq t_0.$$

取采样间隔等于 4 毫秒,  $a = 0.7$ ,  $\alpha_1 = 20$ ,  $\alpha_2 = 50$ ,  $\omega = 40\pi$ ,  $t_0 = 60\text{ms}$ . 由该脉冲响

应在  $P = 0.2$ ,  $R = 0.0002$  的条件下产生合成数据。估计的阶次  $\hat{n} = 6$ , 估计的 ARMA 参数为:  $-2.58, 2.88, -1.96, 1.51, -1.17, 0.459, 0.208, -0.350, 0.398, -0.292, 0.224, -0.158$ 。波形相似度  $S = 0.87$ 。估计的系统有两个不稳定的零点。

大量仿真表明极大似然反褶积方法具有一定的抗噪能力。 $P$  值在一定范围变化对估计脉冲响应的相位影响不大。当  $P = 1$  时, 实验表明该方法只能估计一个最小相位的脉冲响应。当脉冲响应不是由真正的 ARMA 模型给出时, 为保证估计精度, 需提高模型阶次。这使得运算量增加。因此还需对该方法进行改进。

## 五、结 论

当输入为不可量测的随机信号时, 非最小相位系统的相位在以下两种情况下是可以辨识的: 输入为平稳非高斯信号; 输入为任意分布的非平稳信号。本文已经证明了一种特殊情况下的可辨识性, 一般性证明将在以后文章中给出。

为解决地震信号处理中的实际问题, 我们用极大似然反褶积方法做了仿真研究。为克服该方法的缺点我们将做如下改进工作:

① 在 ARMA 模型中, AR 部分用低阶次, MA 部分用高阶次, 以降低模型误差及减少待估计参数的个数。

② 以新息序列的平方和为准则, 保证近似得到的二阶导数矩阵为正定的。

③ 改进初始参数的估计方法, 并对系统在不同相位下进行测试, 以得到良好的初值加快收敛速度。

### 附录1. 模型阶次及初始参数估计

根据(6)式, 可以推证输出信号的自相关函数满足

$$R(t) + a_1 R(t-1) + \dots + a_n R(t-n) = 0, \quad t \geq n. \quad (13)$$

因此矩阵

$$M_k = \begin{bmatrix} R(k) & R(k-1) \dots R(0) \\ R(k+1) & R(k) \dots R(1) \\ \dots & \dots \\ R(2k) & R(2k-1) \dots R(k) \end{bmatrix}$$

的秩为  $n (k \geq n)$ 。选择  $k$  足够大, 通过判矩阵  $M_k$  的秩即得到了系统阶次  $n$ 。在(13)式中令  $t$  从  $n$  变到  $L$  (自相关序列的长度), 得到一组超定方程, 解该方程组则得到了 AR 部分的参数。求取与  $R(t)$  对应的最小相位脉冲响应  $h_{\min}(t)$ , 则由(6)式可得到 MA 部分的初始估值。实际上, 我们不能精确地得到自相关序列, 所能依赖的只是量测输出  $z(t)$ 。为此我们用采样自相关

$$\hat{R}(t) = \frac{1}{N} \sum_k z(k) z(t+k)$$

代替其真值估计初始参数及模型阶次。此时  $M_k$  矩阵的秩会大于  $n$ 。考虑到数值稳定性, 对  $M_k$  矩阵进行奇异值分解得奇异值

$$s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k \geq 0.$$

模型阶次  $n$  的估值满足

$$s_t < \epsilon s_0, \quad t \geq \hat{n}.$$

## 附录2. 参数稳定性变换

在寻优过程中应保证多项式

$$1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$$

的零点在  $z$  平面单位圆内, 即应保持系统稳定. 对于这样一个有约束的寻优问题, 通过如下变换可以转化为无约束寻优问题.

**定理.** 对任给的  $n$  维实向量  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  代入下述方程进行运算

$$\alpha_j = [1 - e^{-u_j}] / [1 + e^{-u_j}], \quad (2.1)$$

$$f_j^1 = \alpha_j, \quad (2.2)$$

$$f_k^j = f_k^{j-1} - \alpha_j f_{j-k}^{j-1}, \quad k = 1, 2, \dots, j-1. \quad (2.3)$$

$$f_j = f_j^n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

得到了一个新的矢量  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ , 则由其构成的多项式

$$1 - f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2} - \dots - f_n z^{-n}$$

的零点在  $z$  平面单位圆内.

用矩阵表示(2.2)及(2.3)式并求逆可得

$$f_k^{j-1} = \frac{1}{1 - \alpha_j^2} (f_k^j + \alpha_j f_{j-k}^j), \quad (2.5)$$

$$k = 1, 2, \dots, j-1, \quad j = n, n-1, \dots, 2,$$

$$\alpha_j = f_j^1, \quad j = n, n-1, \dots, 1, \quad (2.6)$$

$$f_k^n = f_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

$$u_j = \ln[(1 + \alpha_j)/(1 - \alpha_j)], \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

这样(2.5)—(2.8)式构成了(2.1)—(2.4)式的反变换. 令  $f_j = -a_j (j = 1, \dots, n)$ , 则利用(2.1)—(2.8)式可以实现矢量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{a}$  之间的互相转换. 对新的参数矢量  $\mathbf{p} = (u_1, \dots, u_n, b_{n-1}, \dots, b_1)$  进行寻优, 可以保证系统的稳定性.

感谢常迴教授和阎平凡副教授给予的帮助.

## 参 考 文 献

- [1] Robinson, E. A., Predictive Deconvolution of Time Series with Application to Seismic Exploration, *Geophysics*, 32(1967), 478—484.
- [2] Scargle, J. D., Phase-sensitive Deconvolution to Model Random Process, *Applied Time Series Analysis II*, Academic Press, 1981, 549—564.
- [3] Benveniste, A. M., M. Gourst and G. Ruget, Robust Identification of a Nonminimum Phase: Blind Adjust of Linear Equalizer in Data Communication, *IEEE Trans. AC-25*(1980), No. 3.
- [4] Lii, K. J. and M. Rosenblatt, Deconvolution and Estimation of Transfer Function Phase and Coefficients for Non-Gaussian Linear Process, *The Annals of Statistics*, 10(1982), No.4.
- [5] Donoho, D., On Minimum Entropy Deconvolution, *Applied Time Series Analysis II*, Academic Press, 1981.
- [6] Kormylo, J. J., Maximum-likelihood Seismic Deconvolution, Ph. D. disser., Univ. of Southern California, 1979.
- [7] Chu Jia-Jin and Wang Ying, Parameter Estimation and Identification of Non-minimum Phase Linear Stochastic Systems, *IFAC Identification and System Parameter Estimation 1985*, York, UK.

## IDENTIFIABILITY OF THE PHASE AND MAXIMUM- LIKELIHOOD DECONVOLUTION

CHU JIAJIN WANG YING

(Tsinghua University)

### ABSTRACT

The system studied here is a non-minimum phase system whose input is an unmeasurable random signal. The condition is investigated, under which the input and the impulse response of a non-minimum phase system can be correctly extracted from the output. The maximum-likelihood deconvolution method based on state space model is improved in this paper. The identifiability of the non-minimum phase system is verified by the simulation results.

**Key words** ——System identification; Parameter estimation; deconvolution; phase identifiability; signal processing.

---

### 编辑部启事

为了扩大《自动化学报》在国外的影响,更广泛地进行学术交流,本刊已与国外有关出版单位商定,从1989年开始,在美国出版英文期刊《Chinese Journal of Automation》。该刊所需稿件系由《自动化学报》编委会从《自动化学报》已发表的论文和短文中推荐。稿件由中文翻译成英文的问题请作者本人解决。所推荐的稿件是否能在国外发表,目前主要取决于翻译质量。这项工作已经开始,编辑部已收到的一些译稿中,大部分翻译质量好,有少数稿件语法、拼写错误较多。由于从选定文章到向国外发稿之间的期限较短,加之编辑部在审稿方面的人力财力有限,请各位作者协助编委会工作,确保翻译质量。对于问题较多的译稿则无法向国外推荐,请予谅解。希望作者从文章被接受在本刊发表之日起,便着手考虑翻译问题,以便为日后提供英文稿创造条件。