

小波变换在故障检测中的应用¹⁾

叶 昊 王桂增 方崇智

(清华大学自动化系 北京 100084)

摘 要 提出一种基于小波分析的动态系统故障检测方法. 该方法不需要模型, 具有灵敏度高、克服噪声能力强的特点. 仿真研究取得了满意的效果.

关键词 小波变换, 故障检测.

1 前言

小波变换是一种信号的时间-尺度(时间-频率)分析方法, 它具有多分辨率分析的特点, 而且在时频两域都具有表征信号局部特征的能力, 被誉为分析信号的显微镜. 小波变换在信号处理、图像压缩、语音识别、多尺度系统理论、生物医学工程许多领域中得到了广泛应用. 本文利用连续小波变换进行动态系统故障检测, 取得了满意的效果.

2 小波变换简介

2.1 连续小波变换的定义及特性

信号 $x(t)$ 的连续小波变换定义为

$$WTx(a, t) = \frac{1}{a} \int x(\tau) \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau, \quad [1] \quad \text{简记为 } WT_a x(t) = x(t) * \psi_a(t).$$

其中 $*$ 为卷积, a 为尺度因子, $\psi_a(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$ 是基本小波 $\psi(t)$ 在尺度上的伸缩.

小波变换通过 $\psi(t)$ 在尺度上的伸缩和时域上的平移来分析信号, 是一种时间-尺度分析. 适当地选择 $\psi(t)$, 可以使 $\psi_a(t)$ 及其付氏变换 (FT) $\Psi_a(\omega)$ 同时具有较好的局部性^[2], 因此小波变换也是一种时间-频率分析. 尺度 a 增大时, $\psi_a(t)$ 在时域上伸展, 变换的时域分辨率降低, $\Psi_a(\omega)$ 在频域上收缩, 其中心频率降低, 变换的频域分辨率升高; 相反, 当 a 减小时, 变换的时域分辨率升高, 频域分辨率降低. 所以, 小波变换可以根据 $\Psi_a(\omega)$ 的中心频率的高低改变时频分辨率, 而其品质因数保持不变^[3].

2.2 利用连续小波变换进行信号检测的基本原理

预备定理. 对于平稳随机信号 $x(t)$, 其小波变换 $WT_a x(t)$ 的均值为零, 方差随着尺度 a 的增大而趋于零(证明见附录 A).

1) 利用小波变换的极值可以检测信号的边沿.

1) 得到国家自然科学基金的资助.

定义 $\psi(t)$ 为高斯低通函数 $\theta(t)$ 的一阶导数, 令 $\theta_a(t) = \frac{1}{a}\theta\left(\frac{t}{a}\right)$, 则

$$\psi_a(t) = a \frac{d\theta_a(t)}{dt}, \quad WT_a x(t) = x(t) * a \frac{d\theta_a(t)}{dt} = a \frac{d}{dt}[x(t) * \theta_a(t)].$$

可见, $x(t)$ 的小波变换等价于先对 $x(t)$ 进行低通滤波, 然后求导, $WT_a x(t)$ 的极值点对应于平滑后信号的拐点. 因此, 利用小波变换的极值可以检测信号的边沿^[4].

2) 利用小波变换可以抑制噪声.

通常, 被检测的观察值由确定性信号和平稳噪声叠加而成, 其小波变换是两部分信号的小波变换之和. 其中确定性信号边沿对应的小波变换的极值随着尺度的增大将增大或缓慢衰减; 而根据预备定理, 平稳噪声作为平稳随机信号的一种特例, 其小波变换的极值随着尺度的增大将迅速衰减. 所以, 在大尺度下, 观察值的小波变换中的极值点将主要属于有用信号的边沿^{[1], 1)}. 从而, 可以对有用信号的边沿和噪声加以区分.

3) 利用小波变换可以检测随机信号均值的突变.

假设随机信号 $x(t) = m_x(t) + e(t)$, $m_x(t)$ 是其均值, $e(t)$ 是平稳噪声. 则可以用(2)中的方法来检测 $m_x(t)$ 的突变并抑制 $e(t)$ 的影响.

3 利用小波变换进行动态系统故障检测

3.1 问题描述

假定被诊断对象是单输入单输出的线性系统, 并定义故障为系统参数的变化, 即

$$Y(s) = G(s)U(s) + \Delta G(s)U(s) + E(s).$$

其中 $*$ (s) 代表有关信号的拉氏变换; $Y(*), U(*), E(*)$ 分别是输出、输入和平稳随机噪声; $G(S)$ 是系统的传递函数; $\Delta G(S)$ 反映由故障造成的系统参数的变化. 不失一般性, 假定

- (1) $u(t)$ 是已知的分段平稳的随机信号, 而且其突变和故障是在不同时间发生的;
- (2) $G(S)$ 不存在位于原点的极点和零点, 而且有故障时 $\Delta G(0) \neq 0$.

3.2 故障检测

首先介绍一个近似关系, 它是进行故障检测的理论依据(证明见附录 B).

对于 3.1 中定义的系统(满足假定(1), (2)), 当故障没有发生时, $WT_a y(t) \approx K_a WT_a u(t)$ 在较大的尺度 a 下成立. 其中 $|K_a| = |G(\omega_{a0})|$, ω_{a0} 是 $\Psi_a(\omega)$ 的中心频率, 在实

际应用中, 用估计值 $\hat{k} = \frac{\sum_l WT_a y(t) WT_a u(t)}{\sum_l [WT_a u(t)]^2}$ 来代替 K_a , 它是

$J = \min_K \sum_l [WT_a y(t) - K WT_a u(t)]^2$ 的最小二乘解. 则当尺度 a 较大时, $WT_a y(t) - \hat{k} WT_a u(t) \approx 0$.

下面就两种情况进行讨论.

1) $u(t)$ 均值不恒为零.

当 $\Delta G(0) \neq 0$ 时, 系统参数的变化将导致 $y(t)$ 均值的变化. 当然, $u(t)$ 均值的不平稳

1) 杨福生. 信号的时间-频率分析(内部讲义). 清华大学电机系, 1994.

性,也可能导致 $y(t)$ 均值的突变^[5]. 故障检测的关键在于如何检测出 $y(t)$ 的突变并区分导致 $y(t)$ 突变的两种原因. 为此,首先利用 $WT_a u(t)$ 和 $WT_a y(t)$ 分别检测出 $u(t)$ 和 $y(t)$ 中的瞬变边沿(均值突变),然后比较 $WT_a u(t)$ 和 $WT_a y(t)$,去除 $WT_a y(t)$ 中由于 $u(t)$ 突变而造成的极值点,则剩余的 $WT_a y(t)$ 的极值点就对应着系统参数的变化. 令

$$r(t) = WT_a y(t) - \hat{k} WT_a u(t),$$

其中 \hat{k} 的定义见近似关系,它是根据系统正常时的观测数据计算的. 系统未发生故障时,根据近似关系,即使 $u(t)$ 发生了均值突变, $r(t)$ 也会随着 a 的增大而趋于零. 系统发生故障后, $y(t)$ 的均值会发生突变,而 $u(t)$ 在一小段时间内是平稳的(3.1 的假定),则随着 a 的增大, $WT_a y(t)$ 会出现明显的、随尺度增加而增加或缓慢衰减的极值点,而 $WT_a u(t)$ 趋于零,因此 $r(t)$ 也会在各尺度上出现明显的极值点,而且它们不会随着尺度增加迅速衰减.

2) $u(t)$ 均值恒为零.

这时 $y(t)$ 的均值恒为零,系统参数的变化将反映在 $y(t)$ 的方差变化中^[4]. 当然, $u(t)$ 的方差的突变也会引起 $y(t)$ 的方差的变化. 由于小波变换不能直接检测随机信号方差的突变点,令

$$r(t) = |WT_a y(t)| - |\hat{k} WT_a u(t)|,$$

\hat{k} 的含义同上. 根据近似关系,故障未发生时,在较大尺度下,即使 $u(t)$ 的方差发生了突变,也会有 $r(t) \approx 0$. 系统发生故障后,由于 $y(t)$ 的方差的变化, $WT_a y(t)$ 的方差以及 $|WT_a y(t)|$ 的均值也会发生变化,而 $\hat{k} WT_a u(t)$ 在一小段时间内是平稳的(3.1 的假定),则 $|\hat{k} WT_a u(t)|$ 的均值将保持不变,因此 $r(t)$ 的均值将发生变化. 根据 2.2 的讨论,可以进一步利用 $r(t)$ 的小波变换 $WT_a r(t)$ 检测出其均值突变点.

4 仿真实例

4.1 $u(t)$ 均值不恒为零

例 1. 仿真对象采用二阶系统

$$G(s) = \frac{c(s+b)}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

故障前, $a_1 = 6, a_2 = 15.25, c = 5.0, b = 1.0$; 故障后, b 由 1.0 变为 8.0, 其它系数不变. $u(t)$ 采用分段平稳的均匀分布随机信号,其均值在 $t = 40s$ 时由 1.0 变为 0.25, $e(t)$ 采用方差为 0.1 的白噪声, $t = 80s$ 时系统发生故障. 采用 3.2 节的方法(1)进行故障检测.

由图 1, 图 2 可以看出,在所有尺度下, $r(t)$ 在 $t = 80s$ 附近都出现了较大的极值,而且这些极值的大小并没有随着尺度的增大而衰减;其它位置的极值都随着尺度的增大迅速衰减并趋于零(包括 $t = 40s$ 附近的极值点).

4.2 $u(t)$ 均值恒为零

例 2. 仿真对象、噪声 $e(t)$ 及故障类型、大小同例 1, $u(t)$ 采用分段平稳的零均值白噪声,其方差在 $t = 40s$ 时由 1.0 变为 0.5, $t = 80$ 时系统发生故障. 采用 3.2 节的方法(2)进行故障检测.

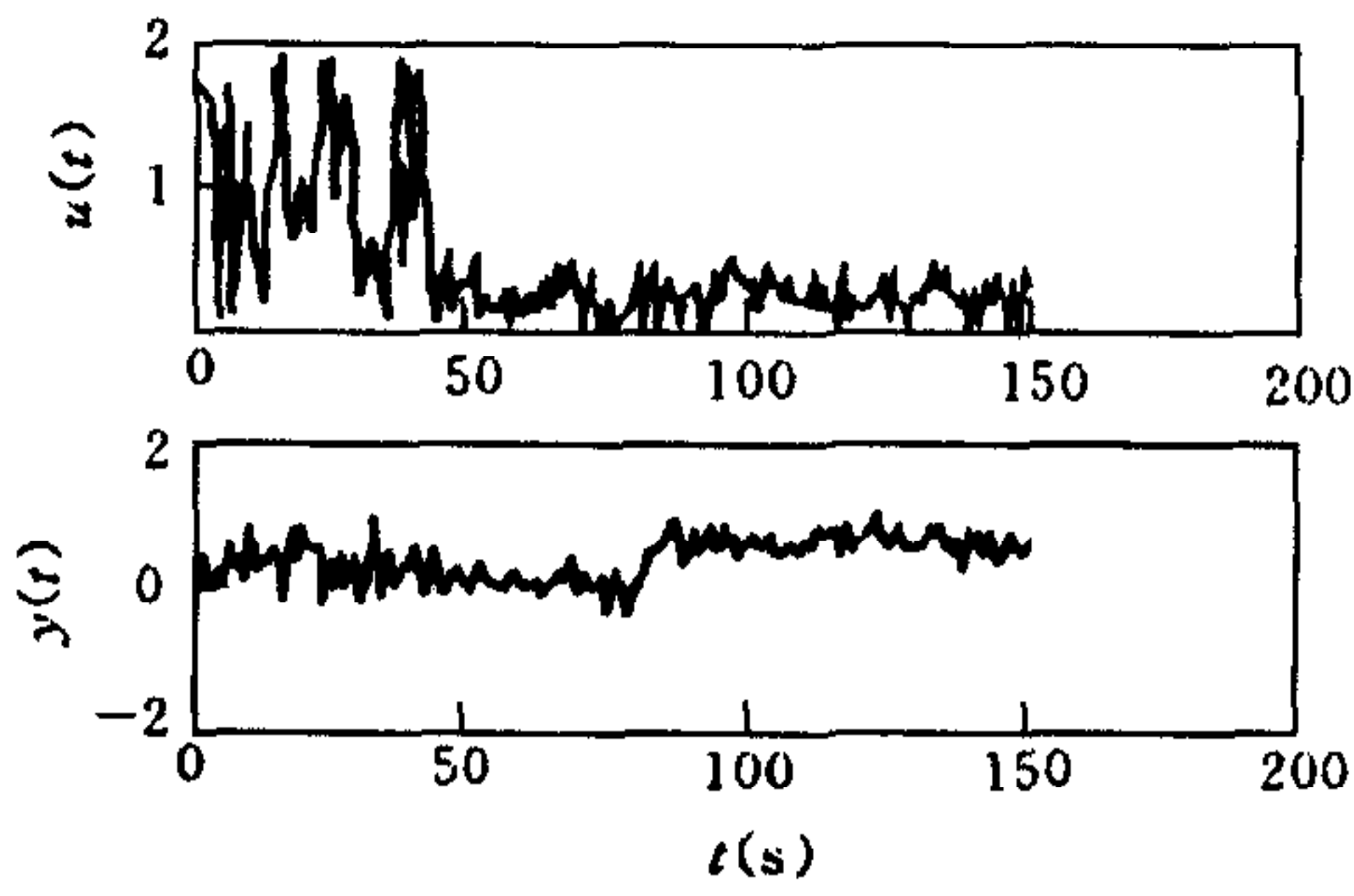


图1 $u(t)$ 和 $y(t)$

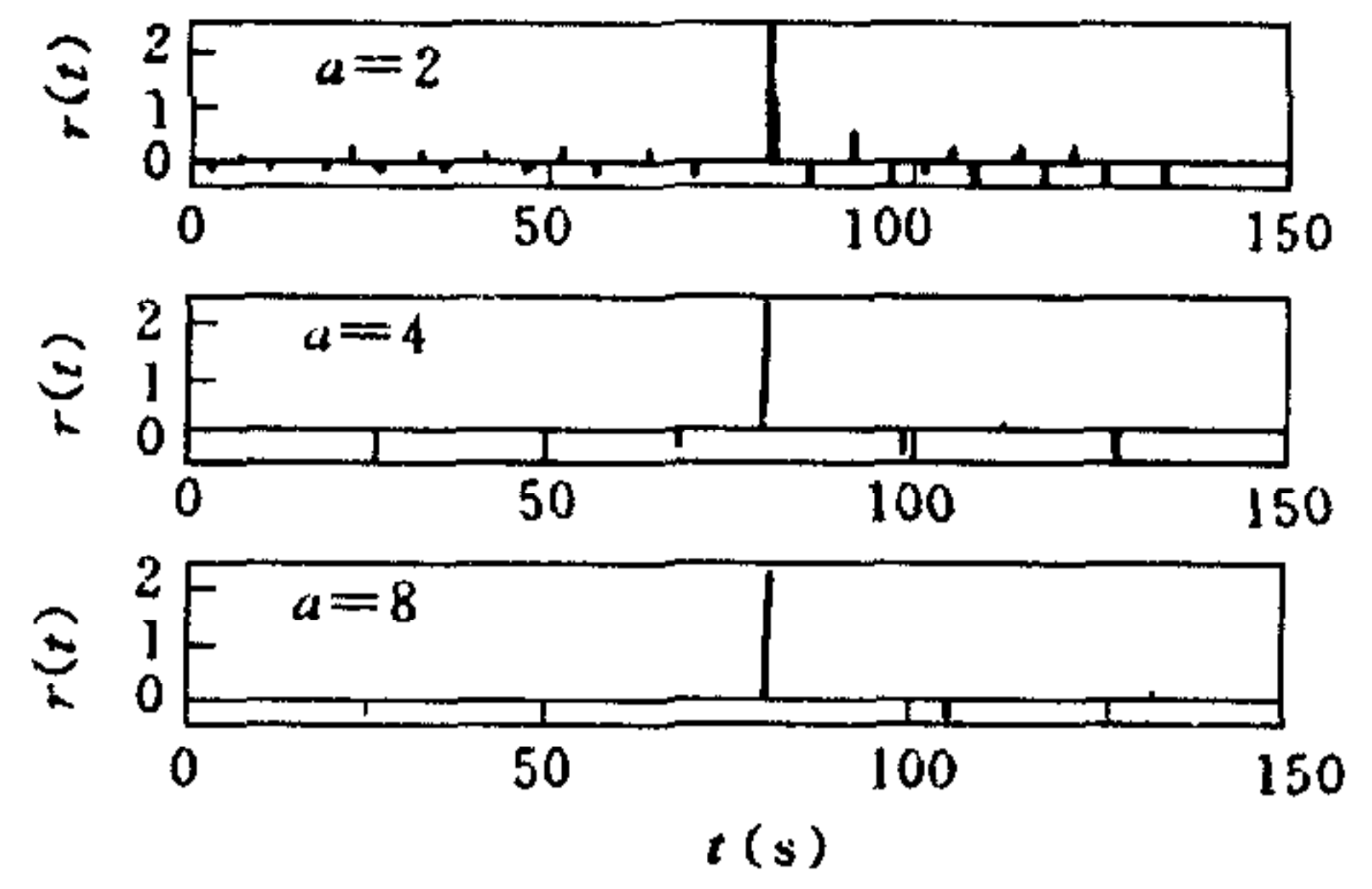


图2 多尺度下 $r(t)$ 的极值图

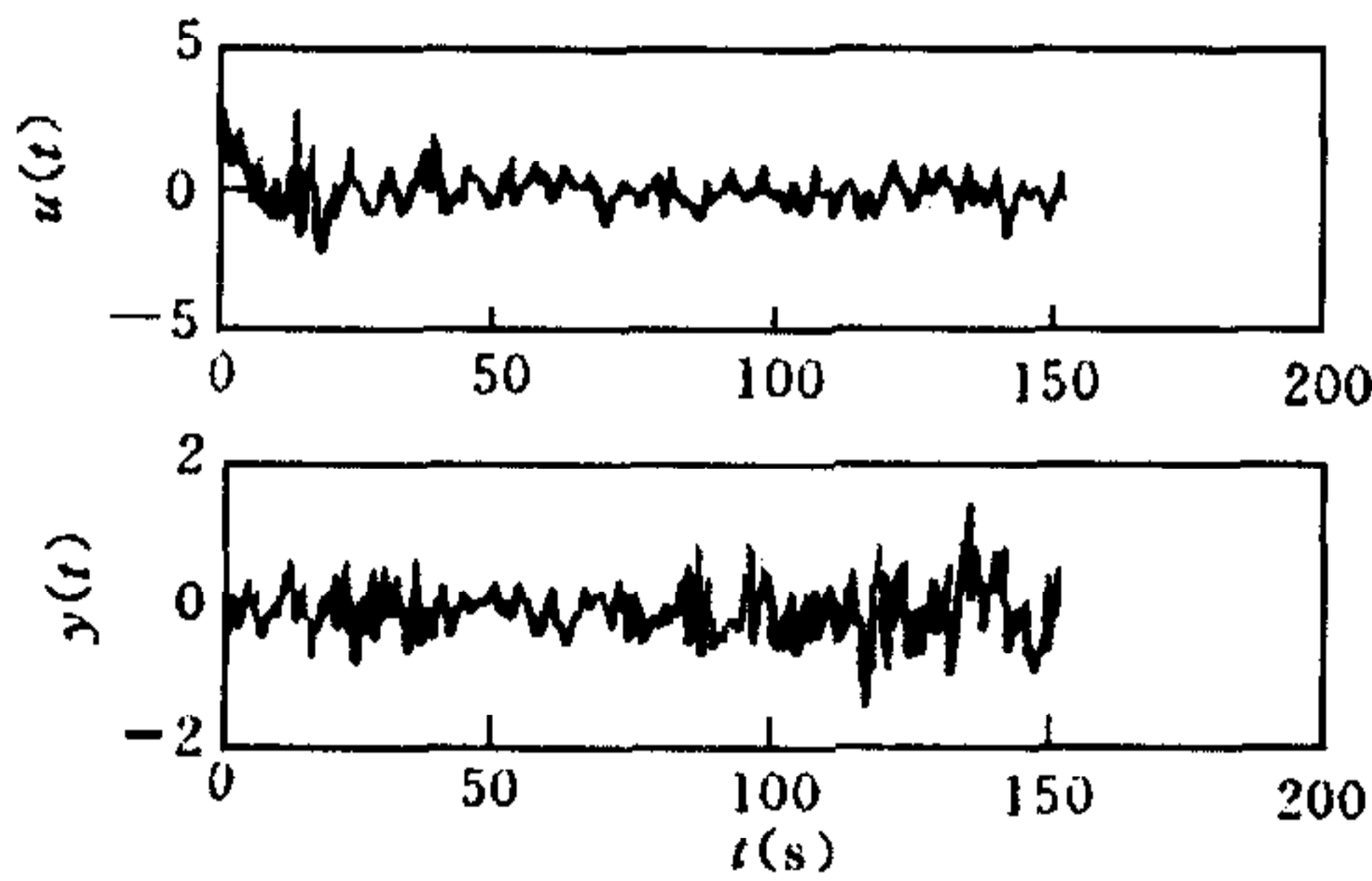


图3 $u(t)$ 和 $y(t)$

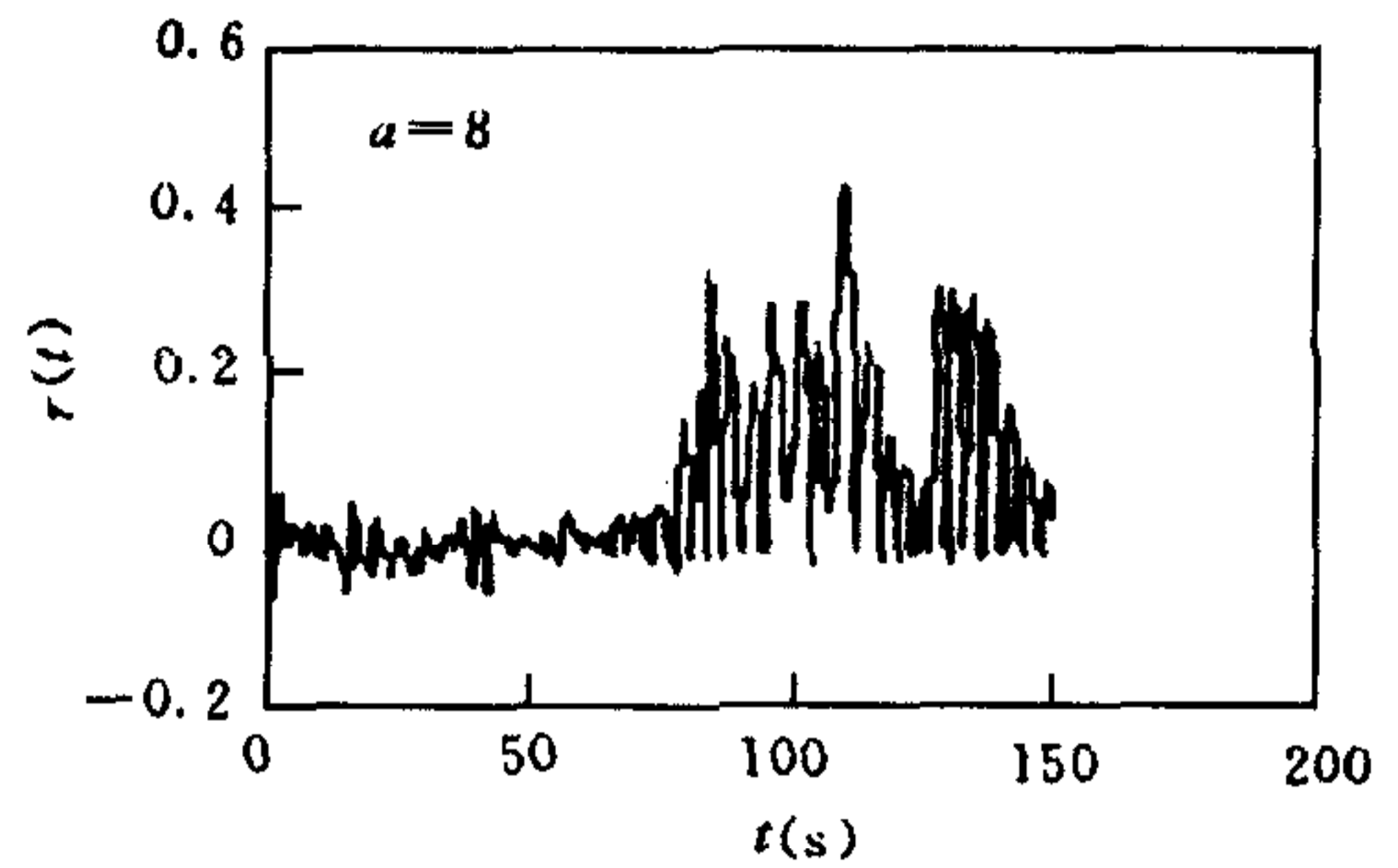


图4 $a=8$ 时的 $r(t)$

由图3,图4和图5可以看出, $t=80s$ 时, $r(t)$ 的均值发生了明显突变. 在所有尺度下, $WT_a r(t)$ 在 $t=80s$ 附近都出现了较大的极值,而且它们不随尺度的增大而衰减,其它位置的极值都随着尺度的增大迅速衰减并趋于零(包括 $t=40s$ 附近的极值点).

仿真结果表明,该方法灵敏度较高,克服噪声能力强,对输入信号要求低,不需要对象的数学模型. 其缺点是在大尺度下,由于滤波器 $\phi_a(t)$ 的时域宽度较大,检测时会导致一定的延迟.

该方法已在某些实际应用中获得成功.

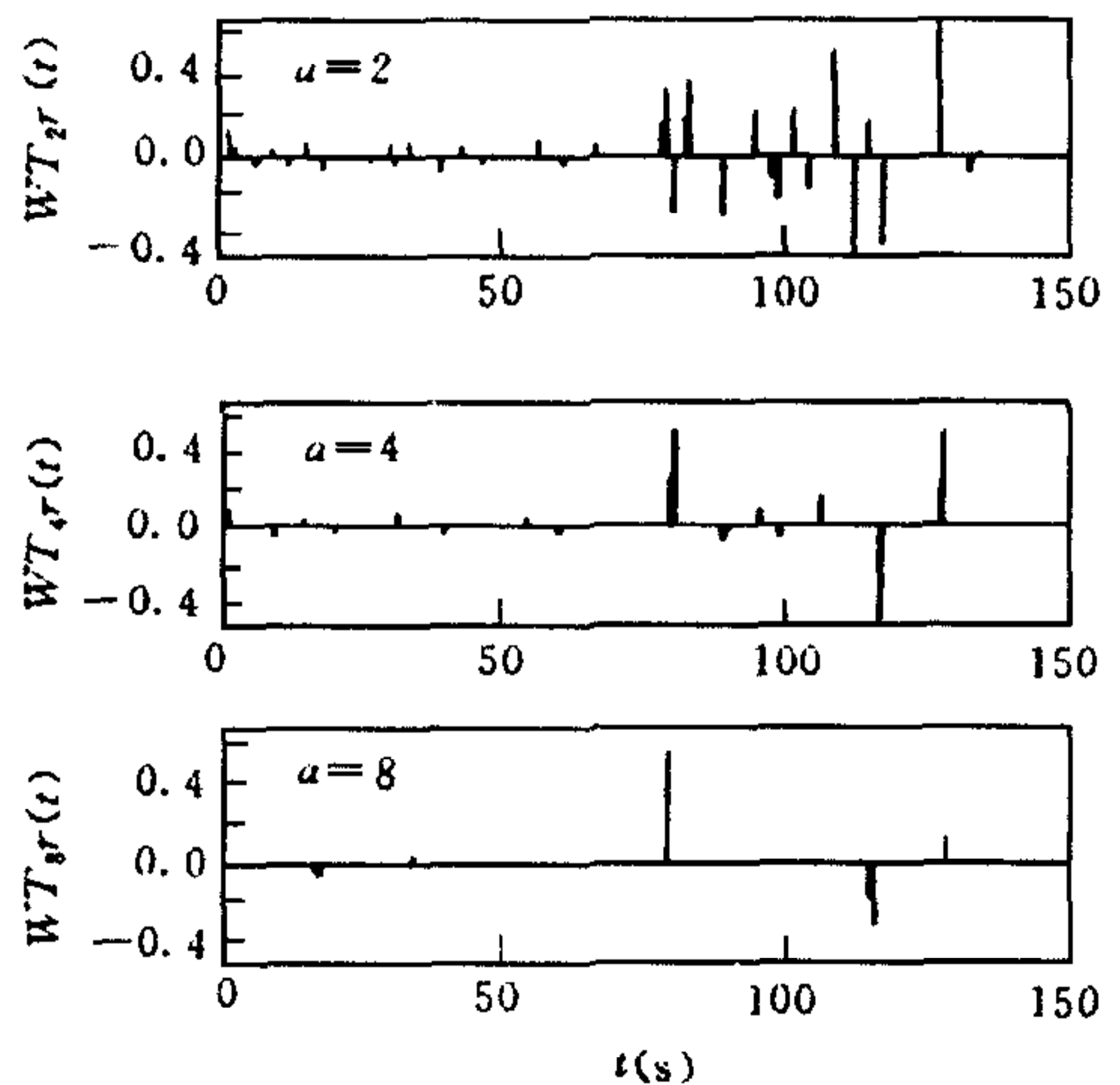


图5 多尺度下 $WT_a r(t)$ 的极值图

参 考 文 献

[1] 秦前清,杨宗凯. 实用小波分析,西安:西安电子科技大学出版社,1994.
 [2] Hlawatsch F *et al.*, Linear and quadratic time-frequency signal representations. *IEEE SP Magazine*, April, 1992:21-56.

[3] Oivierrioul, Martin Vetterli. Wavelets and signal processing. *IEEE SP Magazine*, October, 1991:14-38.

[4] 杨福生. 随机信号分析, 北京: 清华大学出版社, 1990.

附录 A

2.2 节定理的证明

证明. $E[WT_a x(t)] = E \int x(\tau) \phi_a(t - \tau) d\tau = \int E[x(\tau)] \phi_a(t - \tau) d\tau = m_x \int \phi_a(t - \tau) d\tau$ (m_x 是 $x(t)$ 的均值). 为保证反变换的存在, 要求 $\int \phi(t) dt = 0$ [3], 则 $E[WT_a x(t)] = 0$.

设 $x(t) = m_x + x'(t)$, 其中, $x'(t)$ 是零均值平稳随机噪声, 则 $E[WT_a x(t)]^2 = E[WT_a m_x + WT_a x'(t)]^2$. 由于 $WT_a m_x = m_x \int \phi_a(t - \tau) d\tau = 0$, 则 $E[WT_a x(t)]^2 = E[WT_a x'(t)]^2$. 噪声 $x'(t)$ 可看成为白噪声 $n(t)$ 驱动的某个线性滤波器的输出, 即 $x'(t) = h(t) * n(t)$, 则 $WT_a x'(t) = h(t) * n(t) * \phi_a(t)$.

设 $S_n(\omega)$ 和 σ_n^2 分别是 $n(t)$ 的功率谱和方差, $\Psi_a(\omega)$ 和 $H(\omega)$ 分别是 $\phi_a(t)$, $h(t)$ 的 FT, 则 $E[WT_a x'(t)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int |H(\omega)|^2 |\Psi_a(\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega = \frac{\sigma_n^2}{2\pi} \int |H(\omega)|^2 |\Psi_a(\omega)|^2 d\omega$.

令 $c = \max(|H(\omega)|^2)$, $c' = \frac{\sigma_n^2 c}{2\pi}$, 则 $E[WT_a x'(t)]^2 \leq c' \int |\Psi_a(\omega)|^2 d\omega = c' \int |\Psi(a\omega)|^2 d\omega = \frac{c'}{a} \int |\Psi(\omega)|^2 d\omega = \frac{c'}{a} \epsilon$. 所以, 随着尺度 a 的增大, $E[WT_a x'(t)]^2$ 趋于零, 即 $E[WT_a x(t)]^2$ 随着 a 的增大而趋于零. 证毕.

附录 B

3.2 节中近似关系的证明

证明. $WT_a y(t) = g(t) * u(t) * \phi_a(t) + WT_a e(t)$. 根据定理, a 较大时 $|WT_a e(t)|$ 很小, 如果忽略 $|WT_a e(t)|$ 的影响, 则有 $WT_a y(t) = g(t) * u(t) * \phi_a(t)$.

设 $SWT_y(\omega)$, $S_u(\omega)$ 分别是 $WT_a y(t)$, $u(t)$ 的功率谱, $\Psi_a(\omega)$, $G(\omega)$ 分别是 $\phi_a(t)$ 和 $g(t)$ 的 FT, 则 $SWT_y(\omega) = |G(\omega)|^2 |\Psi_a(\omega)|^2 S_u(\omega)$. 由于 a 较大时, $\Psi_a(\omega)$ 的带宽很窄, 而且中心频率很低 (设其中心频率为 ω_{a0}), 所以 $|G(\omega)|^2$ 可以近似用实常数 K_a^2 来代替, 即 $SWT_y(\omega) \approx K_a^2 |\Psi_a(\omega)|^2 S_u(\omega)$.

当 $G(s)$ 不存在位于原点的零点和极点而且 a 很大时, 由于 ω_{a0} 接近原点, 在 ω_{a0} 附近 $G(\omega)$ 的相角近似为 $m\pi$, $m = 0, \pm 1, \dots$ (位于原点的零点和极点会附加 $-m\pi/2$ 的相移), 则 $WT_a y(t) \approx K_a u(t) * \phi_a(t) = K_a WT_a u(t)$. K_a 是只和 $g(t)$, $\phi_a(t)$ 有关的实常数, 它的物理意义是 $|K_a| = |G(\omega_{a0})|$, 即使 $u(t)$ 发生突变, K_a 仍然保持不变, 所以, $WT_a y(t) \approx K_a WT_a u(t)$ 在全部时域上成立.

在实际应用中, 用 K_a 的最小二乘估计 $\hat{k} = \frac{\sum_l WT_a y(t) WT_a u(t)}{\sum_l [WT_a u(t)]^2}$ 来代替 K_a , 则

$WT_a y(t) - \hat{k} WT_a u(t) \approx 0$ 在全部时域上成立.

证毕.

APPLICATION OF WAVELET TRANSFORM TO FAULT DETECTION

YE HAO WANG GUIZENG FANG GHONGZHI

(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084*)

Abstract This paper presents a new approach of fault detection in dynamic systems using wavelet transform. It has good sharpness of response to faults and robustness to noise. Results of simulation are given.

Key words Wavelet transform, fault detection.

叶 昊 1969年4月生,1996年在清华大学自动化系获工学博士学位,现为清华大学自动化系讲师.主要研究方向为信号的时频分析方法在故障诊断中的应用.

王桂增 1941年9月生,1965年清华大学毕业,现为清华大学自动化系教授.长期从事过程控制方面的教学和科学研究,主要科研方向为先进过程控制系统、动态系统故障诊断和过程计算机控制等.

方崇智 简介见本刊第17卷第6期.