



一类非线性不确定系统的鲁棒 观测器设计¹⁾

倪茂林 湛颖

(北京控制工程研究所 100080)

摘 要

对于一类非线性不确定系统,给出一种基于观测器的鲁棒稳定控制器设计的新方法,它适用于一般匹配不确定系统,且对全维和降维两种观测器均进行了研究。设计实例表明,所设计的控制器反馈增益幅值较小、实现方便。

关键词: 鲁棒控制,非线性系统,观测器,稳定性。

1 引言

不确定系统的鲁棒状态反馈控制近年来得到了很大发展^[1]。但在实际应用中系统状态信息常常不能得到,这就要求设计观测器来估计系统状态。然而由于系统模型中含有不确定性,常规分离性原理不能使用,因而鲁棒观测器问题一直是鲁棒控制研究中的重要课题。文献[2]研究了一类非线性匹配不确定系统,并给出一种基于观测器的鲁棒稳定控制器设计方法。然而文献[2]对系统控制矩阵中不确定性范围附加了很强的限制,其方法不适用于一般的匹配不确定系统。本文对于这类非线性不确定系统给出一种设计鲁棒观测器的新方法。

2 问题描述

考虑非线性不确定系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \Delta a(\omega(t), x(t)) + Bu(t) + \Delta b(\omega(t), u(t)), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

式中 $x(t) \in R^n$ 是状态变量, $u(t) \in R^m$ 是控制变量, $y(t) \in R^k$ 是输出变量。 A, B 与 C 是系统标称参数矩阵。在非线性不确定性 Δa 和 Δb 中,假定可变参数向量 $\omega(t)$ 勒

1) 国家自然科学基金资助课题。

本文于1994年10月10日收到

贝格可测,且有 $\omega(t) \in \Omega \subset R^p$, 这里 Ω 为紧集.

假设 1. (A, B) 可控, (C, A) 可观.

假设 2. $\Delta a(\cdot, \cdot): R^p \times R^n \rightarrow R^n$ 和 $\Delta b(\cdot, \cdot): R^p \times R^m \rightarrow R^n$ 均为 Caratheodory 矩阵函数.

假设 3(匹配条件). 存在映射矩阵 $e_x(\cdot, \cdot)$ 和 $e_u(\cdot, \cdot)$ 满足条件

$$\Delta a(\omega, x) = B e_x(\omega, x), \Delta b(\omega, u) = B e_u(\omega, u), \forall \omega \in \Omega, \quad (2.2a)$$

$$\sup_x [\|e_x(\omega, x)\|/\|x\|] = \beta_x(\omega),$$

$$\sup_u [\|e_u(\omega, u)\|/\|u\|] = \beta_u(\omega) < 1, \forall \omega \in \Omega, \quad (2.2b)$$

式中矩阵范数定义为最大奇异值.

3 鲁棒稳定控制器

定理 3.1. 假定系统(2.1)满足假设 1—3, 且存在正数 δ 满足条件

$$\delta \leq 2[1 - \beta_u(\omega)], \forall \omega \in \Omega. \quad (3.1)$$

若 Riccati 方程及其加权矩阵选择如下:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0, \quad (3.2)$$

$$R = \eta I, \eta = 1/(\beta\delta - 1); Q \geq qI, q \geq \beta_x^2(\omega) + a, \forall \omega \in \Omega, \quad (3.3)$$

式中 a 是选定的正数, β 满足条件 $\beta > 1/\delta$, 则反馈控制

$$u(t) = Kx(t), K = -\beta B'P, \quad (3.4)$$

可使系统(2.1)渐近稳定, 其中 P 是方程(3.2)的正定解.

例 3.1. 某非线性不确定系统可用方程(2.1)描述, 且

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Delta a = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1(t) \sin(x_2) \end{bmatrix}, \Delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2(t) \sin(u) \end{bmatrix}.$$

不确定参数满足 $|\omega_1(t)| \leq 1, |\omega_2(t)| \leq 0.5$.

显然 $e_x(\omega, x) = \omega_1 \sin(x_2), e_u(\omega, u) = \omega_2 \sin(u), \beta_x(\omega) = |\omega_1|, \beta_u(\omega) = |\omega_2|$.

根据定理 3.1, 选择 $\delta = 1, \beta = 6, a = 1, Q = 2I$, 得鲁棒稳定控制

$$u(t) = Kx(t), K = [-0.6523 \quad -8.5223]. \quad (3.5)$$

对于 $|\omega_1| \leq 1, |\omega_2| \leq 0.1$ 情况, 文献[2]给出鲁棒稳定控制

$$u(t) = Kx(t), K = [-0.7319 \quad -5.9278]. \quad (3.6)$$

而根据定理 3.1, 选择 $\delta = 1.8, \beta = 3, a = 1, Q = 2I$, 得鲁棒稳定控制

$$u(t) = Kx(t), K = [-0.3895 \quad -4.7311]. \quad (3.7)$$

4 全维鲁棒观测器

对于系统(2.1), 基于全维 Luenberger 观测器的控制形式为

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t), u(t) = K\hat{x}(t), \quad (4.1)$$

式中 $\hat{x}(t) \in R^n$ 是估计状态, L 是观测器增益, K 是由定理 3.1 得到的状态反馈阵.

假设 4. 存在一正定矩阵 $Q_c \in R^{n \times n}$ 使得下式成立:

$$C'F' = P_c B, \text{ 对于某一矩阵 } F \in R^{m \times k}, \quad (4.2)$$

式中 $P_c > 0$ 是下面 Lyapunov 方程 ($A_0 = A - L_0 C$ 渐近稳定) 的解,

$$A_0' P_c + P_c A_0 = -Q_c. \quad (4.3)$$

定理 4.1. 假定系统(2.1)满足假设 1—4, 如果选择观测器增益

$$L = L_0 + \gamma P_c^{-1} C', \quad (4.4)$$

则控制(4.1)可使系统(2.1)渐近稳定, 其中正数 γ 足够大, 其下界由(4.7)式给出.

应用上述定理设计系统(2.1)的具体步骤为

- 1) 应用定理 3.1 设计鲁棒稳定控制器 K .
- 2) 选择矩阵 L_0 使得 $A_0 = A - L_0 C$ 渐近稳定.
- 3) 由方程 $P_c B = C' F'$ 求解 P_c , 根据 P_c 的对称性确定矩阵 F 各元素之间的关系.
- 4) 构造矩阵 $Q_c(P_c) = -(A_0' P_c + P_c A_0)$, 并选择其元素使得对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 顺序主子式 $\Delta_i(Q_c) > 0$, 计算矩阵 P_c 及 F 的值.
- 5) 构造矩阵

$$F_1(\rho, \omega) = \begin{bmatrix} -\rho a & \rho \beta^{-1}(1 + \beta_u) \|K\|^2 \\ \rho \beta^{-1}(1 + \beta_u) \|K\|^2 & -\lambda_{\min}(Q_c) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

式中 a, β 来自定理 3.1, 为使 $F_1(\rho, \omega)$ 负定, 选取 $\rho < \rho_*$, 其中

$$\rho_* = a \beta^2 \lambda_{\min}(Q_c) / \{\max_{\omega \in \mathcal{O}} [1 + \beta_u(\omega)]^2 \|K\|^4\}. \quad (4.6)$$

6) 计算 $\zeta = -\max_{\omega \in \mathcal{O}} \{\lambda_{\max}[F_1(\rho, \omega)]\}$ 及矩阵 Φ 和 Θ , 其中 Φ 的列构成 C 的核空间 $N(C)$ 的正交基, Θ 的列构成 $N(C)$ 垂直空间的正交基.

7) 鲁棒观测器增益矩阵为(4.4), 且 $\gamma > \gamma_*$, 其中

$$\gamma_* = \{2\zeta \max_{\omega \in \mathcal{O}} \beta_u(\omega) \|K\Theta\| / \|FC\Theta\| + \max_{\omega \in \mathcal{O}} [\beta_x(\omega) + \beta_u(\omega) \|K\|]^2 + \max_{\omega \in \mathcal{O}} [\beta_u(\omega) \|K\Phi\|]^2\} \|FC\Theta\|^2 / [2\zeta \lambda_{\min}(\Theta' C' C \Theta)]. \quad (4.7)$$

例 4.1. 考虑例 3.1 中的系统, 假定 $C = [0 \ 1]$, 设计全维鲁棒观测器.

1) 由定理 3.1, 取 $\delta = 1$, $\beta = 20$, $a = 7$, $Q = 8I$, 得状态反馈阵 $K = [1.32 \ -16.72]$.

2)—4) 与文献[2]类似, 得 $L_0 = [-1 \ 4]$, $P_c = I_2$, $Q_c = \text{diag}(8, 2)$.

5)—7) 由 $\rho_* = 0.032$, 取 $\rho = 0.015$; 由 $\gamma_* = 834.9$, 取 $\gamma = 835$, 得观测器增益 $L = [-1 \ 839]$.

5 降维鲁棒观测器

对于系统(2.1), 基于降维 Luenberger 观测器的控制形式为

$$\dot{\phi}(t) = F\phi(t) + Ly(t) + TBu(t), \quad (5.1a)$$

$$\hat{x}(t) = S_1\phi(t) + S_2y(t), u(t) = K\hat{x}(t), \quad (5.1b)$$

式中 $\phi(t) \in R^s$ 是观测器的状态, $\hat{x}(t) \in R^n$ 是系统(2.1)的估计状态. F, T, L, S_1 和 S_2 是适当维的常数矩阵. K 是由定理 3.1 得到的状态反馈阵. 假定 F 渐近稳定, 维数 s 与

矩阵 F, T, L, S_1 和 S_2 满足条件

$$n - k \leq s \leq n, TA = FT + LC, S_1T + S_2C = I_n. \quad (5.2)$$

定理 5.1. 假定系统(2.1)满足假设 1—3, 若存在一个矩阵 $Q_r > 0$ 使

$$\lambda_{\min}(Q_r) - 2\max_{\omega \in \Omega} \beta_n(\omega) \|P_r T B\| \|KS_1\| > [\max_{\omega \in \Omega} \mu(\omega)]^2 / a \quad (5.3)$$

成立, 式中 $P_r > 0$ 是下面 Lyapunov 方程的解

$$F'P_r + P_rF = -Q_r, \quad (5.4)$$

$$\mu(\omega) = [1 + \beta_n(\omega)] \|PB\| \|KS_1\| + [\beta_x(\omega) + \beta_n(\omega) \|K\|] \|P_r T B\|, \quad (5.5)$$

则控制(5.1)可使系统(2.1)渐近稳定.

例 5.1. 考虑例 4.1 中的问题, 但设计降维鲁棒观测器.

由定理 3.1 得状态反馈阵 $K = [-0.6523 \quad -8.5223]$. 应用定理 5.1 选取

$$F = -4, L = -2, T = [1 \quad 0], S_1 = [1 \quad 0]', S_2 = [0 \quad 1]', \quad (5.6)$$

则基于降维观测器的鲁棒控制为

$$\dot{\phi}(t) = -4\phi(t) - 2x_2(t), u(t) = -0.6523\phi(t) - 8.5223x_2(t). \quad (5.7)$$

对于一类非线性不确定系统, 本文提出一种基于观测器的鲁棒稳定控制器设计的新方法. 与文献[2]相比, 这种方法允许控制矩阵中不确定性范围扩大一倍, 且设计的控制器便于工程实现.

参 考 文 献

- [1] 倪茂林, 吴宏鑫. 线性不确定系统的鲁棒稳定控制器设计. 自动化学报, 1992, 18(5): 581—585.
 [2] Fong I-K, Tsay S C and Kuo T S. Robust observer design for nonlinear uncertain systems with LQ regulators. *Int. J. Systems Sci.*, 1992, 23(11): 1937—1952.

ROBUST OBSERVERS FOR A CLASS OF NONLINEAR UNCERTAIN SYSTEMS

NI MAOLIN CHEN YING

(Beijing Institute of Control Engineering 100080)

ABSTRACT

In this paper, a new method of designing observer-based robust stabilizing controllers for a class of nonlinear uncertain systems is presented. It is applicable to the uncertain system which only satisfies the general matching conditions. Both full-order and reduced-order observers are considered. Examples show that the resulting controller has smaller feedback gains and is, therefore, easier in implementation.

Key words: Robust control, nonlinear systems, observers, stability.