

# 具有参数摄动的多变量系统的鲁棒稳定性

苏为洲 秦丽江  
(东南大学自控系,南京)

## 摘 要

本文在参数空间中讨论了线性多变量系统的鲁棒稳定性。给出了在保证系统稳定的条件下,对象参数允许摄动的最大范围。同时还讨论了在对象参数之间存在线性约束时,参数允许摄动的最大范围。

**关键词:** 稳定性,鲁棒性,参数摄动范围。

## 一、引 言

近年来,大量文献从不同角度讨论了系统鲁棒稳定性的问题。其中 C. B. Soh<sup>[1,3]</sup> 等人在参数空间中,给出了单变量系统特征多项式的系数的最大稳定摄动范围。R. M. Biernacki<sup>[2]</sup> 等人在 Soh 的基础上,针对 MISO 或 SIMO 系统,得到了被控对象参数的最大允许摄动范围,并且给出了控制器参数与上述摄动范围的关系。本文在他们的基础上,把结果推广到了 MIMO 系统。

## 二、问题的描叙

考虑如图 1 所示的控制系统,  $G(s)$ ,  $K(s)$  分别为被控对象和控制器的传递函数矩阵,

$$G(s) = D^{-1}(s)N(s), K(s) = N_k(s)D_k^{-1}(s) \quad (2.1)$$

分别是  $G(s)$ 、 $K(s)$  的左互质和右互质分解。

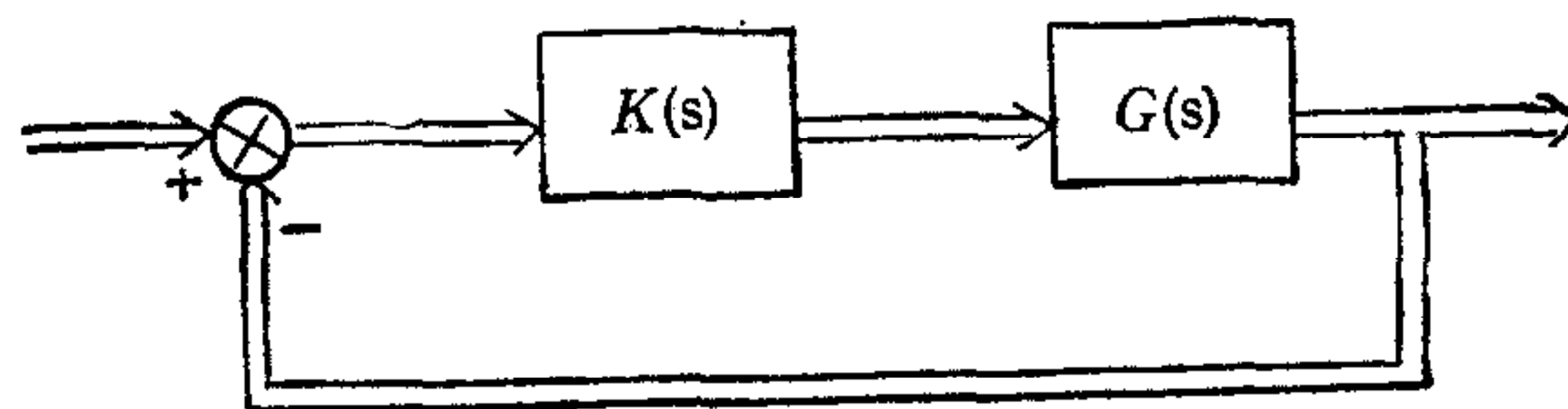


图 1

$$D(s) = \sum_{i=0}^p D_i s^i = \sum_{i=0}^p (D_i^0 + \Delta D_i) s^i, \quad D_i \in R^{m \times m}, \quad (2.2)$$

$$N(s) = \sum_{i=0}^p N_i s^i = \sum_{i=0}^p (N_i^0 + \Delta N_i) s^i, \quad N_i \in R^{m \times l}, \quad (2.3)$$

$$D_k(s) = \sum_{j=0}^q D_{kj} s^j, \quad D_{kj} \in R^{m \times m}, \quad (2.4)$$

$$N_k(s) = \sum_{j=0}^q N_{kj} s^j, \quad N_{kj} \in R^{l \times m}, \quad (2.5)$$

其中  $\Delta D_i, \Delta N_i$  是摄动矩阵, 并且记

$$P \triangleq [D_0, N_0, D_1, N_1, \dots, D_p, N_p], \quad (2.6)$$

$$P^0 \triangleq [D_0^0, N_0^0, D_1^0, N_1^0, \dots, D_p^0, N_p^0], \quad (2.7)$$

$$\Delta P \triangleq P - P^0. \quad (2.8)$$

显然, 矩阵  $P$  是  $m(m+l)(p+1)$  维参数空间中的一点. 因此, 任意一组受摄动的参数  $P$  到  $P^0$  的距离就可写成  $\{\text{tr}(P - P^0)(P - P^0)^T\}^{1/2}$ . 下面以它作为系统参数摄动的一个度量. 如果  $P$  到  $P^0$  的距离愈远, 那么, 其值就愈大, 从整体上看, 系统参数摄动量也就愈大. 反之则相反.

如果对象参数为  $P^0$  时, 系统稳定. 那么, 由多项式根对于参数的连续性可知, 一定存在一个值  $\rho(P^0, K(s))$ , 对任意一组参数的  $\Delta P$ , 只要满足

$$\text{tr}(\Delta P \times \Delta P^T) < \rho(P^0, K(s)), \quad (2.9)$$

系统就一定稳定. 从几何角度考虑, 不等式 (2.9) 表示了参数空间中一个以  $P^0$  为球心,  $\rho(P^0, K(s))$  为半径的超球体  $S(P^0, \rho(P^0, K(s)))$ , 当对象参数在这个超球体内摄动时, 系统始终保持稳定.

### 三、主要结论

设系统的特征多项式矩阵为

$$\begin{aligned} \phi(s) &\triangleq \sum_{i=0}^n \phi_i s^i \triangleq \sum_{i=0}^n (\phi_i^0 + \Delta \phi_i) s^i, \quad \phi_i \in R^{m \times m}, \\ &i = 0, \dots, n, \quad n = p + q, \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中  $\Delta \phi_i$  为摄动阵, 并且

$$\phi \triangleq [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n], \quad (3.2)$$

$$\phi^0 \triangleq [\phi_0^0, \phi_1^0, \dots, \phi_n^0], \quad (3.3)$$

$$\Delta \phi \triangleq \phi - \phi^0. \quad (3.4)$$

考虑式 (2.2)–(2.5) 及式 (3.1) 可知<sup>[4]</sup>

$$\phi(s) = D(s)D_k(s) + N(s)N_k(s), \quad (3.5)$$

记





$$\text{如果 } \rho(P^0, K(s)) > \min\{r_0, r_n, r\}, \quad (3.15)$$

则存在  $P, \omega \in (0, \infty)$  使得

$$P \in \{\pi_\omega \cup \pi_0 \cup \pi_n\} \cap S(P^0, \rho(P^0, K(s))). \quad (3.16)$$

由多项式根对其系数的连续性, 存在  $\Delta P$  满足

$$\text{tr}(P^0 - P - \Delta P)(P^0 - P - \Delta P)^T < \rho(P^0, K(s)), \quad (3.17)$$

并且使得  $\phi(s)$  有右根, 这与  $\rho(P^0, K(s))$  的定义矛盾, 因此

$$\rho(P^0, K(s)) \leq \min\{r_0, r_n, r\}. \quad (3.18)$$

同样, 如果

$$\rho(P^0, K(s)) < \min\{r_0, r_n, r\}, \quad (3.19)$$

那么, 由  $\rho(P^0, K(s))$  的定义得知存在  $P$ , 使得

$$\rho(P^0, K(s)) < \{\text{tr}(P^0 - P)(P^0 - P)^T\}^{1/2} < \min\{r_0, r_n, r\}, \quad (3.20)$$

并且  $\phi(s)$  有右根. 由于多项式根对其系数的连续性, 存在  $P' \in \pi_\omega \cup \pi_0 \cup \pi_n, (\omega \in (0, \infty))$ , 使得

$$\begin{aligned} \rho(P^0, K(s)) &\leq \{\text{tr}(P^0 - P')(P^0 - P')^T\}^{1/2} \\ &< \{\text{tr}(P^0 - P)(P^0 - P)^T\}^{1/2} < \min\{r_0, r_n, r\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

上式与  $\min\{r_0, r_n, r\}$  的定义相矛盾, 所以

$$\rho(P^0, K(s)) \geq \min\{r_0, r_n, r\}. \quad (3.22)$$

由式 (3.18), 式 (3.22) 可知定理 3.1 成立. 证毕

对任意一个  $K_\omega \in \mathcal{K}_\omega$ , 定义

$$\pi(K_\omega) \triangleq \{P \mid \phi = PX, \text{Ker} \phi(j\omega) = K_\omega\}, \quad (3.23)$$

记  $r(K_\omega)$  为  $P_0$  到  $\pi(K_\omega)$  的距离, 如果任取一个  $t \in T(K_\omega)$ , 由 (3.7), (3.12), (3.13) 三式可得

$$PX\phi(\omega)t = 0, \quad P \in \pi(K_\omega). \quad (3.24)$$

根据正交投影定理可知, 存在  $P^*(K_\omega) \in \pi(K_\omega)$ ,

$$P^0 - P^*(K_\omega) = \alpha[X\phi(\omega)t]^T. \quad (3.25)$$

由式 (3.23)–(3.25) 可得

$$r^2(K_\omega) = \text{tr}\{P^0 X \phi(\omega) t [t^T \phi^T(\omega) X^T X \phi(\omega) t]^{-1} t^T \phi^T(\omega) X^T P^{0T}\}. \quad (3.26)$$

**引理 3.1.** 如果  $K_\omega^1 \supset K_\omega^2$ , 则  $r(K_\omega^1) \geq r(K_\omega^2)$ .

证明. 见脚注 1).

**定理 3.2.** 设  $V_i = V_R^i + jV_I^i, i = 1, \dots, m$  是  $m$  维复空间  $C^m$  的一组标准正交基,  $\alpha_i = \alpha_R^i + j\alpha_I^i, i = 1, \dots, m$  是复数,

$$t_i = \begin{pmatrix} V_R^i & V_I^i \\ -V_I^i & V_R^i \end{pmatrix}, \quad \bar{t}_i = \begin{pmatrix} -V_I^i & V_R^i \\ -V_R^i & -V_I^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$K(s)$  是稳定控制器, 那么,

$$r_\omega^2 = \inf_{\sum_{i=1}^m (\alpha_R^i{}^2 + \alpha_I^i{}^2) = 1} \text{tr} \left\{ P^0 X \phi(\omega) \left[ \sum_{i=1}^m (t_i \alpha_R^i + \bar{t}_i \alpha_I^i) \right] \right\}$$

1) 苏为洲, 多变量系统鲁棒稳定性分析, 华东六省一市自动化学会第一届年会, 1988 年.

$$\begin{aligned} & \times \left[ \left( \sum_{i=1}^m (t_i \alpha_k^i + \bar{t}_i \alpha_l^i) \right)^T \phi^T(\omega) X^T X \phi(\omega) \right. \\ & \left. \times \left( \sum_{i=1}^m (t_i \alpha_k^i + \bar{t}_i \alpha_l^i) \right) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^m (t_i \alpha_k^i + \bar{t}_i \alpha_l^i) \right]^T \phi^T(\omega) X^T P_0 \}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

证明. 由  $\pi_\omega$ ,  $\pi(K_\omega)$  的定义可知

$$r_\omega = \inf_{K_\omega \in \mathcal{K}_\omega} r(K_\omega). \quad (3.28)$$

由于  $\phi(\phi \in \Delta_\omega)$  的任意性, 对  $c^m$  中的任意一个一维子空间  $c$  来说都有

$$c \in \mathcal{K}_\omega. \quad (3.29)$$

根据引理 3.1 和式 (3.29), 可以把式 (3.28) 写成

$$r_\omega = \inf_{c \in \mathcal{K}^1} r(c), \quad (3.30)$$

其中  $\mathcal{K}^1$  是  $c^m$  中所有一维子空间的集合. 取  $t$  是由  $c$  中的单位向量按式 (3.13) 构成的矩阵, 于是有

$$t = \sum_{i=1}^m (t_i \alpha_k^i + \bar{t}_i \alpha_l^i). \quad (3.31)$$

将式 (3.26), 式 (3.31) 代入式 (3.30), 即可得到式 (3.27). 证毕

通过类似的讨论, 可得定理 3.3.

**定理 3.3** 设  $t_i, i = 1, \dots, m$  是  $m$  维空间  $R^m$  的一组单位正交基,  $\alpha_i, i = 1, \dots, m$

为实数并且  $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 1$ ,  $K(s)$  是稳定控制器, 则

$$\begin{aligned} r_0^2 = & \inf_{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 1} \text{tr} \left\{ P^0 X_0 \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \right) \left[ \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \right)^T X_0^T \right. \right. \\ & \left. \left. \times X_0 \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \right) \right]^{-1} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \right)^T X_0^T P^{0T} \right\}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

或

$$\begin{aligned} r_n^2 = & \inf_{\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 1} \text{tr} \left\{ P^0 X_n \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \right)^T \left[ \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \right)^T X_n^T \right. \right. \\ & \left. \left. \times X_n \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \right) \right]^{-1} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \right)^T X_n^T P^{0T} \right\}. \end{aligned} \quad (3.32')$$

#### 四、在线性约束下的结论

设  $a \in R^{w \times 1}$  是一组独立变量, 记  $a^0$  为  $a$  的标么值,  $P$  中每一行  $P_k$  可写成

$$P_k = a^T A_k + b_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

$A_k, b_k$  是常数阵. 由式 (4.1) 可定义

$$\pi^a(K_\omega) \triangleq \{a \mid P \in \pi(K_\omega)\}, \quad (4.2)$$

$$\pi_\omega^a \triangleq \{a \mid P \in \pi_\omega\}, \quad (4.3)$$

记

$$A(K_\omega) = (A_1 X \phi(\omega) t \mid \cdots \mid A_m X \phi(\omega) t), \quad (4.4)$$

$$b(K_\omega) = (b_1 X \phi(\omega) t \mid \cdots \mid b_m X \phi(\omega) t). \quad (4.5)$$

把式(4.4), 式(4.5)代入式(3.24)得

$$a^T A(K_\omega) + b(K_\omega) = 0. \quad (4.6)$$

当

$$\text{rank}(A(K_\omega)) < \text{rank} \begin{pmatrix} A(K_\omega) \\ b(K_\omega) \end{pmatrix}$$

时, 定义

$$r^a(K_\omega) = \infty. \quad (4.7)$$

当

$$\text{rank}(A(K_\omega)) = \text{rank} \begin{pmatrix} A(K_\omega) \\ b(K_\omega) \end{pmatrix}$$

时, 取  $\begin{pmatrix} A(K_\omega) \\ b(K_\omega) \end{pmatrix}$  中最大线性无关列, 把式(4.6)化成

$$a^T \overline{A(K_\omega)} + \overline{b(K_\omega)} = 0, \quad (4.8)$$

因此,  $a^0$  到  $\pi(K_\omega)$  的距离为

$$r^a(K_\omega) = \{ [a^{0T} \overline{A(K_\omega)} + \overline{b(K_\omega)}] [\overline{A(K_\omega)}^T \overline{A(K_\omega)}]^{-1} \\ \times [\overline{A(K_\omega)}^T a^0 + \overline{b(K_\omega)}^T] \}^{1/2}. \quad (4.9)$$

如果  $K_\omega^1 \supset K_\omega^2$ , 那么与引理 3.1 一样, 有

$$r(K_\omega^1) \geq r(K_\omega^2). \quad (4.10)$$

所以类似于定理 3.2, 在讨论  $r^a(K_\omega)$  时, 只须考虑  $t$ , 如式(3.31)所示的情况.

将式(3.31)代入  $A(K_\omega)$ ,  $b(K_\omega)$ , 记得到的矩阵为  $A_1(K_\omega)$ ,  $b_1(K_\omega)$ , 同时定义

$$\alpha_\omega \triangleq (\alpha_R^1 + j\alpha_I^1, \cdots, \alpha_R^m + j\alpha_I^m)^T, \quad (4.11)$$

$$A_\omega \triangleq \left\{ \alpha_\omega \mid \alpha_\omega^H \alpha_\omega = 1, \text{rank} A_1(K_\omega) = \text{rank} \begin{pmatrix} A_1(K_\omega) \\ b_1(K_\omega) \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.12)$$

则根据式(4.9)有

$$r_\omega^a = \begin{cases} \infty, & \alpha_\omega \notin A_\omega, \\ \inf_{\alpha_\omega \in A_\omega} \{ [a^{0T} \overline{A_1(K_\omega)} + \overline{b_1(K_\omega)}] [\overline{A_1(K_\omega)}^T \overline{A_1(K_\omega)}]^{-1} [\overline{A_1(K_\omega)}^T a^0 + \overline{b_1(K_\omega)}] \}^{1/2}, & \alpha_\omega \in A_\omega. \end{cases} \quad (4.13)$$

对  $r_0^a$  和  $r_n^a$  也可做类似的讨论, 定义

$$\alpha \triangleq (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)^T, \quad (4.14)$$

$$A_0 \triangleq \left\{ \alpha \mid \alpha^T \alpha = 1, \text{rank} A_1(K_0) = \text{rank} \begin{pmatrix} A_1(K_0) \\ b_1(K_0) \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.15)$$

$$A_n \triangleq \left\{ \alpha \mid \alpha^T \alpha = 1, \text{rank} A_1(K_n) = \text{rank} \begin{pmatrix} A_1(K_n) \\ b_1(K_n) \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.16)$$

则

$$r_0^a = \begin{cases} \infty, & \alpha \notin A_0, \\ \inf_{\alpha \in A_0} \{ [a^{0T} \overline{A_1(K_0)} + \overline{b_1(K_0)}] [\overline{A_1(K_0)}^T \overline{A_1(K_0)}]^{-1} [\overline{A_1(K_0)}^T a^0 + \overline{b_1(K_0)}^T] \}^{1/2}, & \alpha \in A_0. \end{cases} \quad (4.17)$$

$$r_n^a = \begin{cases} \infty, & \alpha \notin A_n, \\ \inf_{\alpha \in A_n} \{ [a^{0T} \overline{A_1(K_n)} + \overline{b_1(K_n)}] [\overline{A_1(K_n)}^T \overline{A_1(K_n)}]^{-1} [\overline{A_1(K_n)}^T a^0 + \overline{b_1(K_n)}^T] \}^{1/2}, & \alpha \in A_n, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\text{记 } r^a = \inf_{\omega \in (0, \infty)} r_\omega^a. \quad (4.19)$$

那么  $a$  的最大稳定摄动范围是

$$\rho(a^0, K(s)) = \min\{r^a, r_0^a, r_n^a\}. \quad (4.20)$$

## 五、算 例

考虑被控对象和控制器的传递函数矩阵分别为

$$G(s) = \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad K(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

被控对象的参数阵  $P$  中, 只有  $p_{11}$ ,  $p_{22}$  两个参数受到摄动, 并且

$$p_{11} = 2a_1, \quad p_{22} = a_2, \quad (5.2)$$

$a_1$ ,  $a_2$  的标么值均为 1.

现在可用第四节的结论求出参数向量  $(a_1, a_2)$  最大稳定摄动范围.

由式 (5.1), 式 (5.2) 可知, 式 (4.1) 中的  $A_k$ ,  $b_k$  ( $k=1, 2$ ) 分别为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0), \quad (5.3)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1), \quad (5.4)$$

因而可得

$$A_1(K_\omega) = \begin{pmatrix} 2\alpha_R^1 & 2\alpha_I^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_R^2 & \alpha_I^2 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$b_1(K_\omega) = (\alpha_R^1 - \omega\alpha_I^1 \mid \alpha_I^1 + \omega\alpha_R^1 \mid \alpha_R^2 - \omega\alpha_I^2 \mid \alpha_I^2 + \omega\alpha_R^2), \quad (5.6)$$

其中  $\sum_{i=1}^2 (\alpha_R^i + \alpha_I^i) = 1$

显然当  $\omega \neq 0$  时,

$$\text{rank}(A_1(K_\omega)) < \text{rank} \begin{pmatrix} A_1(K_\omega) \\ b_1(K_\omega) \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

因此

$$r^a = \infty. \quad (5.8)$$



同样

$$A_1(K_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_1(K_n) = (\alpha_1\alpha_2), \quad (5.9)$$

$$\text{其中 } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1. \text{ 因此, } r_n^a = \infty. \quad (5.10)$$

对  $r_0$  有下面关系:

$$A_1(K_0) = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, b_1(K_0) = (\alpha_1\alpha_2). \quad (5.11)$$

由式 (4.17) 得

$$r_0^a = 3/2. \quad (5.12)$$

所以

$$\rho(a^0, K(s)) = \min\{r^a, r_0^a, r_n^a\} = 3/2. \quad (5.13)$$

同时由式 (5.1) 可直接求出  $a_1, a_2$  的稳定范围为

$$a_1 > -\frac{1}{2}, a_2 > -1. \quad (5.14)$$

这与式 (5.13) 的结论一致.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Soh, C. B. et, On the Stability Properties of Polynomials with Perturbed Coefficients *IEEE Trans.*, **AC-30**(1985), 1033—1036.
- [ 2 ] Biernacki, R. M., et, Robust Stability with Structured Real Parameter Perturbations *IEEE Trans.*, **AC-32**(1987), 495—505.
- [ 3 ] Soh, C. B. et, Addendum to On the Stability Properties of Polynomials with Perturbed Coefficients', *IEEE Trans.*, **AC-32**(1987), 239—240.
- [ 4 ] Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, INC., 1980.

## THE ROBUST STABILITY OF LINEAR MULTIVARIABLE SYSTEM WITH PARAMETER PERTURBATION

SU WEIZHOU QIN LIJIANG

(Dept. of Automatic Control, Southeast University)

### ABSTRACT

This paper considers the problem of robust stability of linear MIMO system in the parameter space. Assume the transfer function of a system be subject to structure perturbation, we analysed the relation of controller and perturbing parameters. In the parameter space, the radius of the largest stability hypersphere is given by projection theorem. Further, the largest stable radius is given when there are linear constrained relations among system parameters.

**Key words:** Stability; robustness; range of parameter perturbation.