具有脉冲作用的切换线性广义系统的稳定性

尹玉娟 [1,2] 赵 军 [1,2]

摘 要 本文引入一类新的系统模型–具有脉冲作用的切换线性广义系统. 应用驻留时间 (Dwell time) 方法和平均驻留时间 (Average dwell time) 方法研究其稳定性问题, 并给出系统指数稳定性的充分条件. 证明了当平均驻留时间足够大且重设律是允许的, 那么系统是指数稳定的. 利用广义系统的受限等价性质, 具体给出允许的重设律的设计方法. 数值例子说明本文方法的有效性.

关键词 切换系统, 切换广义系统, 指数稳定

中图分类号 TP273; N94.1

Stability of Switched Linear Singular Systems with Impulsive Effects

YIN Yu-Juan[1,2] ZHAO Jun[1,2]

Abstract A new class of switched linear singular systems with impulsive effects is introduced. The stability of such systems is investigated by using dwell time and average dwell time approaches. A sufficient condition for exponential stability is presented. It is shown that if dwell time is chosen to be sufficiently large and the reset law is admissible, then exponential stability is guaranteed. The admissible reset law is developed using the restricted equivalent property of singular systems. A numerical example illustrates the effectiveness of the proposed method.

Key words Switched systems, switched singular systems, exponential stability

1 引言

混杂系统是指在系统中同时存在几种不同的动态行为 (如连续动态、离散动态、脉冲现象、切换现象和逻辑指令等) 的系统. 这类系统具有广泛的实际背景, 因此受到越来越多学者的重视, 并取得丰富的结果[1~4]. 切换系统和脉冲系统是混杂系统的重要类型. 切换系统由一组连续或离散的动态以及一个分段连续的切换律组成. 脉冲系统是指系统状态在瞬时发生突然的变化, 这种变化在系统中通常用状态跳跃来描述. 文 [5] 应用切换的李雅普诺夫函数方法, 设计混杂脉冲切换控制律, 给出了具有脉冲作用的切换系统的指数稳定和渐近稳定性判定条件.

广义系统是一类更一般的控制系统. 许多正常系统的理论被相继推广到广义系统[6]. 然而, 关于切换广义系统的文献却很少. 文 [7] 给出了切换广义系统完全可控的充分条件和必要条件. 与上述文献所研究的切换脉冲系统和切换广义系统不同, 本文提出具有脉冲作用的切换线性广义系统的模型. 这种系统模型包含了切换脉冲系统和切换广义系统, 因而更具有一般性.

2 问题描述

具有脉冲作用的切换线性广义系统模型可表示为

$$\begin{cases} E_{\sigma(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_{\sigma(t)}\boldsymbol{x}(t) + B_{\sigma(t)}\boldsymbol{u}_{\sigma(t)}(t), & t \neq t_k \\ \Delta\boldsymbol{x}(t) = F(\sigma(t^-), \sigma(t))\boldsymbol{x}(t), & t = t_k \\ \boldsymbol{x}(t_0^+) = \boldsymbol{x}_0, & k = 1, 2 \dots \end{cases} \tag{1}$$

其中, 切换律 $\sigma(t) : R^+ \to \Lambda = \{1, 2, \dots, m\}$ 为分段常值函数, $\boldsymbol{x}(t) \in D \subset R^n$ 为状态变量, D 是 R^n 空间上的子流形, $\boldsymbol{u}_i \in R^{m_i}$ 为允许的控制输入, $E_i, A_i \in R^{n\times n}$ 为定常矩阵, B_i 为具有适当维数的矩阵. 切换系统的指标 i_k 与切换律 $\sigma(t)$ 的关系如下：当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时, $\sigma(t) = i_k, k = 0, 1, 2, \dots$, 当 $\sigma(t)$ 确定时, $F(i, j)$ 为常矩阵, 状态跳跃为 $\Delta\boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{x}(t_k^+) - \boldsymbol{x}(t_k)$, 假设系统轨迹是左连续的, 即 $\boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{x}(t_k^-) = \lim\limits_{t\nearrow t_k} \boldsymbol{x}(t)$.

下文中我们将采用文 [4] 中提出的驻留时间和平均驻留时间概念. $\mathcal{S}[\tau_d]$ 表示所有子系统连续激活时间都不小于 τ_d 的切换律的集合, $\tau_d > 0$ 称为驻留时间. $\mathcal{S}_a[\tau_a, N_0]$ 表示所有满足 $N_\sigma(\tau, t) \leq N_0 + \dfrac{t-\tau}{\tau_a}$ 的切换律的集合. 其中 $N_\sigma(\tau, t)$ 表示在区间 (τ, t) 上系统切换的次数, τ_a 称为平均驻留时间, N_0 称为抖颤界.

3 稳定性分析

3.1 驻留时间方法

考虑系统 (1) 在无连续控制输入, 即 $\boldsymbol{u}_i(t) \equiv 0$ 的情况.

定义 1. 系统 (1) 称为是全局指数稳定的, 如果存在常数 $\alpha, \beta > 0$, 使得对任意的 $t \geq t_0 > 0$, 系统 (1) 的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足 $\| \boldsymbol{x}(t) \| \leq \alpha \mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)} \| \boldsymbol{x}(t_0) \|$. 其中 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 为一致初始状态, β 称为稳定阀值 (Stability margin).

假设 1. 系统 (1) 中的每个子系统都是正则、无脉冲且全局指数稳定的.

当 $t_0 < \tau < t$ 时, 系统 (1) 对应的切换 (或脉冲) 时刻序列为：$\{t_1, t_2, \dots, t_{N_\sigma(t)}\}$, $N_\sigma(t)$ 表示系统在时间区间 (t_0, t) 内切换的次数或产生脉冲的次数.

在广义系统中, 即使系统无脉冲, 即 $\mathrm{degdet}\,(s_iE_i - A_i) = \mathrm{rank}\,(E_i)$, 也可能由于非一致初始条件而引起初始状态跳跃. 为避免这种情况发生, 我们假定在切换时刻有 $\boldsymbol{x}_{i_k}(t_k) \in D_{i_k}$, D_{i_k} 为第 i_k 个子系统的一致初始状态集.

定理 1. 如果假设 1 成立, 且存在

$$0 < \bar{\beta} < \beta = \min_{i\in\Lambda}\{\beta_i\}$$

以及

$$0 < \tau_d = \inf_{k\in N}\{\tau_k : \tau_k = t_k - t_{k-1}\}$$

使得

$$\ln((1 + \theta(\sigma(t_k^-), \sigma(t_k)))\alpha_{i_k}) - \bar{\beta}(t_{k+1} - t_k) \leq 0 \tag{2}$$

成立, 那么当 $\sigma(t) \in \mathcal{S}[\tau_d]$, $\boldsymbol{x}_{i_0} \in D_{i_0}$ 时, 系统 (1) 是李雅普诺夫意义下全局指数稳定的. 其中, $\theta(\sigma(t_k^-), \sigma(t_k)) =$

收稿日期 2005-8-4 收修改稿日期 2006-6-2
Received August 4, 2005; in revised form June 2, 2006
国家自然科学基金 (60574013, 60274009) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60574013, 60274009)
1. 东北大学流程工业综合自动化教育部重点实验室 沈阳 110004 2. 东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110004
1. Key Laboratory of Integrated Automation of Process Industry, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110004
2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004
DOI: 10.1360/aas-007-0446

$\|F(\sigma(t_k^-),\sigma(t_k))\|$.

证明. 为方便起见, 我们用 $\boldsymbol{x}_{i_k}(t)$ 表示当 $t\in[t_k,t_{k+1})$ 时, 切换系统 (1) 的状态轨迹, 此时 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_{i_k}(t)$, $E_{i_k}\dot{\boldsymbol{x}}_{i_k}(t)=A_{i_k}\boldsymbol{x}_{i_k}(t),\ k=0,1,2\dots,\ i_k\in\{1,2,\dots,m\}$.

当 $t\in[t_0,t_1),\boldsymbol{x}_{i_0}$ 为一致初始状态, 由假设 1 可知存在常数 $\alpha_{i_0},\beta_{i_0}>0$, 使不等式

$$\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t)\|\le\alpha_{i_0}\mathrm{e}^{-\beta_{i_0}(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|$$

成立.

当 $t=t_1$ 时, 我们有

$$\|\boldsymbol{x}(t_1)\|=\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_1)\|\le\alpha_{i_0}\mathrm{e}^{-\beta_{i_0}(t_1-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|$$

且

$$\boldsymbol{x}_{i_1}(t_1^+)=(I+F(\sigma(t_1^-),\sigma(t_1)))\boldsymbol{x}_{i_0}(t_1)$$

进一步有

$$\|\boldsymbol{x}_{i_1}(t_1^+)\|\le(1+\theta(\sigma(t_1^-),\sigma(t_1)))\alpha_{i_0}\mathrm{e}^{-\beta_{i_0}(t_1-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|$$

同理, 当 $t\in[t_1,t_2)$ 时有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{i_1}(t)\|&\le\alpha_{i_1}\mathrm{e}^{-\beta_{i_1}(t-t_1)}\|\boldsymbol{x}_{i_1}(t_1^+)\|\\&\le(1+\theta(\sigma(t_1^-),\sigma(t_1)))\alpha_{i_0}\mathrm{e}^{-\beta_{i_0}(t_1-t_0)}\times\\&\quad\alpha_{i_1}\mathrm{e}^{-\beta_{i_1}(t-t_1)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|\end{aligned}$$

依此类推, 当 $t_1\le t_{N_\sigma(t)}\le t<t_{N_\sigma(t)+1}$ 时,

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{x}_{i_{N_\sigma(t)}}(t)\|\le\prod_{k=0}^{N_\sigma(t)}(1+\theta(\sigma(t_k^-),\sigma(t_k)))\times\\&\alpha_{i_0}\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_{N_\sigma(t)}}\mathrm{e}^{-\beta_{i_0}(t_1-t_0)}\times\\&\mathrm{e}^{-\beta_{i_1}(t_2-t_1)-\dots-\beta_{i_{N_\sigma(t)}}(t-t_{N_\sigma(t)})}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|\end{aligned}\tag{3}$$

其中, $\theta(\sigma(t_0^-),\sigma(t_0))=0$. 由定理 1 的条件可知, 存在 $\bar\beta:0<\bar\beta<\beta$. 令 $\alpha=\max\limits_{i\in\Lambda}\{\alpha_i\}$, 由式 (3) 得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{i_{N_\sigma(t)}}(t)\|&\le\prod_{k=0}^{N_\sigma(t)}(1+\theta(\sigma(t_k^-),\sigma(t_k)))\times\\&\quad\alpha_{i_0}\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{N_\sigma(t)}}\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|\\&=\prod_{k=0}^{N_\sigma(t)}(1+\theta(\sigma(t_k^-),\sigma(t_k)))\alpha_{i_0}\alpha_{i_1}\dots,\alpha_{i_{N_\sigma(t)}}\times\\&\quad\mathrm{e}^{-\bar\beta(t-t_0)}e^{-(\beta-\bar\beta)(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|\\&\le\prod_{k=1}^{N_\sigma(t)}((1+\theta(\sigma(t_k^-),\sigma(t_k)))\alpha_{i_k}\mathrm{e}^{-\bar\beta(t_{k+1}-t_k)})\times\\&\quad\alpha\mathrm{e}^{-(\beta-\bar\beta)(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|\end{aligned}$$

由不等式 (2) 可得 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\le\alpha\mathrm{e}^{-(\beta-\bar\beta)(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|$, 因此, 系统 (1) 是全局指数稳定的. □

3.2 平均驻留时间方法

在系统 (1) 中, 如果存在 $0<\theta=\max\limits_{i,j\in\Lambda}\{\theta(i,j)\}$, 那么必有常数 $a>0$, 使 $(1+\theta)\alpha\le\mathrm{e}^a$. 不失一般性, 取 $a=\inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda:(1+\theta)\alpha\le\mathrm{e}^\lambda\}$. 对于任意的正数 $\mu,\bar\lambda\in(0,\beta)$, 当

$$aN_\sigma(t)-\beta(t-t_0)\le\mu-\bar\lambda(t-t_0)\tag{4}$$

成立时, 系统 (1) 指数稳定. 因此, 我们得到如下结果.

定理 2. 假设 1 成立, 则对于任意给定的 $0<\bar\lambda<\beta=\min\limits_{i\in\Lambda}\{\beta_i\}$ 及任意常数 $0<\mu<\infty$, 当 $\sigma(t)\in\mathcal{S}_a[\tau_a^*,N_0]$ 时, 系统 (1) 全局指数稳定且稳定阀值为 $\bar\lambda$. 其中 $N_0=\frac{\mu}{a},\tau_a^*=\frac{a}{\beta-\bar\lambda},\ a=\inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda:(1+\theta)\alpha\le\mathrm{e}^\lambda\},\alpha=\max\limits_{i\in\Lambda}\{\alpha_i\},\tau_a^*$ 为平均驻留时间.

证明. 由定理 1 的证明过程可知, 当 $t_1\le t_{N_\sigma(t)}\le t<t_{N_\sigma(t)+1}$ 时,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{i_{N_\sigma(t)}}(t)\|&\le\prod_{k=0}^{N_\sigma(t)}(1+\theta(\sigma(t_k^-),\sigma(t_k)))\times\\&\quad\alpha_{i_0}\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_{N_\sigma(t)}}\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|\end{aligned}$$

设 $\theta=\max\limits_{i,j\in\Lambda}\{\theta(i,j)>0\},\alpha=\max\limits_{i\in\Lambda}\{\alpha_i\}$, 则有

$$\|\boldsymbol{x}_{i_{N_\sigma(t)}}\|\le((1+\theta)\alpha)^{N_\sigma(t)}\alpha\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|$$

因为 $\sigma\in S_a[\tau_a^*,N_0]$, 所以有

$$N_\sigma(t)\le N_0+\frac{t-t_0}{\tau_a^*}$$

立即得

$$\|\boldsymbol{x}_{i_{N_\sigma(t)}}\|\le\alpha\mathrm{e}^{aN_0+a(t-t_0)/\tau_a^*-\beta(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|$$

又因为

$$N_0=\frac{\mu}{a},\quad\tau_a^*=\frac{a}{\beta-\bar\lambda}$$

所以

$$\|\boldsymbol{x}_{i_{N_\sigma(t)}}\|\le\alpha\mathrm{e}^\mu\mathrm{e}^{-\bar\lambda(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_{i_0}(t_0)\|\tag{5}$$

因为 μ 是任意的, 所以 N_0 也是任意的, 由式 (5) 可知系统 (1) 是指数稳定的. □

下面应用线性广义系统受限等价性质, 给出一种允许的重设律的设计方法. 根据假设可知, 系统 (1) 中的每个子系统都是正则, 无脉冲的, 那么存在非奇异矩阵 Q_i,P_i, 使得

$$Q_iE_iP_i=\begin{bmatrix}I_{h_i}&0\\0&0\end{bmatrix},\ Q_iA_iP_i=\begin{bmatrix}A_{i11}&0\\0&I_{n-h_i}\end{bmatrix}$$

成立.

令

$$\varphi_i=P_i[I_{h_i}\ 0]^{\mathrm T}[I_{h_i}\ 0]\boldsymbol{x}$$

$$F(\sigma(t^-),\sigma(t))=(\varphi_{\sigma(t)}-I)$$

则 $F(\sigma(t^-),\sigma(t))$ 为允许的重设律.

4 数值例子

考虑脉冲切换广义系统 (1), 当 $\boldsymbol{u}_i(t) \equiv 0$, $\sigma(t) = 1, 2$ 的情形, 相应的系数矩阵如下

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1.25 & 0.75 \\ 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1.5 \\ -2 & -1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$F(2,1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F(1,2) = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据定理 1 可得, 当驻留时间 $\tau_d \geq \max\{0.61619, 0.4959\}$ 时, 系统 (1) 指数稳定. 取初始状态 $\boldsymbol{x}_0 = [0.5\ \ 1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, 驻留时间 $\tau_d = 0.6162$ 秒, 并采用等时切换, 仿真结果如图 1 所示. 当 $\tau_d \leq \max\{0.61619, 0.4959\}$ 时, 系统可能不稳定. 为便于比较, 图 2 给出了 $\tau_d = 0.292$ 秒时的仿真结果, 它表明状态是发散的.

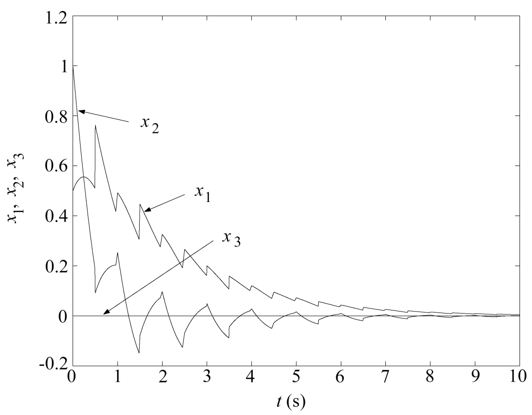

图 1 系统 (1) 的状态响应曲线 ($\tau_d = 0.6162$)

Fig. 1 The state response of the system(1) with $\tau_d = 0.6162$

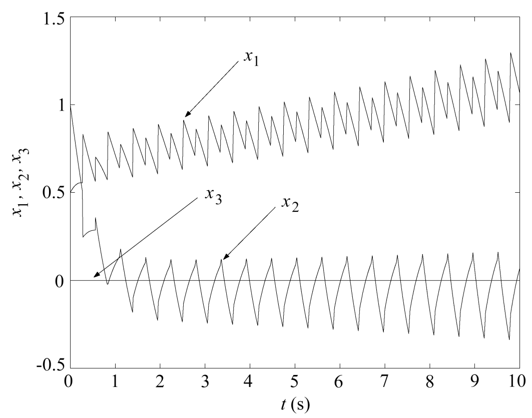

图 2 系统 (1) 的状态响应曲线 ($\tau_d = 0.292$)

Fig. 2 The state response of the system(1) with $\tau_d = 0.292$

5 结论

本文将正常切换系统的驻留时间和平均驻留时间方法, 推广到具有脉冲作用的切换线性广义系统, 得到系统指数稳定的充分条件, 并给出允许的重设律的设计方法. 允许的重设律的引入, 避免了由于非一致初始状态而导致的初始状态跳跃, 确保经脉冲作用后得到的状态是一致的, 使系统正常运行.

References

1 Decarlo R A, Branicky M S, Pettersson S, Lennartson B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 2000. **88**(7): 1069~1082

2 Ye H, Michel A N, Hou L. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 461~474

3 Zhao J, Dimirovski G M. Quadratic stability of a class of switched nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 574~578

4 Hespanha J P, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1999. 2655~2660

5 Guan Z H, Hill D J, Shen X M. On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(7): 1058~1062

6 Dai L. *Singular Control Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1989, New York: Springer-Verlag, **118**: 67~73

7 Meng B, Zhang J F. Reachability conditions for switched linear singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(3): 482~488

尹玉娟 东北大学信息科学与工程学院博士研究生, 研究领域为混杂系统, 切换广义系统. 本文通信作者. E-mail: yinyj64@tom.com
(**YIN Yu-Juan** Ph. D. candidate at School of Information Science and Engineering, Northeastern University. Her research interest covers hybrid systems and switched singular systems. Corresponding author of this paper.)

赵 军 教授, 博士生导师, 研究领域为切换系统, 非线性系统, 几何控制理论, 鲁棒控制. E-mail: zdongbo@pub.ln.cninfo.net
(**ZHAO Jun** Professor at School of Information Science and Engineering, Northeastern University. His research interest covers switched systems, nonlinear systems, geometric control theory, and robust control.)