解析几何上的一个判式

吴效显

提　要　给出了平面和一般二次曲面相切与否的判定公式，是对二次曲面理论的一点补充.

关键词　平面；切面；二次曲面
中图法分类号　O181

命题　平面 $lx+my+nz+p=0$ 与二次曲面：

$$(x,y,z,1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}=0,$$

相切的充要条件是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&l\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&m\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&n\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&p\\l&m&n&p&0\end{vmatrix}=0.$$

这里 $a_{ij}=a_{ji}$.

证明　设平面与二次曲面相切于点 (x_0,y_0,z_0)，则切平面为：

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24})y+$$
$$(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34})z+(a_{41}x_0+a_{42}y_0+a_{43}z_0+a_{44})=0,$$

它和 $lx+my+nz+p=0$ 表示同一平面.

所以

收稿日期：1997-08-20
作者吴效显，男，副教授，菏泽师范专科学校，山东菏泽，274015

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = -lt,$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = -mt,$$
$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = -nt,$$
$$a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} = -pt,$$

又(x_0,y_0,z_0)在平面 $lx + my + nz + p = 0$ 上.

所以齐次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}\lambda + lu = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}\lambda + mu = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}\lambda + nu = 0 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}\lambda + pu = 0 \\ lx + my + nz + p\lambda = 0 \end{cases},$$

有非零解($x_0,y_0,z_0,1,t$).

所以须且仅须:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & l \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & p \\ l & m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad \square$$

笔者认为,华东师范大学数学系编的《解析几何习题集》中12·34题,12·105题,13·15题,都可以利用此命题的结论证明.

参 考 文 献

1 唐秀颖.数学解题辞典(平面解析几何).上海:辞书出版社.1983:652~653

A Discriminant in Analytic Geometry

Wu Xiaoxian

(Heze Teacher's College)

Abstract A discriminant for determining whether a plane is tangent to a conicoid is presented. It is a supplementary note to quadric curve theory.

Key words plane; tangent plane; conicoid