第26卷第4期 数学研究与评论 Vol.26, No.4
2006年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2006

文章编号: 1000-341X(2006)04-0803-08 **文献标识码**: **A**

超线性奇异微分方程边值问题的正解

赵增勤 王新华
(曲阜师范大学数学科学学院, 山东 曲阜 273165)
(E-mail: zqzhao@qfnu.edu.cn)

摘 要: 本文研究一类超线性奇异微分方程边值问题, 在一定条件下得到 $C^1[0,1]$ 正解存在的充分条件和必要条件, 以及不能有两个可比较 $C^1[0,1]$ 的正解. 最后给出了满足要求的例子.

关键词: 奇异边值问题; 正解; 充分条件; 必要条件.
MSC(2000): 34B15
中图分类: O175.8

1 引言与主要结果

本文研究下述微分方程

$$u''+f(t,u)=0 \tag{1}$$

在边界条件

$$\alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0 \tag{2}$$

下的正解. 允许非线性项 f 在 $t=0,1$ 处奇异. 其中 $\alpha,\beta,\delta,\gamma$ 是非负实数且 $\Delta:=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma>0$.

关于这类问题的研究可见文 [1–4]. 但是上述各文献中所述函数 $f(t,u)$ 关于未知量 u 都是齐次的. 文 [5–7] 研究了这类问题的某些非齐次情形, 得到其 $C[0,1]$ 正解或 $C^1[0,1]$ 正解存在的充分必要条件, 但它们本质上都是次线性的. [8] 讨论了超线性情形, 但非线性项是变量分离的, 还不够广泛.

在本文中, 我们假定 $f(t,u)$ 为奇异超线性的, 不必分离变量的情形, 在一定条件下得到 $C^1[0,1]$ 正解存在的充分条件和必要条件, 以及不能有两个可比较的 $C^1[0,1]$ 正解. 最后给出了满足要求的具体例子.

我们记 $J=(0,1)$, $I=[0,1]$, $R^+=[0,+\infty)$, 并对函数 f 作如下假定:

(H) $f(t,u)$: $J\times R^+\to R^+$ 连续; 存在实数 $1<a<b$ 使对任意 $0<r<1$ 有

$$r^bf(t,u)\le f(t,ru)\le r^af(t,u),\ \forall\ (t,u)\in J\times R^+. \tag{3}$$

在以下讨论中, 若不恒为零函数 $u(t)\in C(I)\cap C^2(J)$ 满足边界条件 (2) 和在 J 中满足方程 (1), 则称 $u(t)$ 为所述问题的解, 也称 $C(I)$ 解; 若解 $u(t)$ 使得 $u'_+(0)$ 与 $u'_-(1)$ 都存在, 则称为 $C^1(I)$ 解. 若解 $u(t)$ 在 J 上恒正, 则称为正解. 易见 (1) 和 (2) 的非零解必是正解.

注 1 若在边界条件 (2) 中 $\beta\ne0$ 且 $\delta\ne0$, 则 (1) 和 (2) 的解必是 $C^1(I)$ 解. 当 $\beta=0$ 或者 $\delta=0$ 时, (1) 和 (2) 的解不一定是 $C^1(I)$ 解.

收稿日期: 2005-05-17
基金项目: 国家自然科学基金 (10471075), 高教博士点专项科研基金 (20050446001)

设 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 是 I 上的两个函数, 若 $u_1(t) \le u_2(t)$, 对一切 $t \in I$ 成立, 或者 $u_1(t) \ge u_2(t)$ 对一切 $t \in I$ 成立，则称 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 是可比较的.

$u'' = 0$ 在边界条件 (2) 下的 Green 函数为

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}(\beta+\alpha t)(\delta+\gamma(1-s)), & 0 \le t \le s \le 1, \\ \dfrac{1}{\Delta}(\beta+\alpha s)(\delta+\gamma(1-t)), & 0 \le s < t \le 1, \end{cases}$$

其中 $\Delta = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma > 0$. 对于 $e(t) = G(t,t) = \frac{1}{\Delta}(\beta+\alpha t)(\delta+\gamma(1-t))$ ，显然有

$$0 \le G(t,s) \le e(t), \ \ t,\, s \in I, \tag{4}$$

$$M^a f(t,u) \le f(t,Mu) \le M^b f(t,u),\ \forall\ (t,u) \in J \times R^+, M > 1. \tag{5}$$

由条件 (H) 知道，对于任何实数 $0 < u_1 < u_2$ 下式成立

$$f(t,u_1) = f\left(t, \frac{u_1}{u_2}u_2\right) \le \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^a f(t,u_2) \le f(t,u_2), \tag{6}$$

即 $f(t,u)$ 关于 u 是单调增加的.

本文的主要结果为

定理 1.1 设 $f(t,u)$ 满足条件 (H), 并且 $0 < \int_0^1 e(s)f(s,1)\mathrm{d}s < \infty$, 则边值问题 (1) 和 (2) 有 $C^1(I)$ 正解.

定理 1.2 设 $f(t,u)$ 满足条件 (H), 则边值问题 (1) 和 (2) 有 $C^1(I)$ 正解的必要条件为

$$\int_0^1 f(t,e(t))\mathrm{d}t < \infty. \tag{7}$$

定理 1.3 设 $f(t,u)$ 满足条件 (H), 且 $f(t,1)$ 在 J 上恒正，则 (1) 和 (2) 不能有两个可比较的 $C^1(I)$ 解.

在上述各定理中 $e(t) = G(t,t) = \frac{1}{\Delta}(\beta+\alpha t)(\delta+\gamma(1-t))$.

2 定理 1.1 的证明

记 $E = C(I), \|\cdot\|$ 为最大值范数，取 $\theta \in (0,\frac{1}{2}), g_\theta = \min\{\frac{\beta+\alpha\theta}{\beta+\alpha}, \frac{\delta+\gamma\theta}{\delta+\gamma}\}$, 在 Banach 空间 E 中构造正锥 P_θ 和算子 A 如下:

$$P_\theta = \left\{u \in C(I) |\ u(t) \ge 0, \exists\, r > 0, u(t) \le re(t), \min_{\theta \le t \le 1-\theta} u(t) \ge g_\theta\|u\|\right\},$$

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

我们只要证明算子 A 在 P_θ 中有不动点. 以下证明分三个步骤.

2.1 A 在 P_θ 上有意义并且 $A(P_\theta) \subseteq P_\theta$

取 $\bar{e}=\max\{\max_{t\in I} e(t),1\}$, 则用 (3) 与 (5) 式得

$$f(s,e(s))\le\left(\frac{e(s)}{\bar{e}}\right)^{a}(\bar{e})^{b}f(s,1)\le(\bar{e})^{b-1}e(s)\,f(s,1),$$

于是结合题设条件得

$$\int_0^1 f(s,e(s))\mathrm{d}s\le(\bar{e})^{b-1}\int_0^1 e(s)f(s,1)\mathrm{d}s<+\infty. \tag{8}$$

对 $\forall\, u\in P_\theta, \exists\, M>1$ 使得 $u(t)\le Me(t), t\in I$, 由 (4),(5) 式得

$$\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\le e(t)\int_0^1 f(s,Me(s))\mathrm{d}s\le M^b e(t)\int_0^1 f(s,e(s))\mathrm{d}s,\ t\in I.$$

这结合 (8) 式知 A 在 P_θ 有意义，并且对 $r_1=M^b\int_0^1 f(s,e(s))\mathrm{d}s$, 有

$$Au(t)\le r_1 e(t). \tag{9}$$

又对 $u\in P_\theta$, 用 (4) 得

$$Au(t)\le\int_0^1 e(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,\ t\in I.$$

故

$$\|Au\|\le\int_0^1 e(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s. \tag{10}$$

对 $t:\theta\le t\le 1-\theta$, 有

$$\frac{G(t,s)}{e(s)}=\begin{cases}\dfrac{\gamma+\delta-\gamma t}{\gamma+\delta-\gamma}, & s\le t,\\ \dfrac{\beta+\alpha t}{\beta+\alpha s}, & t\le s.\end{cases}\ \ge\begin{cases}\dfrac{\delta+\gamma\theta}{\gamma+\delta}, & s\le t,\\ \dfrac{\beta+\alpha\theta}{\beta+\alpha}, & t\le s.\end{cases}$$

从而 $\frac{G(t,s)}{e(s)}\ge g_\theta,\ \theta\le t\le 1-\theta$, 于是

$$G(t,s)\ge g_\theta\, e(s),\ \theta\le t\le 1-\theta.$$

这与 (10) 结合得

$$\min_{\theta\le t\le 1-\theta} Au(t)\ge g_\theta\int_0^1 e(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\ge g_\theta\|Au\|. \tag{11}$$

(9) 和 (11) 说明 $Au\in P_\theta$, 从而 $A(P_\theta)\subseteq P_\theta$.

2.2 $A\colon P_\theta\longrightarrow P_\theta$ 是全连续的

对 $n\ge 2$, 定义

$$f_n(t,u)=\begin{cases}\min\left\{f(t,u),f\left(\dfrac{1}{n},u\right)\right\}, & \text{if}\ \ 0<t\le\dfrac{1}{n},\\ f(t,u), & \text{if}\ \ \dfrac{1}{n}<t<\dfrac{n-1}{n},\\ \min\left\{f(t,u),f\left(\dfrac{n-1}{n},u\right)\right\}, & \text{if}\ \ \dfrac{n-1}{n}\le t<1.\end{cases}$$

$$A_n u(t)=\int_0^1 G(t,s)f_n(s,u(s))\mathrm{d}s,\quad n\geq 2.$$

显然 $f_n(t,u)\leq f(t,u)$, $A_n\ \ (n=1,2,\cdots)$ 是 P_θ 上的全连续算子.

对 $R>1$, 令

$$B_R=\{u\in P_\theta\mid \|u\|\leq R\}.$$

则对于任意的 $u\in B_R$, 注意到 $f(t,u)$ 关于 u 的增性，当 $t\in I$ 时,

$$\begin{aligned}
&|A_n u(t)-Au(t)|\\
&=\int_0^{\frac{1}{n}} G(t,s)\left(f(s,u(s))-f_n(s,u(s))\right)\mathrm{d}s+\int_{\frac{n-1}{n}}^1 G(t,s)\left(f(s,u(s))-f_n(s,u(s))\right)\mathrm{d}s\\
&\leq 2R^b\int_0^{\frac{1}{n}} e(s)f(s,1)ds+2R^b\int_{\frac{n-1}{n}}^1 e(s)f(s,1)\mathrm{d}s\\
&\leq 2R^b\left(\int_0^{\frac{1}{n}}+\int_{\frac{n-1}{n}}^1\right)e(s)f(s,1)\mathrm{d}s. \qquad (12)
\end{aligned}$$

由条件 $e(s)f(s,1)$ 在 I 上可积知道，当 n 充分大时，(12) 式右端可以任意小，这表明 A 能够由全连续算子列 $\{A_n\}$ 一致逼近. 于是 A 是全连续算子.

2.3 A 有不动点 w

取 $0<R_1<1$ 充分小使得 $(R_1)^{a-1}\leq(\int_0^1 e(s)f(s,1)\mathrm{d}s)^{-1}$, 记

$$\Omega_1=\{u\in E\mid \|u\|<R_1\},$$

则由 (3) 和 (6) 知，对任何 $u\in P_\theta\bigcap\partial\Omega_1$, 有

$$Au(t)\leq\int_0^1 e(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leq(R_1)^a\int_0^1 e(s)f(s,1)\mathrm{d}s\leq R_1.$$

于是

$$\|Au\|\leq\|u\|,\ \forall\ u\in P_\theta\bigcap\partial\Omega_1. \qquad (13)$$

另一方面，取 R_2 充分大，使得 $g_\theta R_2>1$, 并且

$$(R_2)\geq(g_\theta)^{\frac{a}{1-a}}\left(\int_\theta^{1-\theta}G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,1)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{1-a}},$$

于是

$$(g_\theta)^a(R_2)^{a-1}\geq\left(\int_\theta^{1-\theta}G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,1)\mathrm{d}s\right)^{-1}.$$

记 $\Omega_2=\{u\in E\mid \|u\|<R_2\}$, 则对任何 $u\in P_\theta\bigcap\partial\Omega_2$, 用条件 (5) 知

$$\begin{aligned}
Au(\frac{1}{2})&=\int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geq\int_\theta^{1-\theta}G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,g_\theta\|u\|)\mathrm{d}s\\
&\geq(g_\theta R_2)^a\int_\theta^{1-\theta}G\left(\frac{1}{2},s\right)f(s,1)\mathrm{d}s\geq R_2=\|u\|.
\end{aligned}$$

由此得到

$$\|Au\| \geq \|u\|,\ \forall\ u \in P_\theta \bigcap \partial\Omega_2. \tag{14}$$

由 A 的全连续性以及 (13) 与 (14) 式，用 [9, P314] 定理 4.4 知 A 有一个不动点 $w \in P_\theta \bigcap(\Omega_2\backslash\bar{\Omega}_1)$, 它满足 $R_1 \leq \|w\| \leq R_2$.

2.4 $w(t)$ 是边值问题 (1) 和 (2) 的 $C^1(I)$ 正解

显然 A 的不动点 $w(t)$ 是 (1), (2) 的正解. 由 $w(t) \in P_\theta$ 知道存在正数 $M_w > 1$ 使得 $w(t) \leq M_w e(t)$. 由方程 (1), (5) 与 (8) 式有

$$\int_0^1 (-w''(s))\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s,w(s))\mathrm{d}s \leq (M_w)^b \int_0^1 f(s,e(s))\mathrm{d}s < +\infty.$$

即 $w''(s)$ 在 I 上可积，于是 $\lim_{t\to 1-}\big(w'(t)-w'(\frac{1}{2})\big) = \int_{\frac{1}{2}}^1 w''(s)\mathrm{d}s$ 存在，即 $\lim_{t\to 1-} w'(t)$ 存在，同理得 $\lim_{t\to 0+} w'(t)$ 存在，于是 $w(t)$ 为问题 (1) 和 (2) 的 $C^1(I)$ 解.

3 定理 1.2 的证明

设 $w(t)$ 是边值问题 (1) 和 (2) 的 $C^1(I)$ 正解. 首先讨论极限 $\lim_{t\to 0+} \frac{w(t)}{e(t)}$.

(i) 设 $w(0) \neq 0$. 假若 $e(0)=0$, 则 $\beta(\delta+\gamma)=0$, 这结合 $\Delta>0$ 知道 $\beta=0, \alpha\neq 0$. 代入 (2) 式得 $w(0)=0$. 这产生矛盾，于是 $e(0)\neq 0$.

(ii) 设 $w(0)=0$. 这时必有下述的 3 条结论

(a) $w'(0)>0$; (b) $e(0)=0$; (c) $e'(0)>0$.

由 $w(0)=0$ 以及 $w(t)$ 是正解知道 $w'(0)\geq 0$, 假若 $w'(0)=0$, 由 $w''(t)=-f(x,w(t))\leq 0$ 知道 $w'(t)$ 是 J 上的减函数，于是 $w'(t)\leq 0, t\in J$. 这与 $w(t)$ 是正解且 $w(0)=0$ 矛盾，于是 $w'(0)>0$.

假若 $\beta\neq 0$, 由 $\alpha w(0)-\beta w'(0)=0$ 得 $w'(0)=\frac{\alpha}{\beta}w(0)=0$, 这矛盾于上述结论 (a), 于是 $\beta=0$, 从而 $e(0)=0$. 从而 $\alpha\neq 0$, 于是 $e'(0)=\alpha(\delta+\gamma)>0$.

结合 (i) 与 (ii) 两种情形我们知道 $\lim_{t\to 0_+}\frac{w_1(t)}{e(t)}$ 存在是正数.

类似方法可得到极限 $\lim_{t\to 1_-}\frac{w_1(t)}{e(t)}$ 存在是正数.

由于 $w(t), e(t)$ 在 J 上是连续恒正，以及 $\frac{w(t)}{e(t)}$ 在 $t=0$, $t=1$ 点的极限都是正数，于是存在正数 M, m, $M>1>m$, 使得

$$m\,e(t) \leq w(t) \leq M\,e(t),\ t\in I. \tag{15}$$

这结合 (5) 与 $f(t,u)$ 的单调性得到

$$f(t,e(t)) \leq f(t,\frac{1}{m}w(t)) \leq m^{-b} f(t,w(t)). \tag{16}$$

由 $f(t,u)$ 非负知道 $w''(t)\leq 0, t\in J$, $w'(t)$ 在 J 上是单调减少的，而 $w(t)$ 是 $C^1(I)$ 解，于是 $w'(0+), w'(1-)$ 存在，即 $w'(t)$ 是 I 上的单调减函数，从而它的导数 $w''(t)$ 在 I 上可积. 这结合 (1) 与 (16) 得到

$$\int_0^1 f(t,e(t))\mathrm{d}t < m^{-b}\int_0^1 f(t,w(t))\mathrm{d}t = m^{-b}\int_0^1 (-w''(t))\mathrm{d}t < \infty,$$

即 (7) 式成立. 这完成了定理 1.2 的证明.

4 定理 1.3 的证明

设区间 $[t_1,t_2]\subset I$. 经过直接计算得到

$$\int_{t_1}^{t_2} G(t,s)\mathrm{d}s \ge \begin{cases} \dfrac{1}{\beta+\alpha}(t_2-t_1)\left[\beta+\dfrac{\alpha}{2}(t_2+t_1)\right]e(t), & t_2\le t\le 1,\\ \dfrac{1}{2}(t_2-t_1)e(t), & t_1\le t\le t_2,\\ \dfrac{1}{\delta+\gamma}(t_2-t_1)\left[\delta+\gamma-\dfrac{\gamma}{2}(t_1+t_2)\right]e(t), & 0\le t\le t_1.\end{cases}$$

于是存在正数 $K=K(t_1,t_2)$, 使得

$$\int_{t_1}^{t_2} G(t,s)\mathrm{d}s \ge Ke(t),\ \forall\, t\in I. \tag{17}$$

由题设知 $f(t,1)>0, t\in J$, 于是由 (3) 和 (5) 式得，对任何正数 u, 有

$$f(t,u)\ge \min\{u^b,u^a\}f(t,1)>0,\ t\in J.$$

从而当 $0<u_1<u_2$ 时

$$f(t,u_1)=f\left(t,\frac{u_1}{u_2}u_2\right)\le\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^a f(t,u_2)<f(t,u_2),$$

即当 $t\in J$ 固定时， $f(t,u)$ 关于 u 是严格单调增加的.

假定 $w_1(t),w_2(t)$ 都是方程 (1) 和 (2) 的 $C^1(I)$ 解， $w_2(t)\ge w_1(t)$. 并且 $w_1(t)\not\equiv w_2(t)$. 不妨设在 J 上某点 t_0 处使 $w_2(t_0)>w_1(t_0)$. 由 $f(t_0,u)$ 关于 u 的严格增性知 $f(t_0,w_2(t_0))>f(t_0,w_1(t_0))$, 用 $f(t,u)$ 的连续性知存在正数 $\sigma>0$ 与区间 $[t_1,t_2]\subset J$ 使得

$$f(t,w_2(t))-f(t,w_1(t))\ge\sigma,\quad t\in[t_1,t_2]. \tag{18}$$

由 $w_1(t)$ 与 $w_2(t)$ 是 (1) 和 (2) 的 $C^1(I)$ 正解得到

$$w_i(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,w_i(s))\mathrm{d}s,\quad i=1,2.$$

这结合 (17) 和 (18) 式得

$$\begin{aligned} w_2(t)-w_1(t)&=\int_0^1 G(t,s)\left(f(s,w_2(s))-f(s,w_1(s))\right)\mathrm{d}s\\ &\ge\int_{t_1}^{t_2} G(t,s)\left(f(s,w_2(s))-f(s,w_1(s))\right)\mathrm{d}s\\ &\ge\sigma Ke(t). \end{aligned} \tag{19}$$

由 (4) 和 (15) 得

$$w_1(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,w_1(s))\mathrm{d}s\le e(t)\int_0^1 f(s,Me(s))\mathrm{d}s. \tag{20}$$

利用 (19) 与 (20) 得

$$\begin{aligned} w_2(t) \geq & w_1(t) + \sigma K e(t) \geq w_1(t) + \sigma K \left(\int_0^1 f(s, Me(s)) \mathrm{d}s \right)^{-1} w_1(t) \\ = & \left(1 + \sigma K \left(\int_0^1 f(s, Me(s)) \mathrm{d}s \right)^{-1} \right) w_1(t). \end{aligned}$$

令 $b_0 = \sup\{r \mid w_2 \geq r w_1\}$, 则 $1 < b_0 < \infty$, 并且 $w_2(t) \geq b_0 w_1(t)$, $\forall\, t \in I$. 于是,

$$w_2(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, w_2(s)) \mathrm{d}s \geq \int_0^1 G(t,s) f(s, b_0 w_1(s)) \mathrm{d}s \geq (b_0)^a w_1(t).$$

而 $a > 1$, 这矛盾于 b_0 的定义，于是得到 $w_2(t) \geq w_1(t)$ 是不可能的. 同理 $w_1(t) \geq w_2(t)$ 也是不可能的. 这就证明了 (1) 和 r(2) 不可能有两个可比较的 $C^1(I)$ 解.

5 推论与有关注记

我们研究方程

$$\begin{cases} u''(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t))(u(t))^{\lambda_i} = 0, \quad 0 < t < 1, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0 = \gamma u(1) + \delta u'(1). \end{cases} \tag{21}$$

其中 $\lambda_i > 1, a_i(t) \in C(J, R^+), i = 1, 2, \cdots, n, \quad \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma > 0$.

推论 5.1 1) 若

$$0 < \int_0^1 e(s) \sum_{i=1}^{n} a_i(s) \mathrm{d}s < \infty,$$

则二阶奇异边值问题 (21) 有 $C^1(I)$ 正解;

2) 若

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} a_i(s) (e(s))^{\lambda_i} \mathrm{d}s = \infty,$$

则边值问题 (21) 没有 $C^1(I)$ 正解;

3) 若 $\sum_{i=1}^n a_i(t) > 0, t \in J$, (21) 不能有两个可比较的 $C^1(I)$ 解.

其中 $e(s) = (\beta + \alpha s)(\delta + \gamma(1-s))$.

这只要取 $f(t,u) = \sum_{i=1}^n a_i(t) u^{\lambda_i}$ ，用定理 1.1, 1.2, 1.3 即可证明.

注 2 本推论包含了 [10] 中的定理 1 为特殊情形，并且这里作了统一处理，还有解的不可比较性.

注 3 本文得到的是所述问题 $C^1(I)$ 解的存在性，也可能有多个 $C^1(I)$ 解，但它们不是可比较的. 当所述条件不满足时可能存在 $C(I)$ 解.

参考文献:

[1] TALIAFERRO S D. *A nonlinear singular boundary value problem* [J]. Nonlinear Anal., 1979, **3**: 897–904.

[2] GATICA J A, OLIKER V, WALTMAN P. *Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations* [J]. J. Differential Equations, 1989, **79**: 62–78.

[3] 韦忠礼. 负指数 Emden-Fowler 方程奇异边值问题的正解 [J]. 数学学报, 1998, **41**(3): 655–662.
WEI Zhong-li. *Positive solutions of singular boundary value problems of negative exponent Emden-Fowler equations* [J]. Acta Math. Sinica, 1998, **41**(3): 655–662. (in Chinese)

[4] ZHANG Yong. *Positive solutions of singular sub-linear Emden- Fowler boundary value problems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1994, **185**(1): 215–222.

[5] 赵增勤. 一类奇异次线性边值问题正解存在的充分必要条件 [J]. 数学学报, 1998, **41**(5): 1025–1034.
ZHAO Zeng-qin. *A necessary and suffcient condition for the existence of positive solutions to singular sublinear boundary value problems* [J]. Acta Math. Sinica, 1998, **41**(5): 1025–1034. (in Chinese)

[6] 赵增勤. 非线性奇异微分方程边值问题的正解 [J]. 数学学报, 2000, **43**(1): 179–188.
ZHAO Zeng-qin. *Positive solutions of boundary value problems for nonlinear singular differential equations* [J]. Acta Math. Sinica, 2000, **43**(1): 179–188. (in Chinese)

[7] CHENG Jian-gang, ZHANG Zhi-jun. *On the existence of positive solutions for a class of singular boundary value problems* [J]. Nonlinear Anal., 2001, **44**: 645–655.

[8] CHENG Jian-gang. *Exact number of positive solution for a class of semi-positone problems* [J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, **280**: 197–208.

[9] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.
GUO Da-jun. *Nonlinear Functional Analysis* [M]. Jinan: Shandong Sci. Tech. Publishing House, 2001. (in Chinese)

[10] 毛安民. 正指数超线性 Emden-Fowler 方程奇异边值问题的正解 [J]. 数学学报, 2000, **43**(4): 623–632.
MAO An-min. *Positive solutions of singular boundary value problems of positive exponent superlinear Emden -Fowler equations* [J]. Acta Math. Sinica, 2000, **43**(4): 623–632. (in Chinese)

Positive Solutions to Singular Super-Linear Boundary Value Problems

Zhao Zeng-qin, Wang Xin-hua
(Department of Mathematics, Qufu Normal University, Shandong 273165, China)

Abstract: This paper investigates a class of singular superlinear boundary value problems, we obtain the necessary conditions and the sufficient conditions for the existence of $C^1[0,1]$ positive solutions, and obtain that $C^1[0,1]$ positive solutions of the problems are incomparable. Lastly, we give an example satisfying the conditions.

Key words: singular boundary value problem; positive solutions; sufficient condition; necessary condition.