应用概率统计　第二十四卷
第二期　2008年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.2 Apr. 2008

双模冗余非马尔可夫模型可修系统分析 *

苏宏升　　张友鹏
(兰州交通大学自动化与电气工程学院, 兰州, 730070)

摘　要

文章采用补充变量, 将双模冗余系统的非马尔可夫模型转化为马尔可夫过程模型, 针对该模型进行可靠性估计, 比较了不计维修时系统的寿命分布, 介绍了快修条件下系统的可靠性工作特点. 牵引变压器应用研究表明这种分析方法是十分有效的.

关键词: 双模冗余, 马氏过程, 寿命估计, 快修, 牵引变压器.

学科分类号: O211, U223.

§1. 引　言

在电气化铁道牵引供电系统中, 采用牵引变压器将电力系统输送的110kV高压电能降为列车使用的27.5kV牵引网电压, 牵引负荷是国家一级负荷, 所以牵引变电所须两回输电线路供电, 且在牵引变电所中设置两台同型号变压器, 根据情况可安排两台并列运行或单台运行[1]. 并列运行时两台变压器同时工作, 各自承担负荷的一半, 当一台变压器故障时另一台变压器重负荷运行; 单台运行时的情况是当一台变压器运行时另一台变压器冷备, 工作变压器故障时, 备用变压器自动投入. 传统的可靠性分析方法是将变压器的维修时间按指数分布考虑且不区分重负荷时的情况[2]. 文[3]虽然考虑了维修时间为一般分布时的情形, 但由于一方面涉及到的可靠性指标较少, 另一方面是没有进行可靠性估计, 因而应用受到限制. 为了准确地估计两变压器的使用寿命, 本文将变压器大修、检修时的停运状态均考虑为故障, 修理时间按一般分布去考虑, 即认为变压器维修时间一般不服从指数分布. 由此建立的系统为非马尔可夫模型, 需采用补充变量法将其转换为马尔可夫模型, 以便分析和描述.

§2. 系统可靠性数学分析

2.1　一般情形

模型描述如下:

系统由两个同型部件组成, 只要有1个部件完好, 系统就完好, 两个部件都故障, 系统就故障. 设有一组修理工, 修理时间服从一般分布, 故障单元修复后重新恢复工作, 系统又回

*兰州交通大学“青兰”工程基金资助(QA-06-19A).
本文2004年11月23日收到, 2006年1月10日收到修改稿.

《应用概率统计》版权所有

到正常状态. 若一个单元尚未修好, 另一个单元又故障, 则修理规则为谁先坏先修谁. 假定母线联络可靠. 为便于分析, 定义如下:

定义0状态表示两个部件完好; 1状态表示1个单元故障, 另1个单元正常; 2状态表示两个单元故障, 即系统在失效状态. 部件寿命和修理时间是相互独立的随机变量, 且开始时部件都是新的. 因修理时间为任意分布, 因此引入补充变量$X(t)$: 当系统在1状态或者2状态时, $X(t)$表示时刻t正在修理的部件已经修理了多长时间; 当在0状态时, 没有故障部件的修理, $X(t)$可以不考虑. 假定寿命分布服从指数分布, 修理后的元件跟新的一样. 令$S(t)$表示系统t时刻所处的状态, 则$\{S(t), X(t), t \geq 0\}$是一个连续时间广义马氏过程, 即在任意时刻t, 当给定$S(t), X(t)$的具体数值, 则过程$\{S(t), X(t), t \geq 0\}$在时刻t以后的概率规律与时刻t以前该过程的历史无关[4].

按惯例, 设部件1的失效率为λ_1, 部件2的失效率为λ_2, 重负荷时的失效率λ_3, 则有$\lambda_3 > \lambda_2$, $\lambda_3 > \lambda_1$; 设部件寿命遵从指数分布$F(t)$, 均值$\lambda^{-1} \leq \infty$; 修理时间遵从一般分布$G(t)$, 且存在密度函数$g(t)$, 均值$u^{-1} \leq \infty$. 状态转移如图1所示.

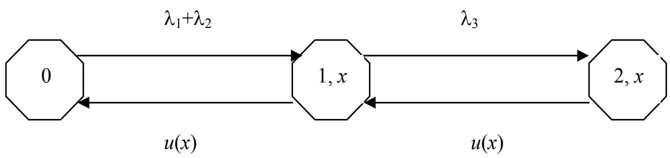

图1 $\{S(t), X(t)\}$状态转移图

由可靠性知识[4]有:

$$G(x) = 1 - \exp\Big[-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big], \tag{2.1}$$

$$g(x) = \mu(x)[1 - G(x)] = \mu(x)\exp\Big[-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau\Big]. \tag{2.2}$$

拉氏(Laplace, L)变换后得:

$$g(s) = \int_0^\infty g(x)\exp(-sx)\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

对任意的$t \geq 0, x \geq 0$, 定义

$$\begin{cases} p_0(t) = p\{S(t) = 0\}; \\ p_1(t,x)\mathrm{d}x = p\{S(t) = 1, x < x(t) \leq x + \mathrm{d}x\}; \\ p_2(t,x)\mathrm{d}x = p\{S(t) = 2, x < x(t) \leq x + \mathrm{d}x\}. \end{cases} \tag{2.4}$$

根据状态转移图和可靠性数学理论[3, 4], 可写出如下形式的Kolmogorov偏微积分方程组, 并在此基础上推导出稳态可用度、故障频度和更新频度:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -(\lambda_1 + \lambda_2)p_0(t) + \int_0^\infty p_1(t,x)\mu(x)\mathrm{d}x, \tag{2.5}$$

《应用概率统计》版权所有

$$\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial x}=-p_1(t,x)[\mu(x)+\lambda_3], \tag{2.6}$$
$$\frac{\partial p_2(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial p_2(t,x)}{\partial x}=-p_2(t,x)\mu(x)+p_1(t,x)\lambda_3. \tag{2.7}$$

边界条件:

$$\begin{cases} p_1(t,0)=(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t)+\int_0^\infty p_2(t,x)\mu(x)\mathrm{d}x; \\ p_2(t,0)=0. \end{cases} \tag{2.8}$$

初始条件:

$$p_0(0)=1, \qquad p_1(0,x)=0, \qquad p_2(0,x)=0. \tag{2.9}$$

系统存在的3种可能状态必然出现其中之一, 因此有

$$p_0(t)+\int_0^\infty p_1(t,x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty p_2(t,x)\mathrm{d}x=1. \tag{2.10}$$

经L变换后, 由以上条件可计算出$p_0(s), p_1(s,x), p_2(s,x)$

$$p_0(s)=\frac{1-g(s)+g(s+\lambda_3)}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]}, \tag{2.11}$$
$$p_1(s,x)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)[1-G(x)]\exp[-(s+\lambda_3)x]}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]}, \tag{2.12}$$
$$p_2(s,x)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)[1-G(x)]\exp(-sx)[1-\exp(-\lambda_3 x)]}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]}. \tag{2.13}$$

系统瞬时有效度为$A(t)=p_0(t)+\int_0^\infty p_1(t,x)\mathrm{d}x$. 作L变换, 并将(2.11), (2.12)代入得

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_0^\infty e^{-st}A(t)\mathrm{d}t=p_0(s)+\int_0^\infty p_1(s,x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{[1-g(s)+g(s+\lambda_3)](s+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}{\{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]\}(s+\lambda_3)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

根据L变换的性质和洛比塔法则, 稳态有效度为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s\to 0} sA(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{[1-g(s)+g(s+\lambda_3)](s+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}{\{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]\}(s+\lambda_3)} \\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\mu+\mu(\lambda_3-\lambda_1-\lambda_2)g(\lambda_3)}{(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_3+\lambda_3\mu g(\lambda_3)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

系统0, 1, 2状态的稳态概率:

$$p_0=\lim_{t\to\infty} p_0(t)=\lim_{s\to 0} sp_0(s)=\frac{ug(\lambda_3)}{ug(\lambda_3)+\lambda_1+\lambda_2}, \tag{2.16}$$
$$p_1=\lim_{t\to\infty} p_1(t)=\lim_{s\to 0} sp_1(s)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)u[1-g(\lambda_3)]}{\lambda_3[ug(\lambda_3)+\lambda_1+\lambda_2]}, \tag{2.17}$$
$$p_2=\lim_{t\to\infty} p_2(t)=\lim_{s\to 0} sp_2(s)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\{\lambda_3-u[1-g(\lambda_3)]\}}{\lambda_3[ug(\lambda_3)+\lambda_1+\lambda_2]}. \tag{2.18}$$

《应用概率统计》版权所有

稳态有效度为$A=p_0+p_1$; 将(2.16), (2.17)代入得到与(2.15)一致的结果.

系统的故障频度

$$m_f(s)=\int_0^{\infty}p_1(s,x)\lambda_3\mathrm{d}x=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_3[1-g(s+\lambda_3)]}{[(s+\lambda_1+\lambda_2)(1-g(s))+sg(s+\lambda_3)](s+\lambda_3)}.$$

根据L变换的性质和洛比塔法则, 系统的稳态故障频度

$$m_f=\lim_{s\to 0}sm_f(s)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\mu[1-g(\lambda_3)]}{\lambda_1+\lambda_2+\mu g(\lambda_3)}. \tag{2.19}$$

系统的更新频度

$$m_r(s)=\int_0^{\infty}p_2(s,x)\mu(x)\mathrm{d}x=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)g(s+\lambda_3)}{(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]+sg(s+\lambda_3)}. \tag{2.20}$$

根据L变换的性质和洛比塔法则, 系统的稳态更新频度

$$m_r=\lim_{s\to 0}sm_r(s)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\mu g(\lambda_3)}{\lambda_1+\lambda_2+\mu g(\lambda_3)}. \tag{2.21}$$

为求系统的可靠度$R(t)$, 在基本模型中令故障状态2为过程$\{S(t),X(t),t\geq 0\}$的吸收态. 即一旦系统进入该状态, 过程就终止. 这样过程$\{S(t),X(t),t\geq 0\}$演变为吸收状态的连续时间广义马尔可夫过程.状态转移如图2所示.

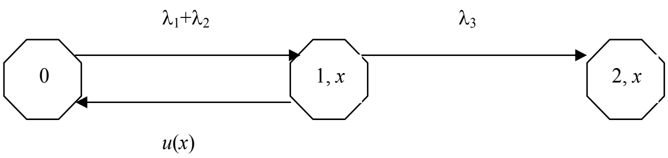

图2 吸收$\{S(t),X(t)\}$状态转移图

根据图2, 方程如下:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t)+\int_0^{\infty}p_1(t,x)\mu(x)\mathrm{d}x, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial x}=-p_1(t,x)[\mu(x)+\lambda_3], \tag{2.23}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t)=p_1(t,0). \tag{2.24}$$

解之得:

$$p_0(s)=\frac{1}{s+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}, \tag{2.25}$$

$$p_1(s,x)=\frac{(\lambda_1+\lambda_3)[1-G(x)]\exp[-(s+\lambda_3)x]}{s+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}. \tag{2.26}$$

《应用概率统计》版权所有

系统的可靠度

$$R(s)=p_0(s)+\int_0^\infty p_1(s,x)\mathrm{d}x=\frac{s+\lambda_3+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}{(s+\lambda_3)\{s+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]\}}. \tag{2.27}$$

系统的平均无故障工作时间

$$\mathrm{MTBF}=\int_0^\infty R(t)\mathrm{d}t=\lim_{s\to 0}R(s)=\frac{\lambda_3+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(\lambda_3)]}{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(\lambda_3)]}. \tag{2.28}$$

上述情况下稳态性能指标与分布有关, 因此不易计算. 但当维修时间为指数分布时可简化计算, 仅将$g(\lambda)=\mu/(\lambda+\mu)$代入前述公式即可, 例如计算(2.28), 有

$$\mathrm{MTBF}=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\mu}{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)}. \tag{2.29}$$

若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, 则

$$\mathrm{MTBF}=\frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2}. \tag{2.30}$$

以上各式中, 若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, λ_3为重负荷时的失效率, 则系统演化为变压器并联运行时的行为; 若$\lambda_1=\lambda>\lambda_2$, $\lambda_3=\lambda$, $0<\lambda_2<\lambda$, 则系统演化为热备用时的行为; 若$\lambda_1=\lambda_3=\lambda$, $\lambda_2=0$, 则系统演化为冷备旁待冗余单元系统.

2.2 可靠性数学估计

下面对主要可靠性能指标进行估计. 在进行估计之前, 设μ为指数分布时的修复率, G为剩余寿命; $\mu_e(t)$为一般分布时的修复风险率函数, 引入平衡剩余寿命$G_e(t)$. 设$G_e(t)\geq G$, 即对于平衡剩余寿命大于指数分布时的那些分布类, 则$g_e(t)=\mu\overline{G}(t)$, 推出$\mu_e(t)\geq\mu$, 因此

$$G_e(t)=1-\exp\Big(-\int_0^x\mu_e(x)\mathrm{d}x\Big)\geq 1-e^{-\mu x}. \tag{2.31}$$

由LS变换的性质[5]得:

$$g_e(\lambda)=\mu\overline{G}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathrm{d}G_e(x)\geq\int_0^\infty e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x=\frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{2.32}$$

因而

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\leq 1-g(\lambda)=\lambda\overline{G}(\lambda)\leq\frac{\lambda}{\mu}, \tag{2.33}$$

$$\frac{\mu-\lambda}{\lambda}\leq g(\lambda)\leq\frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{2.34}$$

利用公式(2.33)(2.34)可对前述指标进行估计. 例如对(2.28)有

$$\frac{\mu+\lambda_1+\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_3}\leq\mathrm{MTBF}\leq\frac{\lambda_3+\lambda_1+\lambda_2+\mu}{(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_3}.$$

若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, 则

$$\frac{2\lambda+\mu}{2\lambda^2}\leq\mathrm{MTBF}\leq\frac{3\lambda+\mu}{2\lambda^2}. \tag{2.35}$$

《应用概率统计》版权所有

《应用概率统计》版权所有

2.3 不计维修时的情形

下面考虑不计维修情况, 则$g(t)=0$, 系统退化为马氏过程, 由(2.27)(2.28)式我们有:

$$R(t)=\frac{\lambda_3}{\lambda_3-(\lambda_1+\lambda_2)}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_3}e^{-\lambda_3 t},\qquad \mathrm{MTBF}=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}.$$

若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, 则

$$R(t)=2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t},\qquad \mathrm{MTBF}=\frac{3}{2\lambda}.$$

这与并联运行时平均首次无故障时间是一致.

2.4 快修条件下的情形

令X,Y分别表示系统在进入吸收状态S2前分别在状态S0和S1的总的逗留时间, 它们是某些间歇随机变量的和, 为求X的分布, 我们必须扣除系统在状态1的总的逗留时间, 即系统处于状态1时应保持日历时间不变, 根据导数的物理意义, 只要在状态1的微分方程中令对t的导数为零即可, 于是由图2可得:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t)+\int_0^\infty p_1(t,x)\mu(x)\mathrm{d}x, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial p_1(t,x)}{\partial x}=-p_1(t,x)[\mu(x)+\lambda_3], \tag{2.37}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t)=p_1(t,0). \tag{2.38}$$

解之得:

$$\mathsf{P}(X>t)=p_0(t)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(\lambda_3)]t}. \tag{2.39}$$

同理, 系统在1态的停留时间Y的分布, 必须扣除在系统0态的逗留时间, 为此在状态0的方程中令$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\cdot p_0(t)=0$, 注意到这时系统必须先进入状态1, $1+(\lambda_1+\lambda_2)p_0(t)=p_1(t,0)$, 即根据图2, 可解得

$$p_1(s,x)=p_1(s,0)e^{-(s+\lambda_3)x}\overline{G}(x)=[1+(\lambda_1+\lambda_2)p_0(s)]e^{-(s+\lambda_3)x}\overline{G}(x), \tag{2.40}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)p_0(s)=[(1+\lambda_1+\lambda_2)p_0(s)]g(s+\lambda_3), \tag{2.41}$$

$$\int_0^\infty p_1(s,x)\mathrm{d}x=\frac{1}{s+\lambda_3}, \tag{2.42}$$

$$\mathsf{P}(Y>t)=e^{-\lambda_3 t}. \tag{2.43}$$

下面讨论快修条件下系统的可靠度渐进分布, 寿命为指数分布时, 快修意味着$\aleph=[1-g(\lambda_3)]\to 0$, 又系统首次失效时间$Z=X+Y$, 易知$\mathsf{P}(Y>t)=\exp(-\lambda_3 t)$. 于是

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathsf{P}(Z>t)=\int_0^\infty \mathsf{P}(X+x>t)\lambda_3\exp(-\lambda_3 x)\mathrm{d}x \\ &= \exp[-\aleph(\lambda_1+\lambda_2)t]\frac{\lambda_3}{\lambda_3-\aleph(\lambda_1+\lambda_2)}\approx\exp[-\aleph(\lambda_1+\lambda_2)t]. \end{aligned}$$

结果表明, 由于快修, 系统主要逗留在S0态, 一进入S1很快又返回到S0. 所以系统首次失效时间分布渐进于系统在状态S0的逗留时间分布.

§3. 实　例

1) 对牵引变电所使用的两变压器并联系统, 并联运行时变压器的失效率λ, 重负荷时的失效率λ_3, 由(2.15)(2.19)(2.21)(2.27)(2.28)可得

$$A=\frac{2\lambda\mu+\mu(\lambda_3-2\lambda)g(\lambda_3)}{2\lambda\lambda_3+\lambda_3\mu g(\lambda_3)},\tag{3.1}$$

$$m_f=\frac{2\lambda\mu[1-g(\lambda_3)]}{2\lambda+ug(\lambda_3)},\tag{3.2}$$

$$m_r=\frac{2\lambda\mu g(\lambda_3)}{2\lambda+ug(\lambda_3)},\tag{3.3}$$

$$R(s)=\frac{s+\lambda_3+2\lambda[1-g(s+\lambda_3)]}{(s+\lambda_3)\{s+2\lambda[1-g(s+\lambda_3)]\}},\tag{3.4}$$

$$\text{MTBF}=\frac{\lambda_3+2\lambda[1-g(\lambda_3)]}{2\lambda\lambda_3[1-g(\lambda_3)]}.\tag{3.5}$$

若$\lambda=\lambda_3$, 即得传统意义上并联系统的可靠性指标.

2) 对于牵引变电站使用的变压器冷备旁待冗余系统, 可选$\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=\lambda$, 由(2.15)(2.19)(2.21)(2.27)(2.28)式, 则

$$A=\frac{\mu}{\lambda+\mu g(\lambda)},\tag{3.6}$$

$$m_f=\frac{\lambda\mu[1-g(\lambda)]}{\lambda+ug(\lambda)},\tag{3.7}$$

$$m_r=\frac{\lambda\mu g(\lambda)}{\lambda+ug(\lambda)},\tag{3.8}$$

$$R(s)=\frac{s+\lambda+\lambda[1-g(s+\lambda)]}{(s+\lambda)\{s+\lambda[1-g(s+\lambda)]\}},\tag{3.9}$$

$$\text{MTBF}=\frac{2-g(\lambda)}{\lambda[1-g(\lambda)]}.\tag{3.10}$$

§4. 结 束 语

本文介绍的电力牵引变压器运行时的寿命分布问题, 可以较好的评价该类模型的可靠性寿命参数公式, 为系统的理论分析提供依据. 它不仅用来描述牵引供电系统, 而且也可用于电力系统双回输电线路, 国家正式铁路干线上使用的铁路微机联锁系统双机冗余等的可靠性估计, 采用这种方法比传统方法更实际, 客观, 精确, 因而具有广泛的适用性.

附　录

1. 公式(2.14)推导如下

《应用概率统计》版权所有

提示: 先对右边积分项积分, 再与第1项相加. 积分过程采用了分部积分法, 利用了分布函数的性质及拉氏变换性质.

$$
\begin{aligned}
\text{积分}\quad & \int_0^\infty p_1(s,x)\mathrm{d}x \\
= & \int_0^\infty \frac{(\lambda_1+\lambda_2)[1-G(x)]\exp[-(s+\lambda_3)x]}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]}\mathrm{d}x \\
= & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]}\int_0^\infty [1-G(x)]\exp[-(s+\lambda_3)x]\mathrm{d}x \\
= & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]} \\
& \cdot\left\{\int_0^\infty \exp[-(s+\lambda_3)x]\mathrm{d}x-\int_0^\infty G(x)\exp[-(s+\lambda_3)x]\mathrm{d}x\right\} \\
= & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]} \\
& \cdot\left\{\frac{1}{s+\lambda_3}+\frac{1}{s+\lambda_3}\int_0^\infty G(x)\mathrm{d}\exp[-(s+\lambda_3)x]\right\} \\
= & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]} \\
& \cdot\left\{\frac{1}{s+\lambda_3}+\frac{1}{s+\lambda_3}\left\{[G(x)\exp[-(s+\lambda_3)x]|_0^\infty-\int_0^\infty \exp[-(s+\lambda_3)x]\mathrm{d}G(x)\right\}\right\} \\
= & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]} \\
& \cdot\left\{\frac{1}{s+\lambda_3}-\frac{1}{s+\lambda_3}\int_0^\infty g(x)\exp[-(s+\lambda_3)x]\mathrm{d}x\right\} \\
= & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]}\left\{\frac{1}{s+\lambda_3}-\frac{g(s+\lambda_3)}{s+\lambda_3}\right\} \\
= & \frac{(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}{\{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]\}(s+\lambda_3)}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
A(s) &= p_0(s)+\int_0^\infty p_1(s,x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1-g(s)+g(s+\lambda_3)}{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]} \\
&\quad +\frac{(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}{\{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]\}(s+\lambda_3)} \\
&= \frac{[1-g(s)+g(s+\lambda_3)](s+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}{\{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]\}(s+\lambda_3)}.
\end{aligned}
$$

证毕. $\square$

2. 公式(2.15)推导过程如下

《应用概率统计》版权所有

提示: 利用拉氏变换的性质和洛比塔法则及公式(2.3), 稳态有效度为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s\to 0} sA(s) = \lim_{s\to 0}\frac{[1-g(s)+g(s+\lambda_3)](s+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s+\lambda_3)]}{\{sg(s+\lambda_3)+(s+\lambda_1+\lambda_2)[1-g(s)]\}(s+\lambda_3)} \\ &= \frac{g(\lambda_3)\lambda_3+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(\lambda_3)]}{g(\lambda_3)\lambda_3+\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)\Big\{\lim\limits_{s\to 0}[1-g(s)]/s\Big\}} \\ &= \frac{g(\lambda_3)\lambda_3+(\lambda_1+\lambda_2)[1-g(\lambda_3)]}{g(\lambda_3)\lambda_3+\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)\lim\limits_{s\to 0} g'(s)} \\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)\mu+\mu(\lambda_3-\lambda_1-\lambda_2)g(\lambda_3)}{(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_3+\lambda_3\mu g(\lambda_3)}. \end{aligned}$$

式中:

$$\mu = 1\Big/\Big[-\lim_{s\to 0} g'(s)\Big] = 1\Big/\Big[\int_0^\infty xg(x)\mathrm{d}x\Big].$$

证毕. □

3. 公式(2.19)(2.21)的推导过程同上.

参 考 文 献

[1] 曹建猷, 电气化铁道供电系统, 中国铁道出版社, 1983.

[2] 郭永基, 电力系统可靠性原理和应用, 清华大学出版社, 1984.

[3] 董海鹰, 李军, 薛钧义, 双机冗余系统的非马尔可夫模型研究, 铁道学报, **23(6)**(2001), 35–38.

[4] 曹晋华, 陈侃, 可靠性数学引论, 高等教育出版社(修订版), 2006.

[5] 丁定浩, 可靠性与维修性工程, 电子工业出版社, 1986.

Non-Markov Repairable Model Analysis on Two Modular Redundant Systems

Su Hongsheng Zhang Youpeng

(*School of Automatic and Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, 730070*)

Two-module redundant system's non-Markov model is converted to Markov process model by the use of supplementary variable technique in this paper, then according to the proposed model, reliability evaluation of the system life is implemented, and life distribution of the system under no maintenance is also compared, and also the work characteristics under quick maintenance are presented in detail. Application studies in the traction transformer indicate that the analysis approach is quite effective.

Keywords: Two modular redundancy, Markov process, life estimation, quick maintenance, traction transformer.

AMS Subject Classification: 60J27.

《应用概率统计》版权所有