应用概率统计　第二十三卷
第二期　2007 年 5 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 2 May 2007

弱相依数据中的分组经验 Cressie-Read 似然方法 *

李高荣　　薛留根
(北京工业大学应用数理学院，北京， 100022)

摘　要

本文考虑一般的弱相依数据, 提出了分组经验 Cressie-Read 似然方法. 得到了分组经验 Cressie-Read 似然参数估计的强收敛性、渐近正态性和其分组经验 Cressie-Read 统计量的渐近 χ^2 性.

关 键 词: 分组经验 Cressie-Read 统计量，弱相依数据，渐近正态性，经验似然.
学 科 分 类 号: O212.7.

§1. 引　言

经验似然是 Owen[1] 在完全样本下提出的一种非参数统计推断方法，它有类似于 Bootstrap 的抽样特性，它通常对总体分布的类型要求比较弱，仅仅知道一些附加信息 (如总体的一阶矩、二阶矩). 我们首先概述由 Owen[1,2] 和 Qin 与 Lawless[3] 提出的独立数据的经验似然方法. 设 $X_1,\cdots,X_N$ 是独立同分布的 d 维随机向量，分布函数为 $F(x,\theta)$, 其中 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_p)^\tau$ 是 p 维未知参数向量， τ 表示向量或矩阵的转置. 如果对 θ 和 $F(x,\theta)$ 认识甚少，只知道无偏估计函数 $g(X,\theta)=(g_1(X,\theta),\cdots,g_r(X,\theta))^\tau$, 其中 $g_1(X,\theta),\cdots,g_r(X,\theta)$ 已知且函数地独立，满足 $\mathsf{E}_F\{g(X,\theta)\}=0$, $r\ge p$. 在半参数模型中， Qin 与 Lawless[3] 定义经验对数似然比函数为

$$l_E(\theta)=\sup\Big\{\ln\prod_{i=1}^N Np_i\,\Big|\,\sum_{i=1}^N p_i=1,\ p_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^N p_ig(X_i,\theta)=0\Big\}.$$

由 Lagrange 乘子法容易得到

$$l_E(\theta)=-\sum_{i=1}^N \ln[1+t^\tau g(X_i,\theta)], \tag{1}$$

其中 Lagrange 乘子 $t(\theta)=(t_1(\theta),\cdots,t_r(\theta))^\tau$ 满足

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\frac{g(X_i,\theta)}{1+t^\tau g(X_i,\theta)}=0.$$

实际上， $\ln\prod_{i=1}^N Np_i=\ln\prod_{i=1}^N p_i-\ln\prod_{i=1}^N(1/N)$ 可看成是 $(p_1,\cdots,p_N)^\tau$ 到点 $(1/N,\cdots,1/N)^\tau$ 的似然距离. Owen[4] 和 Baggerly[5] 提出可以用经验 Cressie-Read 似然距离代替经验似然距离，即

* 基金项目：国家自然科学基金资助项目 (10571008), 北京市自然科学基金资助项目 (1072004), 北京市属市管高等学校人才强教计划和河南省自然科学基金资助项目 (0511013300).
本文 2005 年 8 月 29 日收到.

经验 Cressie-Read 似然统计量为

$$\mathrm{CR}_\lambda(\theta)=\inf\Big\{\frac{2}{\lambda(1+\lambda)}\sum_{i=1}^N\{(Np_i)^{-\lambda}-1\}\,\Big|\,\sum_{i=1}^N p_i=1,\ \sum_{i=1}^N p_i g(X_i,\theta)=0\Big\},\tag{2}$$

其中 λ 为参数， p_i 表示分配给每个观测值的概率元．对于 $\lambda\in\{-1,0\}$ 的退化情况，可以通过取极限进行处理．

当 λ 取不同的值时， $\mathrm{CR}_\lambda(\theta)$ 对应不同的经验统计量 [4,P.67]，如当 $\lambda\to 0$ 时，对应的是由 Owen[1] 所定义的经验对数似然比统计量；当 $\lambda\to -1$ 时，对应的是 Kullback-Liebler 距离统计量；当 $\lambda=-2$ 时，对应的是 Euclidean 对数似然统计量；当 $\lambda=1$ 时，对应的是 Pearson χ^2 统计量；当 $\lambda=-1/2$ 时，对应 Freeman-Tukey 统计量．Baggerly[5] 首次把经验 Cressie-Read 统计量用于推断，并且证明了无论 λ 取任何值，在一定条件下， $\mathrm{CR}_\lambda(\theta_0)\xrightarrow{d}\chi^2_d$，其中 $\xrightarrow{d}$ 表示依分布收敛．同时也得到在所有经验 Cressie-Read 族的成员中，只有经验似然具有 Bartlett 纠偏性．Lin[6] 利用分组经验 Euclidean 似然方法研究了一般相依数据参数估计的渐近性质和分组经验 Euclidean 似然统计量的渐近 χ^2 性．Bravo[7] 利用分组经验 Cressie-Read 检验统计量研究了 α-混合过程的推断问题．

通过 Lagrange 乘子法，由 (2) 式定义的经验 Cressie-Read 似然统计量可表为

$$\mathrm{CR}_\lambda(\theta)=N\overline{g}^\tau(\theta)\widehat{\Sigma}^{-1}(\theta)\overline{g}(\theta),\tag{3}$$

其中 $\overline{g}(\theta)=(1/N)\sum_{i=1}^N g(X_i,\theta)$，$\widehat{\Sigma}(\theta)=(1/N)\sum_{i=1}^N g(X_i,\theta)g^\tau(X_i,\theta)$．

本文的主要目的是利用分组经验 Cressie-Read 似然方法研究一般弱相依数据 (如 α-混合、φ-混合和 ρ-混合等混合相依数据)，得到分组经验 Cressie-Read 似然的参数估计有强收敛性，渐近正态性和其分组经验 Cressie-Read 似然比统计量的渐近 χ^2 性．研究表明，分组经验 Cressie-Read 似然方法比原经验似然方法更渐近有效．并由本文定理 2 可知 θ 估计的渐近方差与 λ 的取值无关．

本文对于一般相依数据，利用分组经验 Cressie-Read 似然方法研究 $r\ge p$ 情况下 θ 的估计问题．本文结构如下，在第二节介绍分组经验 Cressie-Read 似然方法，第三节和第四节给出本文的主要结果，在第五节详细证明了本文的主要结果．

§2. 分组经验 Cressie-Read 似然方法

设 $X_1,\cdots,X_N$ 来自 d 维未知分布 $F(x,\theta)$ 的相依观测，关于 θ 和 $F(x,\theta)$ 的信息由无偏估计函数 $g(X,\theta)$ 给出，即满足 $\mathsf{E}_F\{g(X,\theta)\}=0$，其中 $X_i\in R^d$，$i=1,\cdots,N$，$\theta\in\Theta\subset R^p$，$g(X,\theta):R^d\times\Theta\to R^r$，$r\ge p$．

类似于 Politis 与 Romano[8] 和 Kitamura[9]，构造分组数据．令 $L=L(N)$ 和 $M=M(N)$ 为仅依赖于 N 的正整数，满足 $L\le M$，$L=O(M)$，$M=O(N^{1-1/\delta})$，$\delta>1$，记 $B_{i,M,L}=(X_{(i-1)L+1},\cdots,X_{(i-1)L+M})^\tau$，$i=1,\cdots,Q$，$Q=[(N-M)/L]+1$，其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分．

于是，我们得到观测数据组 $B_{i,M,L}$, 其中 M 是数据组的窗宽， L 是数据组起始点之间的分割，且有 $L=O(N^{1-1/\delta})$, $Q=O(N^{1/\delta})$.

需要注意　记 $A_N=QM/N$. 如果 $L=M$ 时，对应的是 Carlstein[10] 的没有重叠的情况，即有 $A_N=1$; 如果 $L=1$ 时，对应的是 Künsch[11] "完全" 重叠的情况.

为方便，记 $B_{i,M,L}$ 为 B_i, 我们用观测数据组 B_i 的函数 $\varphi_i(B_i,\theta):R^{rM}\times\Theta\to R^r$ 构成分组经验 Cressie-Read 似然统计量，其中函数有如下特殊形式

$$\varphi_i(B_i,\theta)=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}g(X_{(i-1)L+j},\theta).$$

为简单记 $\varphi_i(B_i,\theta)=\varphi_i(\theta)$, 并定义分组的经验 Cressie-Read 似然函数为

$$\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)=\inf\Big\{\frac{2}{\lambda(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{Q}\{(Qp_i)^{-\lambda}-1\}\,\Big|\,\sum_{i=1}^{Q}p_i=1,\ \sum_{i=1}^{Q}p_i\varphi_i(\theta)=0\Big\}. \tag{4}$$

利用 Lagrange 乘子法， (4) 式的解为

$$\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)=\frac{2}{\lambda(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{Q}[\{1+s+t^\tau\varphi_i(\theta)\}^{\lambda/(1+\lambda)}-1], \tag{5}$$

并得到 $p_i=(1/Q)\cdot\{1+s+t^\tau\varphi_i(\theta)\}^{-1/(1+\lambda)}$. 其中 s 和向量 $t=(t_1,\cdots,t_r)^\tau$ 由下面两个方程决定

$$\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}\{1+s+t^\tau\varphi_i(\theta)\}^{-1/(1+\lambda)}=1,$$
$$\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}\{1+s+t^\tau\varphi_i(\theta)\}^{-1/(1+\lambda)}\varphi_i(\theta)=0.$$

由文献 [7] 定理 1 的证明，我们类似可以得到

$$A_N^{-1}\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)=N\overline{\varphi}^\tau(\theta)\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta)\overline{\varphi}(\theta)+o_P(1), \tag{6}$$
$$s=\frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)M\overline{\varphi}^\tau(\theta)\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta)\overline{\varphi}(\theta)+O_P(N^{-1/2}\zeta_Q), \tag{7}$$
$$t(\theta)=M(1+\lambda)\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta)\overline{\varphi}(\theta)+\zeta_Q,\qquad \zeta_Q=o_P(N^{-1/2}M), \tag{8}$$

其中 $\overline{\varphi}(\theta)=(1/Q)\sum\limits_{i=1}^{Q}\varphi_i(\theta)$, $\widehat{\Sigma}_Q(\theta)=(M/Q)\sum\limits_{i=1}^{Q}\varphi_i(\theta)\varphi_i^\tau(\theta)$.

如果 $\widehat{\theta}$ 满足 $\mathrm{CR}_\lambda^B(\widehat{\theta})=\inf\limits_{\theta\in\Theta}\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)$, 我们称 $\widehat{\theta}$ 为 θ 的分组经验 Cressie-Read 似然估计.

§3.　强收敛性和渐近正态性

定理 1　若存在 $\beta>0$, 使 $2\beta<1/\delta$, $1-2\beta<1/\delta$, $M=o(N^{1/2-1/(2\delta)})$ 成立. 并满足正则条件:

(i)　$\overline{\varphi}(\theta_0)=O(Q^{-1/2}(\log\log Q)^{1/2})$ a.s., 其中 θ_0 是 θ 的真值;

(ii)　$\lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{Var}\Big(N^{-1/2}\sum\limits_{i=1}^{N}g(X_i,\theta)\Big)=\Sigma(\theta)$, 其中 $\Sigma(\theta)$ 是正定矩阵;

(iii) 在 θ_0 的某领域内, $\widehat{\Sigma}_Q(\theta)=(M/Q)\sum\limits_{i=1}^{Q}\varphi_i(\theta)\varphi_i^\tau(\theta)\xrightarrow{\text{a.s.}}\Sigma(\theta)$, $\partial\overline{\varphi}(\theta)/\partial\theta\xrightarrow{\text{a.s.}}\Lambda(\theta)=\mathsf{E}(\partial g(X,\theta)/\partial\theta)$, 其中 $\mathrm{rank}(\Lambda(\theta))=p$;

(iv) 在 θ_0 的某领域内, $\partial g(X,\theta)/\partial\theta$, $\partial^2 g(X,\theta)/(\partial\theta\partial\theta^\tau)$ 连续, 且 $|\partial g_l(X,\theta)/\partial\theta_j|\le K_{1l}(x)$, $|\partial^2 g_l(X,\theta)/(\partial\theta_k\partial\theta_j)|\le K_{2l}(x)$, $|g_l(X,\theta)|\le K_{3l}(x)$, 其中 $K_{1l}(x)$, $K_{2l}(x)$, $K_{3l}(x)$ 是可积或平方可积函数.

则当 $Q\to\infty$ 时, 以概率 1, $\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)$ 在 $\{\theta|\,\|\theta-\theta_0\|\le N^{-\beta}\}$ 的内部某点 $\widehat{\theta}$ 处达到最小值, $\widehat{\theta}\xrightarrow{\text{a.s.}}\theta_0$. 并且 $\widehat{\theta}$, $\widehat{s}$, $\widehat{t}=t(\widehat{\theta})$ 满足

$$U_{1Q}(\widehat{\theta},\widehat{s},\widehat{t})=0,\qquad U_{2Q}(\widehat{\theta},\widehat{s},\widehat{t})=1,\qquad U_{3Q}(\widehat{\theta},\widehat{s},\widehat{t})=0,\tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}
U_{1Q}(\theta,s,t)&=\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}\{1+s+t^\tau\varphi_i(\theta)\}^{-1/(1+\lambda)}\varphi_i(\theta),\\
U_{2Q}(\theta,s,t)&=\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}\{1+s+t^\tau\varphi_i(\theta)\}^{-1/(1+\lambda)},\\
U_{3Q}(\theta,s,t)&=\frac{1}{Q}\frac{1}{(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{Q}\{1+s+t^\tau\varphi_i(\theta)\}^{-1/(1+\lambda)}\Big(\frac{\partial\varphi_i(\theta)}{\partial\theta}\Big)^\tau t.
\end{aligned}$$

注 1 (1) 由文献 [8] 可知 $\{\varphi_i(\theta),i=1,2,\cdots\}$ 的相依性比 $\{X_i,i=1,2,\cdots\}$ 的弱, 所以我们可假设 $\{\varphi_i(\theta),i=1,2,\cdots\}$ 具有类似于独立随机变量的性质. 例如, 如果 $\{X_i,i=1,2,\cdots\}$ 是混合相依序列 (如 α- 混合、 φ- 混合和 ρ- 混合等), 则 $\{\varphi_i(\theta),i=1,2,\cdots\}$ 是渐近独立的 [8]. 此时, $\{\varphi_i(\theta),i=1,2,\cdots\}$ 满足重对数律 $\overline{\varphi}(\theta_0)=O(Q^{-1/2}(\log\log Q)^{1/2})$ a.s., 和强大数定律 [13], 所以满足定理 1 正则条件 (i).

(2) 定理 1 说明, 分组经验 Cressie-Read 似然估计 $\widehat{\theta}$ 属于中心为 θ_0 半径为 $N^{-\beta}$ 的邻域. 由定理 1 的条件可验证, 对固定的 N, 半径 $N^{-\beta}$ 的下确界是 $N^{-1/2}$, 即 $\inf\limits_{\delta,\beta}N^{-\beta}=N^{-1/2}$. 这给出了 $\widehat{\theta}$ 几乎处处收敛于 θ_0 的渐近阶 [6].

推论 1 设 $\beta>0$, 使 $2\beta<1/\delta$, $1-2\beta<1/\delta$, $M=o(N^{1/2-1/(2\delta)})$ 和正则条件 (ii) 、 (iv) 成立. 若 $\{X_i,i=1,2,\cdots\}$ 是 α- 混合序列, 其混合系数为 $\alpha(n)$ (或 φ- 混合序列、 ρ- 混合序列, 其混合系数分别为 $\varphi(n)$ 、 $\rho(n)$), 满足 $|g_k(X_i,\theta)|^2\le C$, a.s., 其中 $i=1,\cdots,N$, $k=1,\cdots,r$, C 是正常数, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^{1/2}(nL-M)<\infty$ (或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(nL-M)<\infty$ 、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho^{1/2}(nL-M)<\infty$), 则定理 1 的结论成立.

定理 2 在定理 1 的条件下, 有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{MQ}(\widehat{\theta}-\theta_0)\xrightarrow{d}N(0,V),\\
&\sqrt{M^{-1}Q}(\widehat{t}-0)\xrightarrow{d}N(0,U).
\end{aligned}$$

其中 $V=[\Lambda^\tau(\theta_0)\Sigma^{-1}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)]^{-1}$, $U=(1+\lambda)\Sigma^{-1}(\theta_0)[I-\Lambda(\theta_0)V\Lambda^\tau(\theta_0)\Sigma^{-1}(\theta_0)]$.

推论 2 在定理 1 的条件下，有

$$\sqrt{N}(\widehat{\theta}-\theta_0) \xrightarrow{d} N(0,V),$$
$$M^{-1}\sqrt{N}(\widehat{t}-0) \xrightarrow{d} N(0,U).$$

由定理 2 和 $M=O(N^{1-1/\delta})$, $Q=O(N^{1/\delta})$ 可直接得推论 1.

推论 3 设 $\beta>0$, 使 $2\beta<1/\delta$, $1-2\beta<1/\delta$, $M=o(N^{1/2-1/(2\delta)})$ 和正则条件 (ii) 、 (iv) 成立．若 $\{X_i, i=1,2,\cdots\}$ 是系数为 $\alpha(n)$ 的 α- 混合 (或系数为 $\varphi(n)$ 的 φ- 混合、系数为 $\rho(n)$ 的 ρ- 混合) 序列，满足 $\mathsf{E}|g_k(X_i,\theta)|^{2\delta}\le C$, a.s., 其中 $i=1,\cdots,N$, $k=1,\cdots,r$, C 是正常数，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^{1-1/\delta}(nL-M)<\infty$ (或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi^{1-1/\delta}(nL-M)<\infty$ 、 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho^{1-1/\delta}(nL-M)<\infty$), 则定理 2 的结论成立．

注 2 由定理 2 知， $\sqrt{MQ}(\widehat{\theta}-\theta_0)$ 的渐近方差 V 与 λ 的具体取值无关．容易验证，在一些正则条件下，原经验 Cressie-Read 似然估计也具有渐近正态性，然而，其渐近协方差阵为 $(\Lambda^{\tau}(\theta_0)W^{-1}\Lambda(\theta_0))^{-1}\Lambda^{\tau}(\theta_0)W^{-1}\Sigma(\theta_0)W^{-1}\Lambda(\theta_0)(\Lambda^{\tau}(\theta_0)W^{-1}\Lambda(\theta_0))^{-1}$, 其中 $W=\mathsf{E}[g(X,\theta_0)\cdot g^{\tau}(X,\theta_0)]$. 因此，分组经验 Cressie-Read 似然估计 $\widehat{\theta}$ 比原经验似然估计渐近有效．

§4. 经验 Cressie-Read 似然统计量的渐近 χ^2 分布

定理 3 若定理 1 的条件成立，则

$$A_N^{-1}\mathrm{CR}_{\lambda}^{B}(\theta_0) \xrightarrow{d} \chi^2(r).$$

由此定理， θ_0 的置信度为 $1-\alpha$ 的渐近置信域由下式确定

$$\mathsf{P}(A_N^{-1}\mathrm{CR}_{\lambda}^{B}(\theta_0)\le\chi_{\alpha}^2(r))=1-\alpha.$$

称 $R_1=A_N^{-1}\mathrm{CR}_{\lambda}^{B}(\theta_0)-A_N^{-1}\mathrm{CR}_{\lambda}^{B}(\widehat{\theta})$ 为经验 Cressie-Read 似然比统计量， $R_2=A_N^{-1}\mathrm{CR}_{\lambda}^{B}(\widehat{\theta})$ 为模型检验统计量．

定理 4 当 $H_0:\theta=\theta_0$ 成立时，在定理 1 的条件下有

$$R_1 \xrightarrow{d} \chi^2(p), \qquad R_2 \xrightarrow{d} \chi^2(r-p) \qquad (N\to\infty).$$

推论 4 (1) 若推论 3 的条件成立，则定理 3 的结论成立．(2) 若推论 3 的条件和 $H_0:\theta=\theta_0$ 成立，则定理 4 的结论成立．

注 3 在定理 3 和定理 4 中的 A_N 为修正因子，表示观测数据分组的重叠情况，如果当 $L=M$ (即没有重叠) 时，则显然 $A_N=1$.

注 4 由定理 3 和定理 4 可知，分组经验 Cressie-Read 似然方法可以用于对弱相依数据和强混合时间序列模型的非参数似然推断，但这种推断的质量依赖于参数 L 和 M 的选取．一方面，通常 L 取值越小，数据的使用更加有效．然而，数字研究 [12] 表明 $L\in[1,M]$ 选取的有效性并不明显，因此对 L 的选取不是最关键的．另一方面， M 的选取是比较困难的，在文献 [12] 中 Hall 等学者得到最优数据组窗宽是 $M\sim CN^{\alpha}$, 其中 α 依赖于 “context”, C 是凭经验决定的常数．详细论述可见文献 [7] 和 [12].

§5. 定理的证明

下面我们给出本文主要结果的详细证明.

定理 1 的证明: 记 $\varphi_i(\theta)=(\varphi_{i1}(\theta),\cdots,\varphi_{ir}(\theta))^\tau$, $\theta-\theta_0=uN^{-\beta}$, 其中 $\|u\|=1$, 对于 $\theta\in\{\theta|\|\theta-\theta_0\|=N^{-\beta}\}$, 由 Taylor 展式, 有

$$\varphi_{il}(\theta)=\varphi_{il}(\theta_0)+\frac{\partial\varphi_{il}(\theta_0)}{\partial\theta}(\theta-\theta_0)+\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^\tau A(B_i,c_{il},\theta,\theta_0)(\theta-\theta_0),\tag{10}$$

其中 $0<c_{il}<1$, $A(B_i,c_{il},\theta,\theta_0)$ 是 $p\times p$ 矩阵, 元素为 $[\partial^2\varphi_{il}(B_i,\theta_0+c_{il}(\theta-\theta_0))]/(\partial\theta_j\partial\theta_k)$, 由 (10) 式和条件 (iv) 知

$$\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}\varphi_{il}(\theta)=\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}\varphi_{il}(\theta_0)+\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}\frac{\partial\varphi_{il}(\theta_0)}{\partial\theta}(\theta-\theta_0)+O(\|\theta-\theta_0\|^2)\qquad\text{a.s.},$$

于是

$$\overline{\varphi}(\theta)=\overline{\varphi}(\theta_0)+\frac{\partial\overline{\varphi}(\theta_0)}{\partial\theta}uN^{-\beta}+O(N^{-2\beta})\qquad\text{a.s.},\tag{11}$$

当 $Q\to\infty(N\to\infty)$ 时, 由 (6), (11) 式和条件 $2\beta<1/\delta$, 得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{MQ^{1-2\beta\delta}}\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)&=Q^{2\beta\delta}\overline{\varphi}^\tau(\theta)\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta)\overline{\varphi}(\theta)\\
&=Q^{2\beta\delta}\Big(\overline{\varphi}(\theta_0)+\frac{\partial\overline{\varphi}(\theta_0)}{\partial\theta}uN^{-\beta}+O(N^{-2\beta})\Big)^\tau\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta)\\
&\quad\times\Big(\overline{\varphi}(\theta_0)+\frac{\partial\overline{\varphi}(\theta_0)}{\partial\theta}uN^{-\beta}+O(N^{-2\beta})\Big)\\
&=Q^{2\beta\delta}\Big(O(Q^{-1/2}(\log\log Q)^{1/2})+\frac{\partial\overline{\varphi}(\theta_0)}{\partial\theta}uN^{-\beta}+O(N^{-2\beta})\Big)^\tau\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta)\\
&\quad\times\Big(O(Q^{-1/2}(\log\log Q)^{1/2})+\frac{\partial\overline{\varphi}(\theta_0)}{\partial\theta}uN^{-\beta}+O(N^{-2\beta})\Big)\\
&=\Big(O(Q^{-1/2+\beta\delta}(\log\log Q)^{1/2})+\frac{\partial\overline{\varphi}(\theta_0)}{\partial\theta}uO\Big(\Big(\frac{M}{L}\Big)^{\beta\delta}\Big)+O(N^{-\beta})\Big)^\tau\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta)\\
&\quad\times\Big(O(Q^{-1/2+\beta\delta}(\log\log Q)^{1/2})+\frac{\partial\overline{\varphi}(\theta_0)}{\partial\theta}uO\Big(\Big(\frac{M}{L}\Big)^{\beta\delta}\Big)+O(N^{-\beta})\Big)\\
&=Cu^\tau\Lambda^\tau(\theta_0)\Sigma^{-1}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)u\geq C\lambda_{\min}\qquad\text{a.s.},
\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $\lambda_{\min}>0$ 是 $\Lambda^\tau(\theta_0)\Sigma^{-1}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)$ 的最小特征值, C 是正常数. 类似地

$$\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta_0)=MQ\overline{\varphi}^\tau(\theta_0)\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta_0)\overline{\varphi}(\theta_0)=MO(\log\log Q)\qquad\text{a.s.}.\tag{13}$$

由 (12) 和 (13) 式知, 对于 $\theta\in\{\theta|\,\|\theta-\theta_0\|\leq N^{-\beta}\}$, 以概率 1, 有 $\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)>\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta_0)$. 又因为 $\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)$ 关于 θ 为连续函数, 所以 $\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)$ 在其内部某点 $\widehat{\theta}$ 处可达到最小值. 且 $\widehat{\theta}$ 满足

$$\frac{\partial\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\widehat{\theta}}=\frac{2}{(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{Q}[1+s+t^\tau\varphi_i(\theta)]^{-1/(1+\lambda)}\Big(\frac{\partial\varphi_i(\theta)}{\partial\theta}\Big)^\tau t\Big|_{\theta=\widehat{\theta}}=0,$$

且 $\widehat{\theta}\xrightarrow{\text{a.s.}}\theta_0$, 当 $Q\to\infty$ 时成立. #

推论 1 的证明： 由文献 [8] 的引理 1 的证明方法，我们能得到 $\{\varphi_i(\theta), i=1,2,\cdots\}$ 也是 α-混合 (或 φ- 混合、 ρ- 混合) 序列，且当 $n \geq [M/L]+1$ 时，它的混合系数 $\alpha_\varphi(n)$ (或 $\varphi_\varphi(n)$ 、 $\rho_\varphi(n)$) 满足 $\alpha_\varphi(n) \leq \alpha(nL-M)$ (或 $\varphi_\varphi(n) \leq \alpha(nL-M)$ 、 $\rho_\varphi(n) \leq \rho(nL-M)$). 所以，应用文献 [13] 的引理 1.2.7, 引理 1.2.8 和引理 8.2.2, 我们可验证定理 1 的正则条件 (i) 和 (iii) 成立．于是，由定理 1 则证明了推论 1. #

定理 2 的证明： 对 U_{1Q}, U_{2Q}, U_{3Q} 关于 θ, s, t^τ 求导数，得

$$\frac{\partial U_{1Q}(\theta,0,0)}{\partial\theta} = \frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{Q}\frac{\partial\varphi_i(\theta)}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial U_{1Q}(\theta,0,0)}{\partial s} = -\frac{1}{Q(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{Q}\varphi_i(\theta),$$

$$\frac{\partial U_{1Q}(\theta,0,0)}{\partial t^\tau} = -\frac{1}{Q(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{Q}\varphi_i(\theta)\varphi_i^\tau(\theta); \qquad \frac{\partial U_{2Q}(\theta,0,0)}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial U_{2Q}(\theta,0,0)}{\partial s} = -\frac{1}{1+\lambda}, \qquad \frac{\partial U_{2Q}(\theta,0,0)}{\partial t^\tau} = -\frac{1}{Q(1+\lambda)}\sum_{i=1}^{Q}\varphi_i^\tau(\theta);$$

$$\frac{\partial U_{3Q}(\theta,0,0)}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial U_{3Q}(\theta,0,0)}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial U_{3Q}(\theta,0,0)}{\partial t^\tau} = \frac{1}{Q(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{Q}\left(\frac{\partial\varphi_i(\theta)}{\partial\theta}\right)^\tau.$$

对 $U_{1Q}(\widehat\theta,\widehat s,\widehat t)$, $U_{2Q}(\widehat\theta,\widehat s,\widehat t)$, $U_{3Q}(\widehat\theta,\widehat s,\widehat t)$ 在 $(\theta_0,0,0)$ 点处 Taylor 展开，并由定理 1, 有

$$\begin{aligned}
0 &= U_{1Q}(\widehat\theta,\widehat s,\widehat t)\\
&= U_{1Q}(\theta_0,0,0) + \frac{\partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)}{\partial\theta}(\widehat\theta-\theta_0) + \frac{\partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)}{\partial s}(\widehat s-0)\\
&\quad + \frac{\partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)}{\partial t^\tau}(\widehat t-0) + o_P(\delta_Q),\\
1 &= U_{2Q}(\widehat\theta,\widehat s,\widehat t)\\
&= U_{2Q}(\theta_0,0,0) + \frac{\partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)}{\partial\theta}(\widehat\theta-\theta_0) + \frac{\partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)}{\partial s}(\widehat s-0)\\
&\quad + \frac{\partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)}{\partial t^\tau}(\widehat t-0) + o_P(\delta_Q),\\
0 &= U_{3Q}(\widehat\theta,\widehat s,\widehat t)\\
&= U_{3Q}(\theta_0,0,0) + \frac{\partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)}{\partial\theta}(\widehat\theta-\theta_0) + \frac{\partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)}{\partial s}(\widehat s-0)\\
&\quad + \frac{\partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)}{\partial t^\tau}(\widehat t-0) + o_P(\delta_Q),
\end{aligned}$$

其中 $\delta_Q = \|\widehat\theta-\theta_0\| + \|\widehat s\| + \|\widehat t\|$, 有

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -U_{1Q}(\theta_0,0,0)+o_P(\delta_Q)\\ 1-U_{2Q}(\theta_0,0,0)+o_P(\delta_Q)\\ -U_{3Q}(\theta_0,0,0)+o_P(\delta_Q)\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix} \partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)/\partial t^\tau & \partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)/\partial s & \partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)/\partial\theta\\ \partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)/\partial t^\tau & \partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)/\partial s & \partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)/\partial\theta\\ \partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)/\partial t^\tau & \partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)/\partial s & \partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)/\partial\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat t\\ \widehat s\\ \widehat\theta-\theta_0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{s} \\ \hat{\theta}-\theta_0 \end{pmatrix} = S_Q^{-1}\begin{pmatrix} -U_{1Q}(\theta_0,0,0)+o_P(\delta_Q) \\ o_P(\delta_Q) \\ o_P(\delta_Q) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

因为 $(1/Q)\sum\limits_{i=1}^{Q}\varphi_i(\theta_0) \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathsf{E}_F(g(X,\theta_0))$, 和 $\mathsf{E}_F(g(X,\theta_0))=0$, 其中

$$S_Q \triangleq \begin{pmatrix} \partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)/\partial t^\tau & \partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)/\partial s & \partial U_{1Q}(\theta_0,0,0)/\partial\theta \\ \partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)/\partial t^\tau & \partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)/\partial s & \partial U_{2Q}(\theta_0,0,0)/\partial\theta \\ \partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)/\partial t^\tau & \partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)/\partial s & \partial U_{3Q}(\theta_0,0,0)/\partial\theta \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\ S=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ S_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(1+\lambda)M}\Sigma(\theta_0) & \mathbf{0} & \Lambda(\theta_0) \\ \mathbf{0} & -\dfrac{1}{1+\lambda} & 0 \\ \dfrac{1}{(1+\lambda)^2}\Lambda^\tau(\theta_0) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{a.s..}$$

由上式和中心极限定理, $U_{1Q}(\theta_0,0,0)=(1/Q)\sum\limits_{i=1}^{Q}\varphi_i(\theta_0)=O_P(N^{-1/2})$[7,11], 可以得到 $\delta_Q=O_P(N^{-1/2})$. 并由 $\Sigma(\theta_0)$ 的正定性知

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} S_{11}^{-1}+S_{11}^{-1}[S_{13}S_{33.1}^{-1}S_{31}]S_{11}^{-1} & \mathbf{0} & -S_{11}^{-1}S_{13}S_{33.1}^{-1} \\ \mathbf{0} & S_{22}^{-1} & 0 \\ -S_{33.1}^{-1}S_{31}S_{11}^{-1} & 0 & S_{33.1}^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $S_{33.1}=-S_{31}S_{11}^{-1}S_{13}$. 把上式代入 (14) 式, 容易得到

$$\begin{aligned} \sqrt{MQ}(\hat{\theta}-\theta_0) &= (M^{-1}S_{33.1})^{-1}S_{31}(MS_{11})^{-1}\sqrt{MQ}U_{1Q}(\theta_0,0,0)+o_P(1), \qquad (15)\\ \sqrt{M^{-1}Q}(\hat{t}-0) &= -[(MS_{11})^{-1}+(MS_{11})^{-1}S_{13}(M^{-1}S_{33.1})^{-1}S_{31}(MS_{11})^{-1}] \\ &\quad \times\sqrt{MQ}U_{1Q}(\theta_0,0,0)+o_P(1), \qquad (16) \end{aligned}$$

由于 $\sqrt{MQ}U_{1Q}(\theta_0,0,0)\xrightarrow{d} N(0,\Sigma(\theta_0))$, 因此

$$\begin{aligned} &\sqrt{MQ}(\hat{\theta}-\theta_0)\xrightarrow{d} N(0,V), \\ &\sqrt{M^{-1}Q}(\hat{t}-0)\xrightarrow{d} N(0,U). \end{aligned}$$

其中 $V=[\Lambda^\tau(\theta_0)\Sigma^{-1}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)]^{-1}$, $U=(1+\lambda)\Sigma^{-1}(\theta_0)[I-\Lambda(\theta_0)V\Lambda^\tau(\theta_0)\Sigma^{-1}(\theta_0)]$. #

定理 3 的证明: 由推论 1, $\sqrt{N}\overline{\varphi}(\theta_0)\xrightarrow{d} N(0,\Sigma(\theta_0))$, 和 $\widehat{\Sigma}_Q(\theta_0)\xrightarrow{\text{a.s.}}\Sigma(\theta_0)$, 得

$$A_N^{-1}\mathrm{CR}_\lambda^B(\theta_0)=(\sqrt{N}\overline{\varphi}(\theta_0))^\tau\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta_0)(\sqrt{N}\overline{\varphi}(\theta_0))\xrightarrow{d}\chi^2(r). \qquad \#$$

定理 4 的证明: 由 (6), (8), (15), (16) 式和 $\partial\overline{\varphi}(\theta_0)/\partial\theta \xrightarrow{\text{a.s.}} \Lambda(\theta_0)$, 得到

$$\begin{aligned}
R_2 &= N\overline{\varphi}^{\tau}(\widehat{\theta})\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\widehat{\theta})\overline{\varphi}(\widehat{\theta}) + o_P(1) = \frac{N}{(1+\lambda)M}\overline{\varphi}^{\tau}(\widehat{\theta})\widehat{t} + o_P(1) \\
&= \frac{N}{(1+\lambda)M}\Big[\overline{\varphi}(\theta_0) + \frac{\partial\overline{\varphi}(\theta_0)}{\partial\theta}(\widehat{\theta}-\theta_0) + O(N^{-2\beta})\Big]^{\tau}\widehat{t} + o_P(1) \\
&= \frac{N}{(1+\lambda)M}[\overline{\varphi}(\theta_0) + S_{13}S_{33.1}^{-1}S_{31}S_{11}^{-1}U_{1Q}(\theta_0,0,0) + O(N^{-2\beta})]^{\tau} \\
&\quad \times[-(S_{11}^{-1} + S_{11}^{-1}S_{13}S_{33.1}^{-1}S_{31}S_{11}^{-1})U_{1Q}(\theta_0,0,0) + \zeta_Q] + o_P(1) \\
&= \frac{1}{(1+\lambda)M}[\sqrt{N}U_{1Q}(\theta_0,0,0) - \Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1}(\theta_0)\sqrt{N}U_{1Q}(\theta_0,0,0)] \\
&\quad \times(1+\lambda)M\Sigma^{-1}(\theta_0)[I - \Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1}(\theta_0)]\sqrt{N}U_{1Q}(\theta_0,0,0) + o_P(1) \\
&= [\sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(\theta_0)U_{1Q}(\theta_0,0,0)]^{\tau}[I - \Sigma^{-1/2}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1/2}(\theta_0)] \\
&\quad \times[\sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(\theta_0)U_{1Q}(\theta_0,0,0)] + o_P(1).
\end{aligned}$$

记 $G_1 \triangleq I - \Sigma^{-1/2}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1/2}(\theta_0)$, 利用 $\sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(\theta_0)U_{1Q}(\theta_0,0,0) \xrightarrow{d} N(0,I)$, $G_1^2 = G_1$, 并且

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(G_1) &= \mathrm{tr}(I - \Sigma^{-1/2}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1/2}(\theta_0)) \\
&= r - \mathrm{tr}(\Sigma^{-1/2}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1/2}(\theta_0)) \\
&= r - p,
\end{aligned}$$

得到

$$R_2 \xrightarrow{d} \chi^2(r-p).$$

另一方面

$$\begin{aligned}
R_1 &= N\overline{\varphi}^{\tau}(\theta_0)\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\theta_0)\overline{\varphi}(\theta_0) - N\overline{\varphi}^{\tau}(\widehat{\theta})\widehat{\Sigma}_Q^{-1}(\widehat{\theta})\overline{\varphi}(\widehat{\theta}) + o_P(1) \\
&= NU_{1Q}^{\tau}(\theta_0,0,0)\Sigma^{-1}(\theta_0)U_{1Q}(\theta_0,0,0) - [\sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(\theta_0)U_{1Q}(\theta_0,0,0)]^{\tau} \\
&\quad \times[I - \Sigma^{-1/2}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1/2}(\theta_0)][\sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(\theta_0)U_{1Q}(\theta_0,0,0)] + o_P(1) \\
&= [\sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(\theta_0)U_{1Q}(\theta_0,0,0)]^{\tau}[\Sigma^{-1/2}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1/2}(\theta_0)] \\
&\quad \times[\sqrt{N}\Sigma^{-1/2}(\theta_0)U_{1Q}(\theta_0,0,0)] + o_P(1).
\end{aligned}$$

记 $G_2 \triangleq \Sigma^{-1/2}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1/2}(\theta_0)$, 因为 $G_2^2 = G_2$, 并且

$$\mathrm{tr}(\Sigma^{-1/2}(\theta_0)\Lambda(\theta_0)V\Lambda^{\tau}(\theta_0)\Sigma^{-1/2}(\theta_0)) = p,$$

则

$$R_1 \xrightarrow{d} \chi^2(p). \qquad \#$$

参 考 文 献

[1] Owen, A.B., Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional, *Biometrika*, **75**(1988), 237–249.

[2] Owen, A.B., Empirical likelihood ratio confidence regions, *Ann. Statist.*, **18(1)**(1990), 90–120.

[3] Qin, J. and Lawless, J., Empirical likelihood and general estimating equations, *Ann. Statist.*, **22(1)**(1994), 300–325.

[4] Owen, A.B., *Empirical Likelihood*, Chapman & Hall/CRC, New York, 2001.

[5] Baggerly, K., Empirical likelihood as a goodness-of-fit measure, *Biometrika*, **85(3)**(1998), 535–547.

[6] Lin, L. and Zhang, R.C., Blockwise empirical Euclidean likelihood for weakly dependent processes, *Statist. Probab. Lett.*, **53**(2001), 143–152.

[7] Bravo, F., Blockwise empirical Cressie-Read test statistics for α-mixing processes, *Statist. Probab. Lett.*, **58**(2002), 319–325.

[8] Politis, D. and Romano, J., A general resampling scheme for triangular arrays of α-mixing random variables with application to the problem of spectral density estimation, *Ann. Statist.*, **20**(1992), 1985–2007.

[9] Kitamura, Y., Empirical likelihood methods with weakly dependent process, *Ann. Statist.*, **25**(1997), 2084–2102.

[10] Carlstein, E., The use of subseries values for estimating the variance of a general statistic from stationary sequence, *Ann. Statist.*, **14**(1986), 1171–1179.

[11] Künsch, H., The jackknife and the bootstrap for general stationary observations, *Ann. Statist.*, **17**(1989), 1217–1241.

[12] Hall, P., Horowitz, J., Jing, B., On blocking rules for the bootstrap with dependent data, *Biometrika*, **82**(1995), 561–574.

[13] 陆传荣，林正炎， 混合相依变量的极限理论，科学出版社，北京， 1997.

[14] 罗旭，半参数模型的经验欧氏似然估计的大样本性质， 应用概率统计，**10(4)**(1994), 344–352.

Blockwise Empirical Cressie-Read Likelihood for Weakly Dependent Data

Li Gaorong Xue Liugen

(*College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing, 100022*)

In this paper, we introduce a method of blockwise empirical Cressie-Read likelihood for weakly dependent data. The strong consistency and asymptotic normality of the blockwise empirical Cressie-Read likelihood estimation of the parameters are obtained. It is also shown that the blockwise empirical Cressie-Read likelihood statistic is asymptotically a *chi*-square distribution.