应用概率统计　第二十四卷
第三期　2008年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.3 Jun. 2008

线性过程的强逼近和重对数律 *

谭希丽[1,2]　　赵世舜[2]　　杨晓云[2]

([1]北华大学数学学院, 吉林, 132013; [2]吉林大学(前卫校区)数学研究所, 长春, 130012)

摘　要

本文讨论由独立同分布随机变量列产生的线性过程的泛函型重对数律和强逼近, 同时又给出由NA随机变量列产生的线性过程的重对数律.

关键词:　线性过程, 泛函型重对数律, 强逼近, 重对数律.

学科分类号:　O211.4.

§1.　引言及引理

在时间序列分析中, 线性过程扮演着相当重要的角色, 在水文工程、气象学和生存分析等领域中被广泛应用. 特别, 线性过程的极限定理对于刻划各种从计量经济模型的统计推断问题中所导出的检验统计量的极限分布, 起着至关重要的作用. 有相当多的文献对线性过程的极限理论作了深入而细致的研究. 譬如Philipps和Solo[1]证明了线性过程的强大数律和重对数律, 邱瑾和林正炎[2]讨论了线性过程的弱收敛, Wang et al[3]证明了一类线性过程的强逼近, 陆传荣和邱瑾[4]给出了线性过程的泛函型重对数律及强逼近. 但是目前的大部分研究中针对线性过程$X_t=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\varepsilon_{t-i}$, 系数$\{a_i\}$要求较高, $\{\varepsilon_i\}$也通常为独立同分布的随机变量列, 矩条件也限制较严. 本文将利用概率极限理论的相关工具, 在较为宽泛的$\{a_i\}$及$\{\varepsilon_i\}$的条件下研究模型的极限性质.

本文第二章主要考虑由独立同分布随机变量列所生成的线性过程的泛函型重对数律及强逼近. 第三章主要考虑由NA随机变量列$\{\varepsilon_i\}$所生成的线性过程的重对数律(NA列定义见[5]). 与已有文献相比, 系数$\{a_i\}$条件较为宽泛, $\{\varepsilon_i\}$的矩条件也相应降低. 记$\log x=\ln(\max\{e,x\})$, 在本文以下内容中, 均采用这一记号.

为了证明定理, 需要下述几条引理.

引理 1.1 ([5]中引理2)　$\{Y_i,1\le i\le n\}$是均值为零、2阶矩有限的NA随机变量列. 设$T_k=\sum\limits_{i=1}^{k}Y_i$, 并且${B_n}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}{Y_i}^2$. 则对任意的$x>0$, $a>0$和$0<\alpha<1$有

$$\mathsf{P}\Big(\max_{1\le k\le n}|T_k|\ge x\Big)\le 2\mathsf{P}\Big(\max_{1\le k\le n}Y_k>a\Big)+\frac{2}{1-\alpha}\exp\Big(-\frac{x^2\alpha}{2(ax+{B_n}^2)}\Big). \tag{1.1}$$

*基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 10571073).

本文2004年12月30日收到.

引理 1.2 设$\{\varepsilon_n\}$为i.i.d.的随机变量序列,

(1) 如果$\mathsf{E}|\varepsilon_1|^2<\infty$, 则$\mathsf{E}\sup\limits_{n\ge1}|\varepsilon_n|/(2n\log\log n)^{1/2}<\infty$;

(2) 如果$\mathsf{E}|\varepsilon_1|^p<\infty$, $p>2$, 则$\mathsf{E}\sup\limits_{n\ge1}|\varepsilon_n|/n^{1/p}<\infty$;

(3) 如果存在$t>0$, 使$\mathsf{E}e^{t|\varepsilon_1|}<\infty$, 则$\mathsf{E}\sup\limits_{n\ge1}|\varepsilon_n|/(C_n\log n)<\infty$. 此处$\{C_n\}$非负单调不减, 并且$\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\infty$.

证明: (1)见文献[6]中P_{341}命题7.2.1, (2)、(3)的证明与(1)类似, 故略去. □

引理 1.3 ([7]中推论6.12) 设$\{a_n\}$为一递增的正数序列, 并且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. $\{X_i\}$为一相互独立的B值随机元序列, $S_n=\sum\limits_{i=1}^n X_i$, $n\ge1$. 如果$\sup\limits_n\|S_n\|/a_n<\infty$ a.s., 则对任意的$0<p<\infty$, 下面两式等价:

$$(1)\qquad \mathsf{E}\sup_n\Big(\frac{\|S_n\|}{a_n}\Big)^p<\infty;$$

$$(2)\qquad \mathsf{E}\sup_n\Big(\frac{\|X_n\|}{a_n}\Big)^p<\infty.$$

引理 1.4 $\{\varepsilon_i;-\infty<i<\infty\}$为i.i.d.的随机变量序列, $\{a_n\}$是非负实数下降序列, 则$\forall j\in\mathbf{Z}$, $\sup\limits_{n\ge1}\big|a_n\sum\limits_{i=1}^n\varepsilon_{i-j}\big|$与$\sup\limits_{n\ge1}\big|a_n\sum\limits_{i=1}^n\varepsilon_i\big|$同分布.

证明: 令$Y_j=\sup\limits_{n\ge1}\big|a_n\sum\limits_{i=1}^n\varepsilon_{i-j}\big|$, $Y=\sup\limits_{n\ge1}\big|a_n\sum\limits_{i=1}^n\varepsilon_i\big|$. 易见

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(Y_j\le x)&=\mathsf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\max_{1\le t\le k}\Big|a_t\sum_{i=1}^t\varepsilon_{i-j}\Big|\le x\Big)\Big)\\&=\lim_{k\to\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\le t\le k}\Big|a_t\sum_{i=1}^t\varepsilon_{i-j}\Big|\le x\Big),\end{aligned}\tag{1.2}$$

同理有

$$\mathsf{P}(Y\le x)=\lim_{k\to\infty}\mathsf{P}\Big(\max_{1\le t\le k}\Big|a_t\sum_{i=1}^t\varepsilon_i\Big|\le x\Big).\tag{1.3}$$

又由于$(\varepsilon_{1-j},\varepsilon_{2-j},\cdots,\varepsilon_{t-j})$与$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_t)$同分布, 故对每个$t$维Borel点集$D$,

$$\mathsf{P}\{(\varepsilon_{1-j},\varepsilon_{2-j},\cdots,\varepsilon_{t-j})\in D\}=\mathsf{P}\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_t)\in D\}.\tag{1.4}$$

特别取$D=\Big\{(x_1,x_2,\cdots,x_t):\max\limits_{1\le t\le k}\big|a_t\sum\limits_{i=1}^t x_i\big|\le x\Big\}$, 再结合(1.2)、(1.3)、(1.4)式, 结论成立. □

引理 1.5 ε_0是一实值随机变量, 若存在$t_0>0$, 使当$|t|<t_0$时, $\mathsf{E}e^{t\varepsilon_0}<\infty$, 则存在$t^*>0$, 使$\mathsf{E}e^{t^*|\varepsilon_0|}<\infty$.

证明: 取$\widetilde{t}>0$, 并且$\widetilde{t}<t_0/4$, 于是$e^{\widetilde{t}\varepsilon_0^-}\le e^{-\widetilde{t}\varepsilon_0}I_{[\varepsilon_0<0]}+e^{\widetilde{t}\varepsilon_0}I_{[\varepsilon_0\ge 0]}$, 进而

$$\mathsf{E}e^{\widetilde{t}\varepsilon_0^-}\le \mathsf{E}e^{-\widetilde{t}\varepsilon_0}+\mathsf{E}e^{\widetilde{t}\varepsilon_0}<\infty,$$

因此

$$\mathsf{E}e^{(1/2)\cdot\widetilde{t}\varepsilon_0^+}=\mathsf{E}e^{(1/2)\cdot\widetilde{t}\varepsilon_0}e^{(1/2)\cdot\widetilde{t}\varepsilon_0^-}\le(\mathsf{E}e^{\widetilde{t}\varepsilon_0})^{1/2}(\mathsf{E}e^{\widetilde{t}\varepsilon_0^-})^{1/2}<\infty.$$

以上说明

$$\mathsf{E}e^{(1/2)\cdot\widetilde{t}\varepsilon_0^+}<\infty,\qquad \mathsf{E}e^{\widetilde{t}\varepsilon_0^-}<\infty.$$

这样取$t^*=\widetilde{t}/4$, 则

$$\mathsf{E}e^{t^*|\varepsilon_0|}=\mathsf{E}e^{t^*\varepsilon_0^+}e^{t^*\varepsilon_0^-}\le(\mathsf{E}e^{2t^*\varepsilon_0^+})^{1/2}(\mathsf{E}e^{2t^*\varepsilon_0^-})^{1/2}<\infty.$$

□

引理 1.6 $\{\varepsilon_i;i\in\mathbf{Z}\}$是严平稳的NA随机变量序列, $\mathsf{E}\varepsilon_1=0$, $\mathsf{E}{\varepsilon_1}^2<\infty$, $\sigma^2=\mathsf{E}{\varepsilon_1}^2+2\sum\limits_{i=2}^{\infty}\mathsf{E}\varepsilon_1\varepsilon_i>0$, 则

$$\mathsf{E}\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big|<\infty. \tag{1.5}$$

证明: 令$b_n=(2n\log\log n)^{1/2}$, $b_{2^k}/b_{2^{k+1}}\to\sqrt{2}/2$ $(k\to\infty)$, 故存在$C_1>0$, 使对所有的$k\ge 0$, 有$b_{2^k}/b_{2^{k+1}}\ge C_1$. 取$0<\varepsilon<\min(1,\sqrt{2}C_1/(2\sigma))$, 令$m$满足

$${\sigma_m}^2=\mathsf{E}{\varepsilon_1}^2+2\sum_{i=2}^{m}\mathsf{E}\varepsilon_1\varepsilon_i\le\sigma^2(1+\varepsilon). \tag{1.6}$$

设$a_i=\varepsilon\sigma(i/\log\log i)^{1/2}/m$. 定义

$$\begin{aligned}
&g_1(a,x)=xI_{\{|x|\le a\}}+aI_{\{x>a\}}-aI_{\{x<-a\}},\\
&g_2(a,x)=(x-a)I_{\{x>a\}}+(x+a)I_{\{x<-a\}},\\
&Y_{i,l}=g_l(a_i,\varepsilon_i)-\mathsf{E}g_l(a_i,\varepsilon_i),\qquad S_{i,l}=\sum_{j=1}^{i}Y_{j,l},\qquad l=1,2,\\
&u_i=\sum_{j=(i-1)m+1}^{im}Y_{j,1},\qquad U_i=\sum_{j=1}^{i}u_j,\qquad i=1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

由诸记号的定义有

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k=S_{n,1}+S_{n,2}. \tag{1.7}$$

则由(1.7)式有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\Big|\\
\le\ &\mathsf{E}\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}|S_{n,1}|+\mathsf{E}\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}|S_{n,2}|.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

由(1.8)式为证(1.5)式, 只须证明

$$\mathsf{E}\sup_n (2n\log\log n)^{-1/2}|S_{n,1}| < \infty, \tag{1.9}$$

$$\mathsf{E}\sup_n (2n\log\log n)^{-1/2}|S_{n,2}| < \infty. \tag{1.10}$$

易见

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sup_n (2n\log\log n)^{-1/2}|S_{n,2}| \\
= \ &\mathsf{E}\sup_n (2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{k=1}^{n}(g_2(a_k,\varepsilon_k)-\mathsf{E}g_2(a_k,\varepsilon_k))\Big| \\
\le \ &\mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|g_2(a_k,\varepsilon_k)-\mathsf{E}g_2(a_k,\varepsilon_k)|}{(2k\log\log k)^{1/2}} \le 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}|\varepsilon_k|I_{\{|\varepsilon_k|>a_k\}}}{(2k\log\log k)^{1/2}} \\
< \ &\infty.
\end{aligned}$$

最后一个不等号由文献[8]易知. 此即(1.10)式成立. 注意到

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sup_n (2n\log\log n)^{-1/2}|S_{n,1}| \\
= \ &\mathsf{E}\sup_{k\ge 0}\max_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{|S_{n,1}|}{(2n\log\log n)^{1/2}} \\
= \ &\int_0^\infty \mathsf{P}\Big\{\sup_{k\ge 0}\max_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{|S_{n,1}|}{(2n\log\log n)^{1/2}} > x\Big\}\mathrm{d}x \\
\le \ &C+\int_C^\infty \mathsf{P}\Big\{\sup_{k\ge 0}\max_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{|S_{n,1}|}{(2n\log\log n)^{1/2}} > x\Big\}\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

这里$C>1$待定. 由C_1的选取可知

$$\begin{aligned}
&\int_C^\infty \mathsf{P}\Big\{\sup_{k\ge 0}\max_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{|S_{n,1}|}{(2n\log\log n)^{1/2}} > x\Big\}\mathrm{d}x \\
\le \ &\int_C^\infty \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}\Big\{\max_{2^k\le n<2^{k+1}}\frac{|S_{n,1}|}{(2n\log\log n)^{1/2}} > x\Big\}\mathrm{d}x \\
\le \ &\sum_{k=0}^{\infty}\int_C^\infty \mathsf{P}\Big\{\max_{2^k\le n<2^{k+1}}|S_{n,1}| > x(2\cdot 2^k\cdot\log\log 2^k)^{1/2}\Big\}\mathrm{d}x \\
\le \ &\sum_{k=0}^{\infty}\int_C^\infty \mathsf{P}\Big\{\max_{1\le n\le 2^{k+1}}|S_{n,1}| > xC_1(2\cdot 2^{k+1}\cdot\log\log 2^{k+1})^{1/2}\Big\}\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

又

$$\begin{aligned}
\max_{n\le 2^{k+1}}|S_{n,1}| &\le \max_{1\le i\le[2^{k+1}/m]}|U_i| + \max_{1\le i\le[2^{k+1}/m]}\sum_{j=(i-1)m+1}^{\min(2^{k+1},im)}|Y_{j,1}| \\
&\le \max_{1\le i\le[2^{k+1}/m]}|U_i| + 2ma_{2^{k+1}} \\
&\le \max_{1\le i\le[2^{k+1}/m]}|U_i| + 2\varepsilon\sigma(2^{k+1}\cdot\log\log 2^{k+1})^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

对每个充分大的m有

$$\mathsf{E}{u_i}^2/(m{\sigma_m}^2)\to 1\qquad(i\to\infty),$$

并且

$$\sum_{i=1}^{[2^{k+1}/m]}\mathsf{E}{u_i}^2/(2^{k+1}{\sigma_m}^2)\to 1\qquad(k\to\infty).$$

因此由(1.6)式, $\exists k_0$, $k\geq k_0$有

$$\sum_{i=1}^{[2^{k+1}/m]}\mathsf{E}{u_i}^2\leq\sigma^2\cdot(1+2\varepsilon)\cdot 2^{k+1}.\tag{1.14}$$

由[5]可知$\{u_i\}$仍为NA随机变量序列, $\mathsf{E}u_i=0$, $|u_i|\leq 2ma_{im}$. 应用引理1.1, 并在(1.1)式中取$a=2ma_{2^{k+1}}$, $\alpha=1-\varepsilon$, 再由(1.13)、(1.14)式, 并注意到$0<\varepsilon<\sqrt{2}C_1/(2\sigma)$, 可有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\int_C^{\infty}\mathsf{P}\Big\{\max_{1\leq n\leq 2^{k+1}}|S_{n,1}|>xC_1(2\cdot 2^{k+1}\cdot\log\log 2^{k+1})^{1/2}\Big\}\mathrm{d}x\\
\leq&\sum_{k=0}^{\infty}\int_C^{\infty}\mathsf{P}\Big\{\max_{1\leq i\leq[2^{k+1}/m]}|U_i|>(xC_1\sqrt{2}-2\varepsilon\sigma)(2^{k+1}\cdot\log\log 2^{k+1})^{1/2}\Big\}\mathrm{d}x\\
\leq&\sum_{k=0}^{\infty}\int_C^{\infty}\mathsf{P}\Big\{\max_{1\leq i\leq[2^{k+1}/m]}|U_i|>(C_1\sqrt{2}-2\varepsilon\sigma)x(2^{k+1}\cdot\log\log 2^{k+1})^{1/2}\Big\}\mathrm{d}x\\
\leq&\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\int_C^{\infty}\exp\left(-\frac{(C_1\sqrt{2}-2\varepsilon\sigma)^2(1-\varepsilon)(2^{k+1}\cdot\log\log 2^{k+1})x^2}{4\varepsilon\sigma\cdot 2^{k+1}(C_1\sqrt{2}-2\varepsilon\sigma)x+2\sum\limits_{i=1}^{[2^{k+1}/m]}\mathsf{E}{u_i}^2}\right)\mathrm{d}x\\
\leq&\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{k_0}\int_C^{\infty}e^{-A_kx}\mathrm{d}x+\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\int_C^{\infty}e^{-B\cdot(\log\log 2^{k+1})\cdot x}\mathrm{d}x\\
=&\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{k_0}\int_C^{\infty}e^{-A_kx}\mathrm{d}x+\frac{2}{\varepsilon B}\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{\log((k+1)\log 2)((k+1)\log 2)^{BC}}\\
<&\infty.
\end{aligned}\tag{1.15}$$

其中

$$A_k=\frac{(C_1\sqrt{2}-2\varepsilon\sigma)^2(1-\varepsilon)(2^{k+1}\cdot\log\log 2^{k+1})}{4\varepsilon\sigma\cdot 2^{k+1}(C_1\sqrt{2}-2\varepsilon\sigma)+2\sum\limits_{i=1}^{[2^{k+1}/m]}\mathsf{E}{u_i}^2}>0,$$

$$B=\frac{(C_1\sqrt{2}-2\varepsilon\sigma)^2(1-\varepsilon)}{4\varepsilon\sigma(C_1\sqrt{2}-2\varepsilon\sigma)+2\sigma^2\cdot(1+2\varepsilon)}>0,$$

并且C足够大, 使$BC>1$. 结合(1.11)、(1.12)、(1.15)知(1.9)式成立, 证毕. □

§2. 线性过程的泛函型重对数律和强逼近

本节讨论线性过程满足泛函型重对数律和强逼近的条件. 关于泛函型重对数律有

定理 2.1 令$\{\varepsilon_i; i\in \mathbf{Z}\}$为i.i.d.的随机变量序列, $\mathsf{E}\varepsilon_0=0$, $0<{\sigma_\varepsilon}^2=\mathsf{E}\varepsilon_0^2<\infty$, $\{a_i; i\geq 0\}$是一实数序列, 满足$\sum\limits_{i=0}^{\infty}|a_i|<\infty$, 定义$X_t=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\varepsilon_{t-i}$为由$\{\varepsilon_i; i\in\mathbf{Z}\}$所产生的线性过程. 令$\sigma_X=A\sigma_\varepsilon$, $A=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i\neq 0$,

$$Z_n(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k}X_j}{\sigma_X\sqrt{2n\log\log n}}, & t=\dfrac{k}{n},\ k=1,2,\cdots,n,\\ \text{线性}, & \dfrac{k-1}{n}\leq t\leq\dfrac{k}{n}.\end{cases}$$

记定义在$[0,1]$上一切绝对连续, 且满足$f(0)=0$, $\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\leq 1$的函数$f(x)$的全体为$\mathbf{K}$. 则随机过程列$\{Z_n(t), 0\leq t\leq 1, n\geq 1\}$在$C[0,1]$中概率为1地相对紧且极限点集为$\mathbf{K}$.

证明: 定义$\widetilde{\varepsilon}_t=\sum\limits_{j=0}^{m}\widetilde{a}_j\varepsilon_{t-j}$, 其中$\widetilde{a}_m=0, \widetilde{a}_j=\sum\limits_{i=j+1}^{m}a_i$, $j=0,1,2,\cdots,m-1$. 不难推得

$$\sum_{t=1}^{k}X_t=\Big(\sum_{j=0}^{m}a_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\Big)+\widetilde{\varepsilon}_0-\widetilde{\varepsilon}_k+\sum_{j>m}a_j\Big(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_{i-j}\Big).$$

令

$$Y_n(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k}\varepsilon_j/\sigma_\varepsilon}{\sqrt{2n\log\log n}}, & t=\dfrac{k}{n},\ k=1,2,\cdots,n,\\ \text{线性}, & \dfrac{k-1}{n}\leq t\leq\dfrac{k}{n},\end{cases}$$

$$V_n^m(t)=\begin{cases}0, & t=0,\\ \dfrac{\widetilde{\varepsilon}_0-\widetilde{\varepsilon}_k+\sum\limits_{j>m}a_j\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_{i-j}\Big)}{\sigma_X\sqrt{2n\log\log n}}, & t=\dfrac{k}{n},\ k=1,2,\cdots,n,\\ \text{线性}, & \dfrac{k-1}{n}\leq t\leq\dfrac{k}{n}.\end{cases}$$

进而

$$Z_n(t)=\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}Y_n(t)+V_n^m(t).\tag{2.1}$$

易见

$$\max_{1\le k\le n}\frac{\sum\limits_{j>m}|a_j|\Big|\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_{i-j}\Big|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}}\le\sum_{j>m}|a_j|\frac{1}{|\sigma_X|}\sup_{1\le k\le n}\frac{\Big|\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_{i-j}\Big|}{\sqrt{2k\log\log k}}\frac{\sqrt{2k\log\log k}}{\sqrt{2n\log\log n}}$$
$$\le\sum_{j>m}|a_j|\frac{1}{|\sigma_X|}\sup_{n\ge1}\frac{\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_{i-j}\Big|}{\sqrt{2n\log\log n}}. \tag{2.2}$$

由 [9] 中定理 3.5.2 知 $\limsup\limits_{n\to\infty}\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Big|/\sqrt{2n\log\log n}=\sigma_\varepsilon<\infty$ a.s.. 再由引理 1.2 的 (1) 知 $\mathsf{E}\sup\limits_{n\ge1}|\varepsilon_n|/\sqrt{2n\log\log n}<\infty$, 从而由引理1.3有$\mathsf{E}\sup\limits_{n\ge1}\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Big|/\sqrt{2n\log\log n}<\infty$. 再由引理1.4有

$$\mathsf{E}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_j|}{|\sigma_X|}\sup_{n\ge1}\frac{\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_{i-j}\Big|}{\sqrt{2n\log\log n}}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_j|}{|\sigma_X|}\mathsf{E}\sup_{n\ge1}\frac{\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_{i}\Big|}{\sqrt{2n\log\log n}}<\infty,$$

进而

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|a_j|}{|\sigma_X|}\sup_{n\ge1}\frac{\Big|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_{i-j}\Big|}{\sqrt{2n\log\log n}}<\infty\qquad\text{a.s..}\tag{2.3}$$

对固定的m, 我们往证

$$\max_{1\le k\le n}\frac{|\widetilde{\varepsilon}_0-\widetilde{\varepsilon}_k|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}}\to0\qquad\text{a.s.,}\qquad n\to\infty.\tag{2.4}$$

注意到

$$\max_{1\le k\le n}\frac{|\widetilde{\varepsilon}_0-\widetilde{\varepsilon}_k|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}}\le\frac{|\widetilde{\varepsilon}_0|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}}+\max_{1\le k\le n}\frac{|\widetilde{\varepsilon}_k|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}}=I_1+I_2.\tag{2.5}$$

$I_1\to0$ a.s., $n\to\infty$是显然的. 下面证明$I_2\to0$ a.s., $n\to\infty$, 易见

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\Big\{\frac{|\varepsilon_{k-j}|}{\sqrt{2k\log\log k}}>\varepsilon\Big\}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{|\varepsilon_{k-j}|^2>\varepsilon^2 2k\log\log k\}$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{|\varepsilon_0|^2>\varepsilon^2 2k\}<\infty,\tag{2.6}$$

最后一个不等号成立是由于$\mathsf{E}|\varepsilon_0|^2<\infty$. 故由(2.6)及Borel-Cantelli引理有

$$\frac{\varepsilon_{k-j}}{\sqrt{2k\log\log k}}\to0\qquad\text{a.s.,}$$

进而

$$\frac{\widetilde{\varepsilon}_k}{\sqrt{2k\log\log k}}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}\widetilde{a}_j\varepsilon_{k-j}}{\sqrt{2k\log\log k}}\to0\qquad\text{a.s..}$$

即$\exists k_0$, $k \geq k_0$时有

$$\frac{\widetilde{\varepsilon}_k}{\sqrt{2k\log\log k}} < \frac{\varepsilon}{2}|\sigma_X|.$$

又由于$\mathsf{E}\max\limits_{1\leq k\leq k_0}|\widetilde{\varepsilon}_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{k_0}\mathsf{E}|\widetilde{\varepsilon}_k| < \infty$, 故$\exists N'$, 使$n \geq N'$有

$$\frac{\max\limits_{1\leq k\leq k_0}|\widetilde{\varepsilon}_k|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而当$n > \max(k_0, N')$时,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \max_{1\leq k\leq k_0}\frac{|\widetilde{\varepsilon}_k|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}} + \max_{k_0<k\leq n}\frac{|\widetilde{\varepsilon}_k|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}} \\ &< \frac{\max\limits_{1\leq k\leq k_0}|\widetilde{\varepsilon}_k|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

此即$I_2 \to 0$. 进而由(2.5)式, 知(2.4)式成立. 联立(2.2)、(2.3)、(2.4)式, 不难看出

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leq t\leq 1}|V_n{}^m(t)| \\ =& \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq n}\frac{\left|\widetilde{\varepsilon}_0 - \widetilde{\varepsilon}_k + \sum\limits_{j>m}a_j\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_{i-j}\Big)\right|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}} \\ \leq& \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq n}\frac{\sum\limits_{j>m}|a_j|\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_{i-j}\right|}{|\sigma_X|\sqrt{2n\log\log n}} \\ \leq& \lim_{m\to\infty}\sum_{j>m}\frac{|a_j|}{|\sigma_X|}\sup_{n\geq 1}\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_{i-j}\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} = 0 \qquad \text{a.s..} \end{aligned} \tag{2.7}$$

由于$Y_n(t)$以概率1相对紧, 且极限点集为$\mathbf{K}$ ([9]中定理5.5.2). 则$\exists\Omega_0\subset\Omega$, $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$, 对每一ω及自然数列$\{n_k\}$, 有子列$n_{k_j} = n_{k_j}(\omega)$和$f\in\mathbf{K}$, 有

$$\sup_{0\leq t\leq 1}|Y_{n_{k_j}}(t,\omega) - f(t)| \to 0, \qquad n_{k_j}\to\infty,$$

进一步有

$$\begin{aligned} &\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}Y_{n_{k_j}}(t,\omega) - \frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}f(t)\right| \\ \leq& C\sup_{0\leq t\leq 1}|Y_{n_{k_j}}(t,\omega) - f(t)| \to 0, \qquad n_{k_j}\to\infty. \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中C为一常数. 由于$f(t)$在$[0,1]$上连续, 则$\exists M>0$, 有$\sup\limits_{0\le t\le 1}|f(t)|\le M$, 于是由(2.1)式,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\le t\le 1}|Z_{n_{k_j}}(t,\omega)-f(t)|\\
\le\ &\sup_{0\le t\le 1}\left|Z_{n_{k_j}}(t,\omega)-\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}Y_{n_{k_j}}(t,\omega)\right|\\
&+\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}Y_{n_{k_j}}(t,\omega)-\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}f(t)\right|+\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}f(t)-f(t)\right|\\
=\ &\sup_{0\le t\le 1}|V_{n_{k_j}}{}^{m}(t,\omega)|+\sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}Y_{n_{k_j}}(t,\omega)-\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}f(t)\right|\\
&+\left|\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}-1\right|M.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

再利用(2.7)、(2.8)、(2.9), 并注意到$\sigma_X=A\sigma_\varepsilon$, 立得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n_{k_j}\to\infty}\sup_{0\le t\le 1}|Z_{n_{k_j}}(t,\omega)-f(t)|\\
\le\ &\lim_{m\to\infty}\lim_{n_{k_j}\to\infty}\sup_{0\le t\le 1}|V_{n_{k_j}}{}^{m}(t,\omega)|+\lim_{n_{k_j}\to\infty}C\sup_{0\le t\le 1}|Y_{n_{k_j}}(t,\omega)-f(t)|\\
&+\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\sigma_\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{m}a_j}{\sigma_X}-1\right|M=0,
\end{aligned}$$

即

$$\sup_{0\le t\le 1}|Z_{n_{k_j}}(t,\omega)-f(t)|\to 0.\tag{2.10}$$

再由$Y_n(t)$以概率1相对紧, 且极限点集为$\mathbf{K}$, 则对每一$f\in\mathbf{K}$, $\omega\in\Omega_0$, $\exists m_k=m_k(\omega,f)$, 使

$$\sup_{0\le t\le 1}|Y_{m_k}(t,\omega)-f(t)|\to 0.$$

和(2.10)的证明类似有

$$\sup_{0\le t\le 1}|Z_{m_k}(t,\omega)-f(t)|\to 0.$$

综上定理2.1的结论证毕. □

关于线性过程的强逼近,有下面的结果:

定理 2.2 设$\{\varepsilon_i\}$、$\{X_t\}$、$\{a_i\}$如定理2.1中所定义, $\{W(t,\omega),t\ge 0\}$为Wiener过程.

(i) 假设$\mathsf{E}|\varepsilon_0|^p<\infty$, $p>2$, $\mathsf{E}\varepsilon_0{}^2=1$, 则有

$$\sum_{t=1}^{n}X_t-AW(n)=o(n^{1/p})\qquad \text{a.s..}$$

(ii) 假设对于$|t|<t_0$, 有$\mathsf{E}e^{t\varepsilon_0}<\infty$, 则

$$\sum_{t=1}^{n}X_t-AW(n)=O(\log n)\qquad \text{a.s..}$$

证明: (i) 注意到

$$\sum_{t=1}^{n}X_t=\Big(\sum_{j=0}^{m}a_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Big)+\widetilde{\varepsilon}_0-\widetilde{\varepsilon}_n+\sum_{j>m}a_j\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i-j}\Big),$$

其中$\widetilde{\varepsilon}_0,\widetilde{\varepsilon}_n$定义同定理2.1, 进而有

$$\begin{aligned}I&=\Big|\sum_{t=1}^{n}X_t-AW(n)\Big|/n^{1/p}\\&\leq\Big|\sum_{j>m}a_j\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i-j}\Big)-\sum_{j>m}a_jW(n)\Big|/n^{1/p}+\frac{|\widetilde{\varepsilon}_0|}{n^{1/p}}+\frac{|\widetilde{\varepsilon}_n|}{n^{1/p}}\\&\quad+\Big|\Big(\sum_{j=0}^{m}a_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Big)-\Big(\sum_{j=0}^{m}a_j\Big)W(n)\Big|/n^{1/p}\\&=I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}\tag{2.11}$$

对I_1而言有

$$I_1\leq\sum_{j>m}|a_j|\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i-j}-W(n)\Big|/n^{1/p}=\sum_{j>m}|a_j|\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{i-j}-\xi_i)\Big|/n^{1/p}.\tag{2.12}$$

其中$\xi_i\overset{\text{def}}{=}W(i)-W(i-1)$, 并且使得$\{\xi_i\}$与$\{\varepsilon_i\}$独立(这可以通过扩大原概率空间, 即空间的联合来给出一个新的空间来完成). 再由$\{\xi_i\}$相互独立, $\{\varepsilon_i\}$相互独立, 可知$\{\xi_i-\varepsilon_i\}$相互独立. 往证

$$\mathsf{E}\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\xi_i)\Big|/n^{1/p}<\infty,\tag{2.13}$$

由引理1.3, 此时只须证明$\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\xi_i)\Big|/n^{1/p}<\infty$ a.s., 并且$\mathsf{E}\sup_n|\varepsilon_n-\xi_n|/n^{1/p}<\infty$. 由文献[10]、[11]的结果有$\lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\xi_i)\Big|/n^{1/p}=0$ a.s., 故$\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\xi_i)\Big|/n^{1/p}<\infty$ a.s.. 再由引理1.2的(2)有

$$\mathsf{E}\sup_n\frac{|\varepsilon_n-\xi_n|}{n^{1/p}}\leq\mathsf{E}\sup_n\frac{|\varepsilon_n|}{n^{1/p}}+\mathsf{E}\sup_n\frac{|\xi_n|}{n^{1/p}}<\infty.$$

故(2.13)式成立. 再由leví引理、引理1.4及(2.13)式有

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{i-j}-\xi_i)\Big|/n^{1/p}\Big)=\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\mathsf{E}\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\xi_i)\Big|/n^{1/p}<\infty,$$

于是

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{i-j}-\xi_i)\Big|/n^{1/p}<\infty \qquad \text{a.s..} \tag{2.14}$$

对每个固定的m, 由$\mathsf{E}|\widetilde{\varepsilon}_0|<\infty$, 有$I_2\to 0$ a.s., $n\to\infty$. 易见

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\Big\{\frac{|\varepsilon_{n-k}|}{n^{1/p}}>\varepsilon\Big\}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{|\varepsilon_0|>\varepsilon n^{1/p}\}<\infty,$$

故由Borel-Cantelli引理有$\varepsilon_{n-k}/n^{1/p}\to 0$ a.s., 即对每个固定的m, 有

$$I_3=\Big|\sum_{k=0}^{m}\widetilde{a}_k\varepsilon_{n-k}\Big|/n^{1/p}\to 0 \qquad \text{a.s..} \tag{2.15}$$

由文献[10]、[11]的结果有$\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i-W(n)=o(n^{1/p})$ a.s.. 综合上述事实, 并利用(2.11)、(2.12)、(2.14)、(2.15)式有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}I &\le \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_1+\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(I_2+I_3)+\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_4\\ &\le \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{m}|a_j|\Big|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i-W(n)\Big|/n^{1/p}=0, \qquad \text{a.s..}\end{aligned}$$

此即$\lim\limits_{n\to\infty}I=0$, a.s.. (i)得证.

(ii) 为完成(ii)的证明, 只须证明对任意$C_n\uparrow\infty$, 我们有

$$I=\Big|\sum_{t=1}^{n}X_t-AW(n)\Big|/(C_n\log n)\to 0 \qquad \text{a.s..}$$

易见

$$\begin{aligned}I &\le \Big|\sum_{j>m}a_j\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{i-j}\Big)-\sum_{j>m}a_jW(n)\Big|/(C_n\log n)+\frac{|\widetilde{\varepsilon}_0|}{C_n\log n}+\frac{|\widetilde{\varepsilon}_n|}{C_n\log n}\\ &\quad+\Big|\Big(\sum_{j=0}^{m}a_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\Big)-\sum_{j=0}^{m}a_jW(n)\Big|/(C_n\log n)\\ &= I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned} \tag{2.16}$$

由文献[10]、[11]的结果有

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_j\Big(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i-W(n)\Big)=O(\log n) \qquad \text{a.s..} \tag{2.17}$$

易见

$$I_1\le\sum_{j>m}|a_j|\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{i-j}-\xi_i)\Big|/(C_n\log n), \tag{2.18}$$

其中$\xi_i\overset{\text{def}}{=}W(i)-W(i-1)$. 根据引理1.2的(3)、引理1.5, 与(i)中(2.13)式证明类似, 有

$$\mathsf{E}\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\xi_i)\Big|/(C_n\log n)<\infty.$$

于是

$$\mathsf{E}\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{i-j}-\xi_i)\Big|/(C_n\log n)=\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\mathsf{E}\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\xi_i)\Big|/(C_n\log n)<\infty,$$

故

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\sup_n\Big|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_{i-j}-\xi_i)\Big|/(C_n\log n)<\infty \qquad \text{a.s..} \tag{2.19}$$

$I_2\to 0$ a.s., $n\to\infty$是显然的. 由引理1.5存在$t^*>0$, 使$\mathsf{E}e^{t^*|\varepsilon_0|}<\infty$. 利用该事实, 采用与(2.15)式类似的方法, 对每个固定的m, 有

$$I_3=\Big|\sum_{k=0}^{m}\widetilde{a}_k\varepsilon_{n-k}\Big|/(C_n\log n)\to 0 \qquad \text{a.s.}, \qquad n\to\infty. \tag{2.20}$$

于是利用(2.16)、(2.17)、(2.18)、(2.19)、(2.20)式, 可得

$$\lim_{n\to\infty}I\le\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_1+\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(I_2+I_3)+\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_4=0, \qquad \text{a.s..}$$

此即$\lim\limits_{n\to\infty}I=0$, a.s.. (ii)得证. □

我们的定理改进了陆传荣、邱瑾([4])关于线性过程泛函型重对数律和强逼近的结果. 在泛函型重对数律的问题中, 我们实质性地去掉陆传荣、邱瑾定理中$\sum\limits_{j=1}^{\infty}j^2{a_j}^2<\infty$及$\sum\limits_{j=1}^{\infty}j^{1/2}|a_j|<\infty$的条件, 而且将要求$\mathsf{E}|\varepsilon_0|^p<\infty$, $p>2$减弱为要求$\mathsf{E}|\varepsilon_0|^2<\infty$. 在强逼近的问题中, 我们也实质性地去掉陆传荣、邱瑾定理中$\sum\limits_{j=1}^{\infty}j^2{a_j}^2<\infty$的限制, 并将$\mathsf{E}|\varepsilon_0|^{p+\delta}<\infty$, $p>2$, $\delta>0$, 减弱为$\mathsf{E}|\varepsilon_0|^p<\infty$, $p>2$.

§3. NA序列产生线性过程的重对数律

本节讨论由严平稳NA随机变量序列所生成的线性过程满足重对数律的条件. 主要结果如下

定理 3.1 设$\{\varepsilon_i; i\in\mathbf{Z}\}$是严平稳的NA随机变量序列, $\mathsf{E}\varepsilon_1=0$, $\mathsf{E}{\varepsilon_1}^2<\infty$, $\sigma^2=\mathsf{E}{\varepsilon_1}^2+2\sum\limits_{i=2}^{\infty}\mathsf{E}(\varepsilon_1\varepsilon_i)>0$, $\{a_j; j\in\mathbf{Z}\}$是一实数序列, 满足$\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|<\infty$, 定义$X_t=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}a_i\varepsilon_{t-i}$, 则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\Big|\sum\limits_{t=1}^{n}X_t\Big|}{(2\sigma^2n\log\log n)^{1/2}}=\Big|\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\Big| \qquad \text{a.s..} \tag{3.1}$$

证明: 对$m,n,t\in\mathbf{N}$, 定义

$$Y_{m,n}=(2n\log\log n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=-m}^{m}a_j\varepsilon_{t-j},$$
$$\widetilde{a}_m=0,\qquad \widetilde{a}_j=\sum_{i=j+1}^{m}a_i,\qquad j=0,1,\cdots,m-1,$$
$$\widetilde{\widetilde{a}}_{-m}=0,\qquad \widetilde{\widetilde{a}}_j=\sum_{i=-m}^{j-1}a_i,\qquad j=-m+1,-m+2,\cdots,0,$$
$$\widetilde{\varepsilon}_t=\sum_{j=0}^{m}\widetilde{a}_j\varepsilon_{t-j},\qquad \widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_t=\sum_{j=-m}^{0}\widetilde{\widetilde{a}}_j\varepsilon_{t-j}.$$

于是由诸记号的定义不难推得

$$\begin{aligned}Y_{m,n}&=\Big(\sum_{j=-m}^{m}a_j\Big)(2n\log\log n)^{-1/2}\Big(\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\Big)\\&\quad+(2n\log\log n)^{-1/2}(\widetilde{\varepsilon}_0-\widetilde{\varepsilon}_n+\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_{n+1}-\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_1),\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$(2n\log\log n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}X_t=Y_{m,n}+(2n\log\log n)^{-1/2}\Big(\sum_{t=1}^{n}\sum_{|j|>m}a_j\varepsilon_{t-j}\Big).\tag{3.3}$$

由$\{\varepsilon_i;i\in\mathbf{Z}\}$的同分布性, 对每个$\varepsilon>0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{|\varepsilon_{n-j}|/(2n\log\log n)^{1/2}>\varepsilon\}\le\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\{|\varepsilon_0|^2>2\varepsilon^2n\log\log n\}<\infty.\tag{3.4}$$

上式中最后一个不等号成立是由于 $\mathsf{E}\,|\varepsilon_0|^2<\infty$. 所以根据 (3.4) 及 Borel-cantelli 引理可知$(2n\log\log n)^{-1/2}\varepsilon_{n-j}\to0$ a.s., $n\to\infty$, $j\ge0$. 进一步$(2n\log\log n)^{-1/2}\widetilde{\varepsilon}_n\to0$ a.s., 用同样的方法也可以证明$(2n\log\log n)^{-1/2}\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_{n+1}\to0$ a.s.. 至于$(2n\log\log n)^{-1/2}\widetilde{\varepsilon}_0\to0$ a.s.及$(2n\log\log n)^{-1/2}\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_1\to0$ a.s.是显然的. 综上便知

$$(2n\log\log n)^{-1/2}(\widetilde{\varepsilon}_0-\widetilde{\varepsilon}_n+\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_{n+1}-\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_1)\to0\qquad\text{a.s..}\tag{3.5}$$

由文献[5]的定理1知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(2n\log\log n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t=\sigma\qquad\text{a.s..}$$

显然$\{-\varepsilon_i;i\in\mathbf{Z}\}$也为NA随机变量列, 并且满足定理条件, 故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(2n\log\log n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}(-\varepsilon_t)=\sigma\qquad\text{a.s..}$$

因此我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\Big|=\sigma\qquad\text{a.s..}\tag{3.6}$$

令$S_n=\sum\limits_{t=1}^{n}X_t$, 综合(3.2)、(3.3)、(3.5)、(3.6)得

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}(2n\log\log n)^{-1/2}|S_n|\\
=&\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big|Y_{m,n}+\sum_{|j|>m}a_j(2n\log\log n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t-j}\Big|\\
\le&\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big|\sum_{j=-m}^{m}a_j\Big|(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\Big|+\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{|j|>m}|a_j|(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t-j}\Big|\\
\le&\Big|\sum_{j=-m}^{m}a_j\Big|\sigma+\sum_{|j|>m}|a_j|\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t-j}\Big|\qquad \text{a.s.,}
\end{aligned}\tag{3.7}$$

再由平稳性及引理1.4、引理1.6有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t-j}\Big|\\
=&\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|\mathsf{E}\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\Big|<\infty.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

故由(3.8)有

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t-j}\Big|<\infty\qquad\text{a.s..}\tag{3.9}$$

利用(3.9)式, 在(3.7)中再令$m\to\infty$, 就有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(2n\log\log n)^{-1/2}|S_n|\le\Big|\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\Big|\sigma\qquad\text{a.s..}\tag{3.10}$$

另一方面, 由(3.3)、(3.6)式还有

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{n\to\infty}}(2n\log\log n)^{-1/2}|S_n|\\
\ge&\overline{\lim_{n\to\infty}}\Big|\sum_{j=-m}^{m}a_j\Big|(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t\Big|-\lim_{n\to\infty}(2n\log\log n)^{-1/2}|\widetilde{\varepsilon}_0-\widetilde{\varepsilon}_n+\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_{n+1}-\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_1|\\
&-\sum_{|j|>m}|a_j|\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t-j}\Big|\\
=&\Big|\sum_{j=-m}^{m}a_j\Big|\sigma-\sum_{|j|>m}|a_j|\sup_n(2n\log\log n)^{-1/2}\Big|\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t-j}\Big|\qquad\text{a.s..}
\end{aligned}\tag{3.11}$$

在(3.11)式中再令$m\to\infty$, 便有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(2n\log\log n)^{-1/2}|S_n|\ge\Big|\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\Big|\sigma\qquad\text{a.s..}\tag{3.12}$$

由(3.10)、(3.12)知(3.1)式成立. □

参 考 文 献

[1] Phillips, P.C.B., Solo, V., Asymptotic for linear processes, *Ann. Statist.*, **20**(1992), 971–1001.

[2] Qiu, J., Lin, Z.Y., The functional central limit theorem for linear process with strong near-epoch dependent innovations, 已投稿 *J. Econome.*, (邱瑾博士论文), (2004).

[3] Wang, Q.Y., Lin, Y.X., Gulati, C.M., Strong approximation for long memory processes with application, *J. Theor. Probab.*, **16**(2003), 377–389.

[4] Lu, C.R., Qiu,J., Strong approximation for linear process by Wiener processes, 已投稿 *Statist. Probab. Letters*, (邱瑾博士论文), (2004).

[5] Shao, Q.M., Su, C., The Law of the iterated Logarithm for negatively associated random variables, *Stochastic Process. Appl.*, **83**(1999), 139–148.

[6] 吴智泉, 王向忱, 巴氏空间上的概率论, 吉林大学出版社, 长春, 1990.

[7] Ledoux, M., Talagrand, M., *Probability in Banach Spaces – Isoperimetry and processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[8] de Acosta, A., A new proof of the Hartman-Wintner law of the iterated logarithm, *Ann. Probab.*, **11**(1983), 270–276.

[9] 林正炎, 陆传荣, 苏中根, 概率极限理论基础, 高等教育出版社, 1999.

[10] Komlós, J., Major, P., Tusnády, G., An approximation of partial sums of independent R.V.'s and the sample DF, I, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, **32**(1975), 111–131.

[11] Komlós, J., Major, P., Tusnády, G., An approximation of partial sums of independent R.V.'s and the sample DF, II, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, **34**(1976), 33–58.

Strong Approximation and the Law of the Iterated Logarithm for Linear Processes

Tan Xili[1,2] Zhao Shishun[2] Yang Xiaoyun[2]

([1] *College of Mathematics, Beihua University, Jilin, 132013*)

([2] *Institute of Mathematics, Jilin University (Qianwei Campus), Changchun, 130012*)

In this paper, we prove strong approximations and the functional law of the iterated logarithm for linear processes generated by i.i.d. random variables, and give the law of the iterated logarithm for linear processes generated by NA random variables.

Keywords: Linear processes, functional law of the iterated logarithm, strong approximations, law of the iterated logarithm.

AMS Subject Classification: 60F15, 60G15, 60F17.