

指数分布场合下双应力步加试验的设计*

徐海燕 费鹤良

(上海师范大学数理信息学院, 上海, 200234)

摘要

本文利用指数分布场合下双应力无交互作用时定时步进应力加速寿命试验(简称步加试验)的非退化试验设计与退化试验设计的关系,将双应力试验设计转化成单应力试验设计,在“使得工作应力下产品对数分位寿命的极大似然估计的渐近方差最小”的最优准则下,给出双应力无交互作用时定时步加试验的设计方法,同时证明该设计也是D-最优的.

关键词: 指数分布, 步加试验, 最优设计.

学科分类号: O213.2.

§1. 引言

由于单个应力水平的提高总有一个限度,超过这个限度,产品的失效机理就会发生变化.为了使失效机理在整个试验过程中保持不变,又要尽可能地缩短试验时间以得到常应力水平下产品寿命的分布特征,通常考虑多应力加速寿命试验.目前考虑较多的是双应力加速寿命试验,常用的加速方程有温度-湿度方程,广义艾林方程等.当应力之间没有交叉项时,通常加速方程经过一些变换(例如取对数等)可以化成如下形式:

$$\mu(x_1, x_2) = \ln \theta(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2. \quad (1.1)$$

其中 θ 为产品的对数特征寿命, x_1, x_2 为两个应力, μ 为产品的对数平均寿命.设 $x_{1,D}, x_{1,H}$ 分别为应力 x_1 的工作应力和最高应力水平, $x_{2,D}, x_{2,H}$ 分别为应力 x_2 的工作应力和最高应力水平.不失一般性,令 $0 = x_{1,D} \leq x_1 \leq x_{1,H} = 1, 0 = x_{2,D} \leq x_2 \leq x_{2,H} = 1$,否则可以通过 $x_i = (x_i - x_{i,D}) / (x_{i,H} - x_{i,D})$ 得到.

Escobar, L.A. & Meeker, W.Q. (1995)^[3]以及Meeker, W.Q. & Escobar, L.A. (1999)^[4]针对加速方程(1.1),给出了定时截尾恒定应力加速寿命试验的设计. Xu & Fei (2007)^[8]则在加速方程(1.1)的假设下,给出对数位置-刻度分布场合下定时步进应力加速寿命试验的设计.这里的最优准则指在工作应力 $(x_{1,D}, x_{2,D})$ 下,产品对数 p -分位寿命的极大似然估计的渐近方差($AsVar(\ln \hat{y}_p)$) (指数分布场合下对数平均寿命与对数分位寿命的极大似然估计

*上海市教育发展基金会资助(2007CG58),上海市重点学科建设项目资助(T0401),国家自然科学基金项目资助(10571057),上海市科委科技项目资助(075105118),上海市教委科技发展基金资助(04DB24).

本文2006年3月1日收到.

的渐近方差相同) 达到最小. 对于定时恒加试验, 设计指试验应力水平组合的选择和试验样品在这些应力水平组合上的分配; 对于定时步加试验, 设计则指试验应力水平组合的选择和试验时间在这些应力水平组合上的分配.

基于加速方程(1.1), 本文证明了指数分布场合下加速方程无交叉项时双应力定时步加试验的退化试验设计 (在§3给出) 优于非退化试验设计. 相较于Xu & Fei (2007)^[8], 本文还进一步证明了任给退化试验设计, 总可以找到与之有着相同 ($AsVar(\ln \hat{y}_p)$) 值的非退化试验设计, 并在此基础上给出了同时具有D-最优性 (即参数的极大似然估计的Fisher信息矩阵的行列式最大) 的非退化试验设计. 本文§4给出了如何得到加速方程无交叉项时双应力定时步加试验的最优设计和最优折衷设计的例子.

§2. 试验安排与产品寿命分布

设试验截尾时间为 τ , 每个应力水平组合 $(x_{1,i,j}, x_{2,i,j})$ 下, 试验开始的时间为 $\tau_{i,j}$, $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, k$, 令 $\tau_{1,1} = 0$. 为方便起见令下标 $(i, k_i+1) \equiv (i+1, 1)$, $i = 1, \dots, k-1$, $\tau_{k,k_k+1} = \tau$. 这里令同一 i 下产品的寿命的分布相同, 即 $\mu_{i,j} = \mu_{i,l} \triangleq \mu_i$, 其中 $\mu_{i,j} = \mu(x_{1,i,j}, x_{2,i,j})$ (由(1.1)式确定), $0 \leq x_{m,i,j} \leq 1$, $m = 1, 2$, $j = 1, \dots, k_i$, $i = 1, \dots, k$. 由(1.1)式可知, 使得 μ 值相同的所有点 (x_1, x_2) 在一条直线上, 称此直线为等 μ 值线 (见图1).

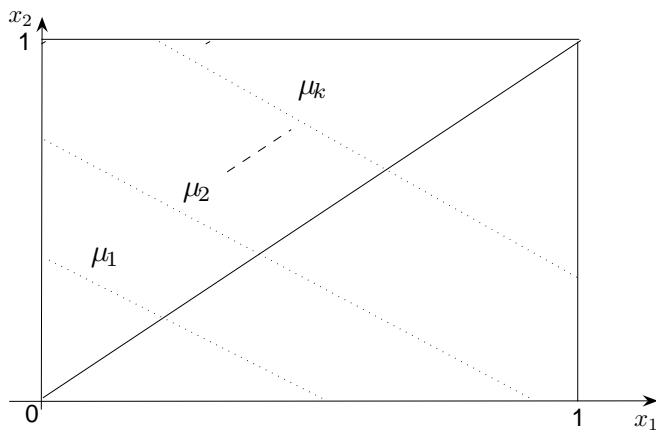


图1 等 μ 值线图

设产品寿命 Y 在步进应力下服从分布 $G(y)$, 则

$$G(y) = \begin{cases} 1 - \exp(-z_{i,j}) & \tau_{i,j} < y < \tau_{i,j+1} \\ 1 - \exp(-z_{k,k_k}) & y > \tau \end{cases} \quad (2.1)$$

其中,

$$z_{i,j} = \frac{y - \tau_{i,j} + s_{i,j}}{\theta_{i,j}} \quad j = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.2)$$

2. 试验在应力水平 x_i 上开始的时间满足

$$\tau_i = \tau_{i,1}. \quad (3.3)$$

其中, $i = 1, \dots, k$, 试验截尾时间仍为 $\tau_{k+1} = \tau$.

因此退化试验可看作单应力下的试验.

类似§2的分析, 记 $\xi_i = s_i/\theta_i$, $i = 1, \dots, k$, $\xi = \xi_{k+1} = (\tau - \tau_k + s_i)/\theta_k$, 其中 s_i 为步加试验中的实际试验时间 τ_i 折算到在常应力水平 x_i 上的试验时间, 可求得 $s_1 = 0$, $s_i = \sum_{q=2}^i (\tau_q - \tau_{q-1})\theta_i/\theta_{q-1}$, $i = 2, \dots, k$. 根据(2.3)式和(3.3)式, 以及 $\mu_i = \mu_{i,j}$, $j = 1, \dots, k_i$, 有 $s_i = s_{i,1}$, 因此 $\xi_i = \xi_{i,1}$, $i = 1, \dots, k$.

记退化试验下参数 β_0, β 的对数似然函数 $L(\beta_0, \beta|y)$ 为 L^d . 从而可得 β_0, β 的极大似然估计的Fisher信息矩阵为

$$F^d = n \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2 L^d}{\partial \beta_0^2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 L^d}{\partial \beta_0 \partial \beta}\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2 L^d}{\partial \beta_0 \partial \beta}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 L^d}{\partial \beta^2}\right) \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} F_{1,1}^o & \sum_{i=1}^k x_i \pi_i \\ \sum_{i=1}^k x_i \pi_i & \sum_{i=1}^k x_i^2 \pi_i \end{bmatrix} \triangleq n \begin{bmatrix} F_{1,1}^d & F_{1,2}^d \\ F_{2,1}^d & F_{2,2}^d \end{bmatrix}.$$

其中

$$\pi_i = \exp(-\xi_i) - \exp(-\xi_{i+1}) > 0. \quad (3.4)$$

因此有

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{k_i} \pi_{i,j}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.5)$$

§4. 结论和举例

由于工作应力下产品对数 p 分位寿命为 $\ln y_p = \beta_0 + \ln(-\ln(1-p))$, 因此

$$\text{AsVar}(\ln \hat{y}_p^{ind}) = \text{AsVar}(\hat{\beta}_0) = (F^{ind})_{1,1}^{-1}. \quad (4.1)$$

其中 $(F^{ind})_{1,1}^{-1}$ 表示Fisher信息矩阵的逆矩阵(即参数极大似然估计的协方差矩阵)中的(1,1)元素, $ind=o, d$, 据此通过适当的计算和推导可得下面的定理:

定理 4.1 在 $\text{AsVar}(\ln \hat{y}_p)$ 的意义下, 任给加速方程无交叉项时定时步加非退化试验的设计, 总能找到不劣于其的退化试验的设计.

定理 4.2 对于寿命服从指数分布的产品在定时转换步加试验下, 若退化试验和非退化试验的关系满足(3.2)式和(3.3)式, 那么在 $\text{AsVar}(\ln \hat{y}_p)$ 的意义下, 当下式成立时,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k_i} x_{1,i,j} \pi_{i,j} = x_i \pi_i \\ \sum_{j=1}^{k_i} x_{2,i,j} \pi_{i,j} = x_i \pi_i \end{cases}, \quad (4.2)$$

其中 π_{ij} 和 π_i 分别由(2.4)和(3.4)确定, 此退化试验和非退化试验等价.

定理 4.3 指数分布场合下的产品在定时转换步加试验下, 若给定退化试验, 那么与该退化试验的关系满足(3.2)、(3.3)和(4.2)式, 且在 $k_i = 2$ 的非退化试验中, 当 $x_{1,i,j}, x_{2,i,j}$ 均取边界上的点时得到的非退化试验设计D-最优 (即Fisher矩阵的行列式最大).

根据上面的定理, 我们可根据单应力下步加试验 (即这里所给出的退化试验) 的设计得到与之等价的双应力无交互作用时步加试验的设计. 在下面的例子中, 我们将说明如何得到双应力无交互作用时步加试验的最优设计和最优折衷设计.

例 [套用Escobar & Meeker (1995)和Nelson (1990)中的例子] 设产品的寿命分布服从指数分布 $\mu = \ln(\theta) = \gamma_0 + \gamma_1 \log(\text{VPM}) + \gamma_2 \log(\text{THICK})$, 根据Nelson, W. (1990), 第352页可知参数的经验值分别为 $\gamma_0 = 67.887$, $\gamma_1 = -12.28$, $\gamma_2 = -1.296$, 其中VPM的设计值为 $\text{VPM}_D = 80$, 允许的最高值为 $\text{VPM}_H = 200$, THICK的设计值为 $\text{THICK}_D = 0.266$, 允许的最高值为 $\text{THICK}_H = 0.355$, 由此可得 $x_{1,D} = \log(80) = 4.382$, $x_{2,D} = \log(0.266) = -1.324$, $x_{1,H} = \log(200) = 5.298$, $x_{2,H} = \log(0.355) = -1.036$, 将应力标准化 (根据Escobar & Meeker (1995)), 得 $\beta_0 = 15.808$, $\beta_1 = -11.249$, $\beta_2 = -0.374$, 此时 $x_{1,D} = x_{2,D} = 0$, $x_{1,H} = x_{2,H} = 1$, 考虑 n 个产品的定时步加试验, 设试验截尾时间为1000小时, 试验应力水平 $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$, 考察设计应力下平均寿命.

1. 采用最优设计

首先得到退化试验设的最优设计 (方法参见[2]、[9]), 即试验在两个应力水平 $x_1 = 0.7262$, $x_2 = 1$ 上进行, 在第二个应力水平上试验开始的时间为926.6小时, 根据等式(3.4), $\pi_1 = 1 - \exp(-926.6/(\beta_0 + x_1 * (\beta_1 + \beta_2))) = 0.4429$. 因此非退化最优试验设计可以通过如下方法得到:

- (a) 根据等式(3.4)和定理4.3, 可将 x_1 分为应力水平组合 $(x_{1,1,1}, x_{2,1,1}) = (0.7503, 0)$ 和 $(x_{1,1,2}, x_{2,1,2}) = (0.7171, 1)$, x_2 则不需要分.
- (b) 根据等式(4.2), 可将 π_1 分为 $\pi_{1,1} = 0.1213$, $\pi_{1,2} = 0.3216$. 因此可得试验在应力 $(0.7503, 0)$ 上开始的时间为0, 在应力 $(0.7171, 1)$ 上开始的时间为204.8小时, 在应力 $(1, 1)$ 上开始的时间为926.6小时.

此时 $\text{AsVar}(\ln \hat{y}_p) = 33.0893/n$.

2. 采用最优20%折衷设计的方法

这里只给出简单定时步加最优20%折衷设计的定义, 双应力的依此类推, 即给定试验在3个应力水平下进行, 其中中间应力水平是其它两个应力水平的中间值, 在中间应力水平上分配的时间占总试验时间20%的条件下, 得到的最优设计, 参见文献[1]、[4, p.545-546].

首先得到退化试验的20%最优折衷设计(方法参见[2]、[1]、[9]),即试验在三个应力水平 $x_1 = 0.6409$, $x_2 = 0.8205$, $x_3 = 1$ 上进行,在第二个应力水平上试验开始的时间为 $\tau_2 = 683.6$ 小时,在第三个应力水平上试验开始的时间为 $\tau_3 = 883.6$ 小时,根据等式(3.4), $\pi_1 = 1 - \exp(-683.6/(\beta_0 + x_1 * (\beta_1 + \beta_2))) = 0.148$, $\pi_2 = \exp(-683.6/(\beta_0 + x_1 * (\beta_1 + \beta_2))) - \exp(-(883.6 - 683.6)/(\beta_0 + x_2 * (\beta_1 + \beta_2))) = 0.2680$.非退化折衷试验设计可以通过如下方法得到:根据等式(3.4),等式(4.2)和定理4.3,

- (a) 由 $x_1 = 0.6409$, $\tau_1 = 0$,得到与之等价的两个边界应力水平组合和对应组合上试验开始时间分别为

$$\begin{aligned}(x_{1,1,1}, x_{2,1,1}) &= (0.6622, 0), & \tau_{1,1} &= 0, \\(x_{1,1,2}, x_{2,1,2}) &= (0.6289, 1), & \tau_{1,2} &= 233.1.\end{aligned}$$

- (b) 由 $x_2 = 0.8204$, $\tau_2 = 683.6$,得到与之等价的两个边界应力水平组合和对应组合上试验开始时间为

$$\begin{aligned}(x_{1,2,1}, x_{2,2,1}) &= (0.8477, 0), & \tau_{2,1} &= 683.6, \\(x_{1,2,2}, x_{2,2,2}) &= (0.8145, 1), & \tau_{2,2} &= 714.4.\end{aligned}$$

- (c) 由 $x_3 = 1$, $\tau_3 = 883.6$,得到

$$(x_{1,3}, x_{2,3}) = (1, 1), \quad \tau_{3,1} = 883.6.$$

此时的 $\text{AsVar}(\ln \hat{y}_p)$ 为 $49.3212/n$.

附 录

附录A (证明定理4.1): 根据式4.1, $\text{AsVar}(\ln \hat{y}_p^{ind}) = (F_{1,1}^{ind} - F_{1,2}^{ind}(F_{2,2}^{ind})^{-1}F_{2,1}^{ind})^{-1}$, $ind=o, d$. 由于 $F_{1,1}^o = F_{1,1}^d$, 因此只要证 $F_{1,2}^o(F_{2,2}^o)^{-1}F_{2,1}^o \geq F_{1,2}^d(F_{2,2}^d)^{-1}F_{2,1}^d$ 即可.

根据(3.2)和(3.5),

$$\begin{aligned}F_{1,2}^d(F_{2,2}^d)^{-1}F_{2,1}^d &= \frac{(\sum x_i \pi_i)^2}{\sum x_i^2 \pi_i} = \frac{(\sum \sum \beta x_i \pi_{i,j})^2}{\sum \sum \beta^2 x_i^2 \pi_{i,j}} \\&= \frac{(\sum \sum \beta_1 x_{1,i,j} \pi_{i,j} + \sum \sum \beta_2 x_{2,i,j} \pi_{i,j})^2}{\sum \sum (\beta_1 x_{1,i,j} + \beta_2 x_{2,i,j})^2 \pi_{i,j}} \triangleq \frac{N_d}{D_d}, \\F_{1,2}^o(F_{2,2}^o)^{-1}F_{2,1}^o &= \frac{(\sum \sum x_{1,i,j} \pi_{i,j})^2 \sum \sum x_{2,i,j}^2 \pi_{i,j} + (\sum \sum x_{2,i,j} \pi_{i,j})^2 \sum \sum x_{1,i,j}^2 \pi_{i,j}}{\sum \sum x_{1,i,j}^2 \pi_{i,j} \sum \sum x_{2,i,j}^2 \pi_{i,j} - (\sum \sum x_{1,i,j} x_{2,i,j} \pi_{i,j})^2} \\&\quad - \frac{2 \sum \sum x_{1,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_{2,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_{1,i,j} x_{2,i,j} \pi_{i,j}}{\sum \sum x_{1,i,j}^2 \pi_{i,j} \sum \sum x_{2,i,j}^2 \pi_{i,j} - (\sum \sum x_{1,i,j} x_{2,i,j} \pi_{i,j})^2} \triangleq \frac{N_o}{D_o}.\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}
 & N^o D^d - N^d D^o \\
 = & \beta^2 \left(\sum \sum x_{2,i,j} \pi_{i,j} \right)^2 \left(\sum \sum x_i x_{1,i,j} \pi_{i,j} \right)^2 \\
 & + \beta^2 \left(\sum \sum x_{1,i,j} \pi_{i,j} \right)^2 \left(\sum \sum x_i x_{2,i,j} \pi_{i,j} \right)^2 \\
 & - 2\beta_1 \beta \sum \sum x_{1,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_{2,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_{1,i,j} x_{2,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_i x_{1,i,j} \pi_{i,j} \\
 & - 2\beta_2 \beta \sum \sum x_{1,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_{2,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_{2,i,j}^2 \pi_{i,j} \sum \sum x_i x_{1,i,j} \pi_{i,j} \\
 = & \beta^2 \left(\sum \sum x_{1,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_i x_{2,i,j} \pi_{i,j} - \sum \sum x_{2,i,j} \pi_{i,j} \sum \sum x_i x_{1,i,j} \pi_{i,j} \right)^2 \\
 \geq & 0.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

因此得证. \square

附录B (证明定理4.2): 将(4.2)代入(A.1)得 $N^o D^d - N^d D^o = 0$, 因此得证. \square

附录C (证明定理4.3): 设退化点 x_i 分解成两个非退化点 $(x_{1,i,j}, x_{2,i,j})$, $j = 1, 2$, $i = 1, \dots, k-1$ (由于 x_k 本身就在端点上, 因此其分解的点仍然是本身). 令 $d_{i,1} = x_{1,i,1} - x_i$, $d_{i,2} = x_i - x_{1,i,2}$, m 为等 μ 值线的斜率, 则 $x_{2,i,1} = x_i + m d_{i,1}$, $x_{2,i,2} = x_i - m d_{i,2}$, $i = 1, \dots, k-1$. 由于(4.2)和(3.5), 因此 $d_{i,2} = \pi_{1,1} d_{i,1} / \pi_{1,2}$. 不失一般性, 令 $d_{i,1} > 0$, 则 $d_{i,2} > 0$, $i = 1, \dots, k-1$.

由于 $\pi_{i,j}$ 与 $d_{i,j}$ 无关, 因此 $F_{1,1}^o, F_{1,2}^o$ 均与 $d_{i,j}$ 无关, $i = 1, \dots, k-1, j = 1, 2$.

$$F_{2,2}^o = \sum x_i^2 \pi_i(1,1)^\top(1,1) + \sum \sum d_{i,j}^2 \pi_{i,j}(1,m)^\top(1,m).$$

从而有

$$\frac{\partial F^o}{\partial d_{i,j}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(d_{i,1} + d_{i,2})\pi_{i,j}(1,m)^\top(1,m) \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial |F^o|}{\partial d_{i,j}} &= |F^o| \times \text{tr} \left[(F^o)^{-1} \frac{\partial F^o}{\partial d_{i,j}} \right] \\
 &= |F| \times \text{tr} [2(F^o)_{2,2}^{-1} (d_{i,1} + d_{i,2}) \pi_{i,j}(1,m)^\top(1,m)] \\
 &= 2|F| (d_{i,1} + d_{i,2}) \pi_{i,j}(1,m) F_{2,2}^{o-1}(1,m)^\top > 0.
 \end{aligned}$$

因此 $|F^o|$ 为 $d_{i,j}$ 的单调递增函数 ($i = 1, \dots, k-1, j = 1, 2$), 从而得证. \square

参 考 文 献

[1] Bai, D.S., Kim, M.S., Optimum simple step-stress accelerated life tests for Weibull distributions and type I censoring, *Naval Research Logistics*, **40**(1993), 193–210.

《应用概率统计》版权所有

- [2] Bai, D.S., Kim, M.S., Lee, S.H., Optimum simple step-stress accelerated life tests with censoring, *IEEE Transactions on Reliability*, **38**(1989), 528–532.
- [3] Escobar, L.A., Meeker, W.Q., Planning accelerated life tests with two or more experimental factors, *Technometrics*, **37**(1995), 411–427.
- [4] Meeker, W.Q., Escobar, L.A., *Statistical Method for Reliability Data*, John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [5] Nelson, W., Accelerated life-testing step stress models and data analysis, *IEEE Transactions on Reliability*, **29**(1980), 103–108.
- [6] Nelson, W., *Accelerated Testing*, John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- [7] Xu, Haiyan, Tang, Yincui, Commentary: The Khamis/Higgins model, *IEEE Transactions on Reliability*, **52**(2003), 4–6.
- [8] Xu, Haiyan, Fei, Heliang, Planning step-stress accelerated life tests with two experimental variables, *IEEE Transactions on Reliability*, **56**(2007), 569–579.
- [9] 程依明, 步进应力加速寿命试验的最优设计, *应用概率统计*, **10**(1994), 52–61.

Planning Step-Stress Accelerated Life Tests with Two Experimental Factors for Exponential Distributions and Type I Censoring

XU HAIYAN FEI HELIANG

(College of Mathematics and Sciences, Shanghai Normal University, Shanghai, 200234)

In this article, according to the optimal criterion of minimizing the asymptotic variance of the maximum likelihood estimation of the logarithm of the 100 p th-percentile in the lower tail of the failure-time distribution at work conditions, methods and guidelines are given for planning two-factor time step-stress accelerated life test experiments (ALT) for models in which there is no interaction between the factors when life-time of the tested products is exponential distributed at constant testing conditions. The design given here is also proved to be D-optimal.

Keywords: Exponential distribution, step-stress ALT, optimal design.

AMS Subject Classification: 62N05, 62K05, 62F05.