文章编号:1671-7848(2008)03-0265-04

不确定变时滞系统的鲁棒非脆弱 H_∞ 控制

罗跃生,董晓璋,孙明丽
(哈尔滨工程大学 理学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘　　要:针对一类参数不确定时变时滞线性系统,研究了鲁棒非脆弱 H_∞ 控制器的设计问题。首先利用积分不等式和引入自由权矩阵的方法,得到了系统稳定及非脆弱控制器存在的一个充分条件;然后将其转化为线性矩阵不等式(LMI)表示,通过线性矩阵不等式的可行解构造非脆弱控制器,保证了闭环系统渐近稳定且满足一定的 H_∞ 干扰抑制水平,得到的稳定化条件是依赖时滞大小且不要求时滞函数的导数信息,即适用于时滞快速变化的系统。仿真实例表明了该方法的有效性和可行性。
关　键　词:非脆弱控制;鲁棒 H_∞ 控制;不确定系统;时滞依赖;线性矩阵不等式
中图分类号:TP 13　　　　文献标识码:A

Robust Non-fragile H_∞ Control for Uncertain Time-varying Delay Systems

LUO Yue-sheng, *DONG Xiao-zhang*, *SUN Ming-li*
(School of Science, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: To uncertain time-varying linear systems with time-delay, the problem of robust non-fragile H_∞ controller design is studied. A sufficient condition of existence of non-fragile controller is obtained by using integral inequality and free-weighting matrix method. Based on the linear matrix inequality(LMI) approach, the sufficient condition could be transformed to an LMI. The controller is easily constructed by the feasible solution. The obtained controller guarantees the robust stability and a prescribed H_∞ performance of the resulting closed-loop system. The stabilization condition depends on size of delay and requires no information about the derivate of time-delay, which can be used to deal with the systems with fast time-varying delay. The simulation result shows the validity and feasibility of the approach.
Key words: non-fragile control; robust H_∞ control; uncertain systems; delay dependent; linear matrix inequality

1　引　言

在实际应用中,往往要求控制系统具备稳定性且满足相应的性能指标,而影响系统稳定的最主要因素包括时滞和不确定性。关于不确定时滞系统的研究,已取得了很多有意义的结论[1~3]。然而当控制器本身实现过程中由于仪器精度不足和舍入误差等因素,控制器参数会发生一定的变化。这将导致闭环系统的稳定性被破坏以及性能下降,即控制器本身是脆弱的。因此,关于系统鲁棒非脆弱控制器的设计问题受到了国内外众多学者的关注[4~8]。Keel 等在文献[4]中首次提出了非脆弱控制器的思想,文献[7]研究了时滞为常数的多时滞系统的鲁棒非脆弱控制器的设计。关于不确定时变时滞线性系统的非脆弱控制问题在文献[8]中进行了研究。然而上述关于时变时滞系统的鲁棒非脆弱控制的研究都是基于时滞函数倒数存在,且满足一给定的上界(大多是针对时滞导数小于 1 的慢时滞系统),而对于时滞函数非光滑或导数界不存在的系统却不适用,但在一些实际系统中是很难确定时滞导数存在与否或其确定上界。

本文通过定义新的 Lyapunov 函数,使用积分不等式和引入自由权矩阵的方法,当系统不确定性为线性分式参数不确定性时,研究了不确定时变时滞系统的鲁棒非脆弱 H_∞ 控制。此方法只要求时滞函数上方有界,不需要时滞函数的倒数信息,因此快时滞也适用。

2　问题描述

考虑如下不确定时变时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)) + \\ \qquad (B + \Delta B)u(t) + (D + \Delta D)w(t) \\ z(t) = (C + \Delta C)x(t) + (C_d + \Delta C_d)x(t - d(t)) + \\ \qquad (E + \Delta E)u(t) + (G + \Delta G)w(t) \\ x(s) = \varphi(s), s \in [-\sigma, 0] \end{cases} \tag{1}$$

式中,$x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量;$u(t) \in \mathbf{R}^m$ 为控制输入向量;$w(t) \in \mathbf{R}^p$ 为属于 $L_2[0, +\infty]$ 的干扰输入;$z(t) \in \mathbf{R}^q$ 为控制输出向量;时滞满足 $0 < d(t) \leqslant \sigma$;

收稿日期:2007-11-15;　收修定稿日期:2007-12-22
作者简介:罗跃生(1960-),男,湖南长沙人,教授,博士生导师,主要从事鲁棒控制及系统建模等方面的教学与科研工作。

$A, A_d, B, D, C, C_d, E, G$ 分别为适当维数的常数矩阵；$\Delta A, \Delta A_d, \Delta B, \Delta D, \Delta C, \Delta C_d, \Delta E, \Delta G$ 分别为不确定时变矩阵。

$$\begin{pmatrix} \Delta A & \Delta A_d & \Delta B & \Delta D \\ \Delta C & \Delta C_d & \Delta E & \Delta G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta A(t) & \Delta A_d(t) & \Delta B(t) & \Delta D(t) \\ \Delta C(t) & \Delta C_d(t) & \Delta E(t) & \Delta G(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Delta}(t)[H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4] \tag{2}$$

式中，

$$\boldsymbol{\Delta}(t) = [I - F(t)J]^{-1}F(t), F(t)F^{\mathrm{T}}(t) \leqslant I \tag{3}$$

式中，$I - JJ^{\mathrm{T}} > 0$。

采用非脆弱状态反馈控制器：

$$u = (K + \Delta K)x(t) \tag{4}$$

式中，$\Delta K = E_k \boldsymbol{\Delta}_k(t) H_k$，且 $\boldsymbol{\Delta}_k(t)$ 与 $\boldsymbol{\Delta}(t)$ 有相同形式。

$$\boldsymbol{\Delta}_k(t) = [I - F(t)J_c]^{-1}F(t), F(t)F^{\mathrm{T}}(t) \leqslant I \tag{5}$$

式中，$I - J_c J_c^{\mathrm{T}} > 0$。

注 1　在式(3)，式(5)中要求 $I - JJ^{\mathrm{T}} > 0$，$I - J_c J_c^{\mathrm{T}} > 0$ 成立，是为了保证 $I - F(t)J$ 与 $I - F(t)J_c$ 的逆存在。此类不确定性称为线性分式不确定性[9,10]。

结合式(1)，式(4)可得如下闭环系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{A}_d x(t - d(t)) + \bar{D}w(t) \\ z(t) = \bar{C}x(t) + \bar{C}_d x(t - d(t)) + \bar{G}w(t) \end{cases} \tag{6}$$

式中，

$$\bar{A} = A + \Delta A + (B + \Delta B)\bar{K}, \bar{A}_d = A_d + \Delta A_{\mathrm{d}}$$

$$\bar{C} = C + \Delta C + (E + \Delta E)\bar{K}, \bar{C}_d = C_d + \Delta C_{\mathrm{d}}$$

$$\bar{G} = G + \Delta G, \bar{K} = K + \Delta K$$

引理 1　对给定的对称矩阵 $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$，其中，$S_{11}$ 与 S_{22} 均为对称阵，且 $S_{12}^{\mathrm{T}} = S_{21}$，则下列三式等价：

① $S < 0$

② $S_{11} < 0$，$S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} < 0$

③ $S_{22} < 0$，$S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} < 0$

引理 2[10]　对任意常矩阵 $N > 0$ 和常数 $\sigma > 0$，向量函数 $x(t):[0,\sigma] \to \mathbf{R}^n$ 可积，则有下面的不等式成立：

$$\left(\int_{t-\sigma}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}} N \left(\int_{t-\sigma}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right) \leqslant \sigma \int_{t-\sigma}^{t} x^{\mathrm{T}}(s) N x(s)\mathrm{d}s$$

引理 3[11]　对于式(2)～式(5)中的 $\boldsymbol{\Delta}(t)$，以及适当维数矩阵 $M = M^{\mathrm{T}}$，S 和 N，下面两式等价：

① $M + S\Delta N + N^{\mathrm{T}}\Delta S^{\mathrm{T}} < 0$

② 存在 $\rho > 0$，使得：

$$\begin{pmatrix} M & \rho S & N^{\mathrm{T}} \\ \rho S^{\mathrm{T}} & -\rho I & \rho J^{\mathrm{T}} \\ N & \rho J & -\rho I \end{pmatrix} < 0$$

3 主要结论及证明

定理 1　对于闭环系统式(6)，若存在 $P > 0$，$S > 0$，$M > 0$ 以及矩阵 K 和正常数 $\gamma > 0$，使得下面的矩阵不等式成立：

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} N_1 & * & * & * & * \\ N_2 & -S & * & * & * \\ M\bar{A} & M\bar{A}_d & N_3 & * & * \\ \bar{D}^{\mathrm{T}}P & 0 & \bar{D}^{\mathrm{T}}M & -\gamma I & * \\ \bar{C} & \bar{C}_d & 0 & \bar{G} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{7}$$

式中，

$N_1 = \bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} - S$；$N_2 = \bar{A}_d^{\mathrm{T}}P + S$；

$N_3 = \sigma^2 S - 2M$。

那么存在非脆弱状态反馈控制器式(4)，使得系统是渐近稳定的，且满足 H_∞ 性能指标，即 $\|z\|_2 < \gamma\|w\|_2$。

证明　为了证明方便，在本文证明过程中记 $x = x(t), x_d = x(t - d(t)), x_\sigma = x(t - \sigma)$，构造如下 Lyapunov 函数：

$$V(x(t),t) = V_1(x(t),t) + V_2(x(t),t)$$

$$V_1(x,t) = x^{\mathrm{T}}Px$$

$$V_2(x,t) = \sigma\int_{t-\sigma}^{t}(\alpha - t + \sigma)\dot{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)S\dot{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x,t) &= \dot{x}^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\dot{x} = x^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}}Px + \\ &\quad x^{\mathrm{T}}P\bar{A}x + x_d^{\mathrm{T}}\bar{A}_d^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\bar{A}_d x_d + \\ &\quad w^{\mathrm{T}}\bar{D}^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\bar{D}w \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x,t) &= \sigma^2\dot{x}^{\mathrm{T}}S\dot{x} - \sigma\int_{t-\sigma}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)S\dot{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha \leqslant \\ &\quad \sigma^2\dot{x}^{\mathrm{T}}S\dot{x} - \sigma\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)S\dot{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha \leqslant \\ &\quad \sigma^2\dot{x}^{\mathrm{T}}S\dot{x} - \left(\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right) \times \\ &\quad S\left(\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(\beta)\mathrm{d}\beta\right) = \sigma^2\dot{x}^{\mathrm{T}}S\dot{x} - \\ &\quad x^{\mathrm{T}}Sx - x_d^{\mathrm{T}}Sx_d + x^{\mathrm{T}}Sx_d + x_d^{\mathrm{T}}Sx \end{aligned} \tag{9}$$

由式(6)易知下面等式成立：

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}^{\mathrm{T}}M(\bar{A}x + \bar{A}_d x_d + \bar{D}w - \dot{x}) + (\bar{A}x + \\ &\quad \bar{A}_d x_d + \bar{D}w - \dot{x})^{\mathrm{T}}M\dot{x} \end{aligned} \tag{10}$$

令 $\xi = [x^{\mathrm{T}} \quad x_d^{\mathrm{T}} \quad \dot{x}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，结合式(8)～式(10)可得：

$$\dot{V}(x,t) = \xi^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} N_1 & * & * \\ N_2 & -S & * \\ M\bar{A} & M\bar{A}_d & N_3 \end{pmatrix}\xi < 0$$

则由 Lyapunov 稳定性定理可知，闭环系统式

(6)渐近稳定。在零初始条件下，引入：

$$J = \int_0^\infty (\gamma^{-1} z^{\mathrm{T}} z - \gamma w^{\mathrm{T}} w)\mathrm{d}t \tag{11}$$

利用系统零初始条件和系统渐近稳定性可得：

$$J = \int_0^\infty (\gamma^{-1} z^{\mathrm{T}} z - \gamma w^{\mathrm{T}} w)\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_0^\infty (\dot{V}(x,t) + \gamma^{-1} z^{\mathrm{T}} z - \gamma w^{\mathrm{T}} w)\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^\infty \zeta^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi} \zeta \mathrm{d}t < 0$$

式中，$\zeta = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_d^{\mathrm{T}} \quad \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。

于是有 $\| z \|_2 < \gamma \| w \|_2$，定理得证。

由于式(7)中的矩阵不等式还含有不确定项，无法利用 LMI 进行求解，下面的定理将式(7)转化成利于求解的线性矩阵不等式。

定理 2　对于闭环系统式(6)，若存在矩阵 $X>0, T>0$ 和矩阵 W，正常数 $\rho_1>0$，$\rho_2>0$，$\gamma>0$，$\delta>0$ 使得下面的线性矩阵不等式成立：

$$\begin{pmatrix}
\boldsymbol{\Psi}_{11} & * & * & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{\Psi}_{21} & -\boldsymbol{T} & * & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{\Psi}_{31} & \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{X} & \boldsymbol{\Psi}_{33} & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & -\gamma\boldsymbol{I} & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{\Psi}_{51} & \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{X} & 0 & \boldsymbol{G} & -\gamma\boldsymbol{I} & * & * & * & * \\
\rho_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} & 0 & \rho_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} & 0 & \rho_1\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & -\rho_1\boldsymbol{I} & * & * & * \\
\boldsymbol{\Psi}_{71} & \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{X} & 0 & \boldsymbol{H}_4 & 0 & \rho_1\boldsymbol{J} & -\rho_1\boldsymbol{I} & * & * \\
\rho_2\boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0 & \rho_2\boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0 & \rho_2\boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & 0 & \rho_2\boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm{T}} & -\rho_2\boldsymbol{I} & * \\
\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_2\boldsymbol{J}_c & -\rho_2\boldsymbol{I}
\end{pmatrix} < 0 \tag{12}$$

式中，

$\boldsymbol{\Psi}_{11} = (\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BW})^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BW}) - \boldsymbol{T}$；

$\boldsymbol{\Psi}_{21} = \boldsymbol{XA}_d^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}$；$\boldsymbol{\Psi}_{31} = \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BW}$；

$\boldsymbol{\Psi}_{33} = h\delta^2\boldsymbol{T} - 2\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{X}$；$\boldsymbol{\Psi}_{51} = \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{EW}$；

$\boldsymbol{\Psi}_{71} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{X} + \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{W}$。

那么存在非脆弱状态反馈控制器式(4)，使得闭环系统式(6)渐近稳定，且满足 H_∞ 性能指标，并且反馈增益矩阵为 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{WX}^{-1}$。

证明　若令：

$$\bar{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix}
\bar{\boldsymbol{\Omega}} & * & * & * & * \\
\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S} & -\boldsymbol{S} & * & * & * \\
\boldsymbol{MA}+\boldsymbol{MB}\bar{\boldsymbol{K}} & \boldsymbol{MA}_d & \boldsymbol{N}_3 & * & * \\
\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} & -\gamma\boldsymbol{I} & * \\
\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{K}} & \boldsymbol{C}_d & 0 & \boldsymbol{G} & -\gamma\boldsymbol{I}
\end{pmatrix}$$

式中，

$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{K}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{K}}) - \boldsymbol{S}$；

$\bar{\boldsymbol{\Pi}}_1 = (\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \quad 0 \quad \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} \quad 0 \quad \boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$；

$\bar{\boldsymbol{\Pi}}_2 = (\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_3\bar{\boldsymbol{K}} \quad \boldsymbol{H}_2 \quad 0 \quad \boldsymbol{H}_4 \quad 0)$。

则式(7)可表达为

$$\bar{\boldsymbol{Y}} + \bar{\boldsymbol{\Pi}}_1\boldsymbol{\Delta}(t)\bar{\boldsymbol{\Pi}}_2 + \bar{\boldsymbol{\Pi}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{\Pi}}_1^{\mathrm{T}} < 0$$

即：

$$\begin{pmatrix}
\bar{\boldsymbol{\Omega}} & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S} & -\boldsymbol{S} & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{MA}+\boldsymbol{MB}\bar{\boldsymbol{K}} & \boldsymbol{MA}_d & \boldsymbol{N}_3 & * & * & * & * \\
\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} & -\gamma\boldsymbol{I} & * & * & * \\
\boldsymbol{C}+\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{K}} & \boldsymbol{C}_d & 0 & \boldsymbol{G} & -\gamma\boldsymbol{I} & * & * \\
\rho_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & \rho_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} & 0 & \rho_1\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & -\rho_1\boldsymbol{I} & * \\
\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_3\bar{\boldsymbol{K}} & \boldsymbol{H}_2 & 0 & \boldsymbol{H}_4 & 0 & \rho_1\boldsymbol{J} & -\rho_1\boldsymbol{I}
\end{pmatrix} < 0 \tag{13}$$

同理，再令：

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{\Omega} & * & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{A}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S} & -\boldsymbol{S} & * & * & * & * & * \\
\boldsymbol{MA}+\boldsymbol{MBK} & \boldsymbol{MA}_d & \boldsymbol{N}_3 & * & * & * & * \\
\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} & -\gamma\boldsymbol{I} & * & * & * \\
\boldsymbol{C}+\boldsymbol{EK} & \boldsymbol{C}_d & 0 & \boldsymbol{G} & -\gamma\boldsymbol{I} & * & * \\
\rho_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} & 0 & \rho_1\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} & 0 & \rho_1\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & -\rho_1\boldsymbol{I} & * \\
\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{K} & \boldsymbol{H}_2 & 0 & \boldsymbol{H}_4 & 0 & \rho_1\boldsymbol{J} & -\rho_1\boldsymbol{I}
\end{pmatrix}$$

式中，

$\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}) - \boldsymbol{S}$；

$\boldsymbol{\Pi}_1 = (\boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \quad 0 \quad \boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} \quad 0 \quad \boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad \boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_3^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\Pi}_2 = (\boldsymbol{H}_k \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$。

那么式(13)可写为

$$\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\Pi}_1\boldsymbol{\Delta}_k(t)\boldsymbol{\Pi}_2 + \boldsymbol{\Pi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Delta}_k^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm{T}} < 0$$

再次使用引理 3，并对所得的矩阵不等式左乘和右乘 $\mathrm{diag}[\boldsymbol{P}^{-1} \quad \boldsymbol{P}^{-1} \quad \boldsymbol{M}^{-1} \quad \boldsymbol{I} \quad \cdots \quad \boldsymbol{I}]$，且定义新变量，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{KP}^{-1}$，$\boldsymbol{M}^{-1} = \delta\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{SP}^{-1}$，$h = \sigma^2$，即得式(12)，定理证毕。

注 2　在式(3)和式(5)中，若令 $J=0$，$J_c=0$，则可得 $\boldsymbol{\Delta}_k(t) = \boldsymbol{\Delta}(t) = \boldsymbol{F}(t)$，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t) \leqslant \boldsymbol{I}$，参数的线性分式形式不确定性即变为一般文献中常见的范数有界不确定性。相应的在式(12)中，令 $J=0$，$J_c=0$ 即可得到系统渐近稳定，且满足 H_∞ 性能的充分条件。

注 3　若在式(4)中，令 $\Delta K = 0$，即是状态反馈增益中没有不确定性，则此时判断系统渐近稳定且满足 H_∞ 性能的充分条件为式(13)。

4 仿真示例

在闭环系统式(6)中，

$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，$A_d=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.1\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1.2\\ 2.0\end{pmatrix}$，

$D=\begin{pmatrix}0 & 1.0\\ 0 & 0.4\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$C_d=0$，$E=\begin{pmatrix}0.5\\ 0\end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0.1 & 0\end{pmatrix}$，$E_1=E_2=\begin{pmatrix}0.5 & 0.1\\ 0 & 0.5\end{pmatrix}$，

$H_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0.5 & 0.3\end{pmatrix}$，$H_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}$，$H_3=\begin{pmatrix}0.2\\ 0.5\end{pmatrix}$，

$H_k=\begin{pmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.2\end{pmatrix}$，$J=\begin{pmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}$，

$J_k=\begin{pmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{pmatrix}$，$F=\begin{pmatrix}\cos t & 0\\ 0 & \cos t\end{pmatrix}$，$H_4=0$，

$E_k=(0.1 \quad 0.1)$，$d(t)=0.5+0.5\sin t^2$，干扰 $w=[\sin(0.5t)*\exp(-0.8t);\ \sin(2t)*\exp(-t)]$。

由上可见，$d(t)\leqslant 1$，但其导数无界，于是以前文献中的方法由于要求导数信息而不适用。取 $\delta=r$，$\gamma=1$，利用本文定理 2，可得到如下可行解：

$X=\begin{pmatrix}1.0894 & 0.0423\\ 0.0423 & 0.2378\end{pmatrix}$，$T=\begin{pmatrix}0.3488 & -0.0064\\ -0.0064 & 0.0730\end{pmatrix}$

$\rho_1=0.7895$，$\rho_2=1.6326$，$K=(-0.4820 \quad -2.7041)$，取初始值 $x(t)=(x_1,x_2)^{\mathrm T}=(0.5,-0.25)^{\mathrm T}$，仿真结果如图 1，图 2 所示。

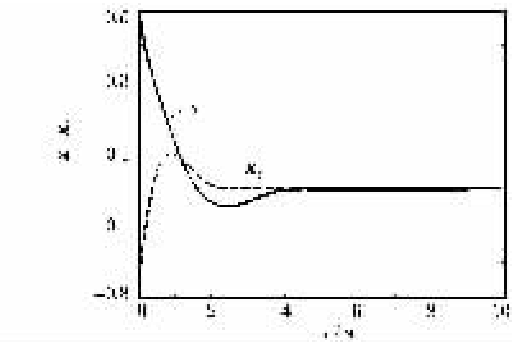

图 1 状态响应

Fig.1 Response of states

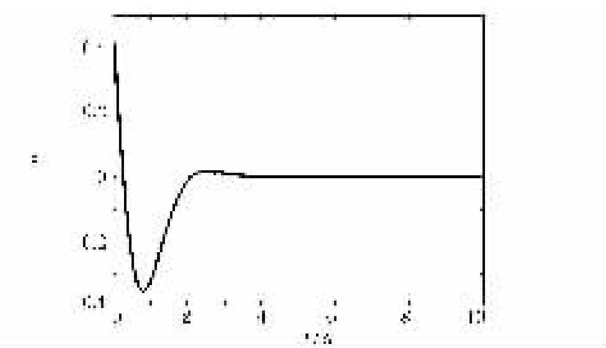

图 2 控制信号

Fig.2 Control signal

注意到，定理 2 是关于 γ 的线性矩阵不等式约束，于是可求得 γ 的最优值：

$X=\begin{pmatrix}2.0109 & 0.4735\\ 0.4735 & 0.1788\end{pmatrix}$，$T=\begin{pmatrix}0.2570 & 0.0661\\ 0.0661 & 0.0204\end{pmatrix}$

$\rho_1=0.1917$，$\rho_2=0.1707$，最小的 $\gamma=0.1744$，相应的最优控制器增益为

$$K=[-0.3630 \quad -4.9056]$$

5 结 语

本文研究了一类不确定时变时滞系统的鲁棒非脆弱 H_∞ 控制，给出了具有 H_∞ 干扰抑制的非脆弱控制器存在的一个充分条件，并转化成易于利用 Matlab 求解的线性矩阵不等式，得到了非脆弱控制器求解方法。该设计方法对于无法确定时滞函数的导数界以及导数不存在的系统也适用，于是在设计非脆弱控制器时，可以不用考虑时滞函数的导数信息，给设计过程带来了方便也扩大了适用范围。

参考文献(References)：

[1] Jeung E T，Kim J H，Park H B. H_∞ output feedback controller design for linear systems with time-varying delayed state[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，1998，43(7)：971-974.

[2] Fndman E，Shaked U. Delay-dependent stability and H_∞ control：constant and time-varying delays[J]. International Journal of Control，2003，76 (1)：48-60.

[3] Kwon O M，Park J H. On improved delay-dependent robust control for uncertain time-delay systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2004，49(11)：1989-1999.

[4] Keel L H . Bhataacharyya S P . Robust，fragile，or optimal [J]. IEEE Transactions on Automatic Control，1997，42(8)：1089-1105.

[5] Yee J S，Wang G H . An LMI approach to no - fragile guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems[J]. Asian Journal of Control，2001，3(3)：226-233.

[6] Lien C H，Cheng W C，Tsai C H，*et al*. Non-fragile observer-based controls of linear system via LMI approach[J]. Chaos，Solitons and Fractals，2007，32(4)：1530-1537.

[7] 翟丁，张庆灵，刘国义，等. 一类时滞线性系统的鲁棒非脆弱控制器设计[J]. 控制与决策，2006，21(5)：559-562. (Zhai Ding，Zhang Qingling，Liu Guoyi，*et al*. Robust non-fragile controller for a class of linear time-delay systems[J]. Control and Decision，2006，21(5)：559-562.)

[8] 林波，李俊明，刘贇. 一类参数不确定时滞系统的鲁棒非脆弱 H_∞ 控制[J]. 自动化技术与应用，2007，26(4)：14-16. (Lin Bo，Li Junming，Liu Yun. Robust non-fragile H_∞ control for a class of uncertain linear time-varying delay systems[J]. Techniques of Automation and Applications，2007，26(4)：14-16.)

[9] Zhou S，Feng G，Lam J，*et al*. Robust control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions[J]. Information Sciences，2005，174(3-4)：197-217.

[10] Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J Control，1996，63(4)：741-750.

[11] Kwon O M，Park J H. Guaranteed cost control of time-delay chaotic systems[J]. Chaos，Solitions and Fractals，2006，27(4)：1108-1018.

[12] 李江荣，李俊民. 不确定离散时滞模糊系统的广义 H_2 控制[J]. 控制工程，2006，13(5)：452-456. (Li Jiangrong，Li Junmin. Qeneralized H_2 control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems[J]. Control Engineering of China，2006，13(5)：452-456.)

[13] 米阳，井元伟. 非匹配的不确定时滞离散系统的滑模控制[J]. 控制工程，2006，13(6)：560-562. (Mi Yang，Jing Yuanwei. Sliding mode control for time-delay discrete systems with unmatched uncertainty[J]. Control Engineering of China，2006，13(6)：560-562.)