

# 直线提取中的不确定性研究<sup>1)</sup>

孙凤梅<sup>1,2</sup> 胡宇<sup>2</sup> 胡占义<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(北方工业大学基础学院 北京 100041)

<sup>2</sup>(中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室 北京 100080)

(E-mail: huzy@nlpr.ia.ac.cn)

**摘要** 直线提取是基于特征的模式识别的一个重要步骤. 由于图像特征点的离散误差和特征点提取过程中的位移现象, 使得由二图像点所确定的直线的参数随之产生某种不确定性. 该文比较系统地研究了这种不确定性的分布, 并讨论了这些理论结果在计算机视觉中的应用. 据作者所知, 该文结果在其它地方还没有过类似的报导.

**关键词** 直线提取, 不确定性, Hough 变换

**中图分类号** TP391

## A Study on the Uncertainties in Line Extraction from Images

SUN Feng-Mei<sup>1,2</sup> HU Yu<sup>2</sup> HU Zhan-Yi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(College of Fundamental Research, North China University of Technology, Beijing 100041)

<sup>2</sup>(National Laboratory of Pattern Recognition (NLPR), Institute of Automation,  
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

(E-mail: huzy@nlpr.ia.ac.cn)

**Abstract** The line extraction is an important step in feature based recognition techniques. Due to discretization error of image points and inevitable location shifts embedded in feature extraction processes, the parameters of a line determined by two feature points must possess some uncertainties. This paper quantitatively studies the distribution of such uncertainties, and discusses its useful applications in computer vision. To our knowledge, such results seem original, and did not appear in the literature previously.

**Key words** Line extraction, uncertainty, Hough transform

## 1 引言

在基于特征的模式识别中, 直线是一种广泛使用的特征, 这是因为在人造物体中, 一般

1) 国家自然科学基金(60033010)和中国科学院重大交叉学科前沿项目(KJ CX1-07)资助

Supported by Natural Science Foundation of P. R. China(60033010) and by Multidisciplinary Research Program of CAS(KJ CX1-07)

通讯作者胡占义(The corresponding author is Dr. HU Zhan-Yi)

收稿日期 2002-03-05 收修改稿日期 2002-12-19

Received March 05, 2002; in revised form December 19, 2002

含有大量的直线或近似直线的信息. 我们知道, 直线是由点来确定的, 由于图像点存在离散误差, 以及一般来说, 从图像中所提取出的特征点会产生位置偏移现象, 因此通过图像特征点确定的直线参数随之就会产生相应的误差, 或者说, 所确定的直线参数具有某种不确定性. 因此, 对这种不确定性的研究是非常有实际应用价值的.

本文的主要目标是要研究下面的问题.

如图 1 所示, 已知二个图像特征点  $A$  和  $B$ ,  $A$  点在以点  $(x_A, y_A)$  为圆心、半径为  $r_0$  的区域内均匀分布,  $B$  点在以点  $(x_B, y_B)$  为圆心、半径为  $r_0$  的区域内均匀分布. 由这二个点可以决定一条直线  $L_{AB}$ , 求  $L_{AB}$  的参数在参数空间的分布区域  $D_{AB}$  和该区域上的密度分布函数  $f_{AB}$ .

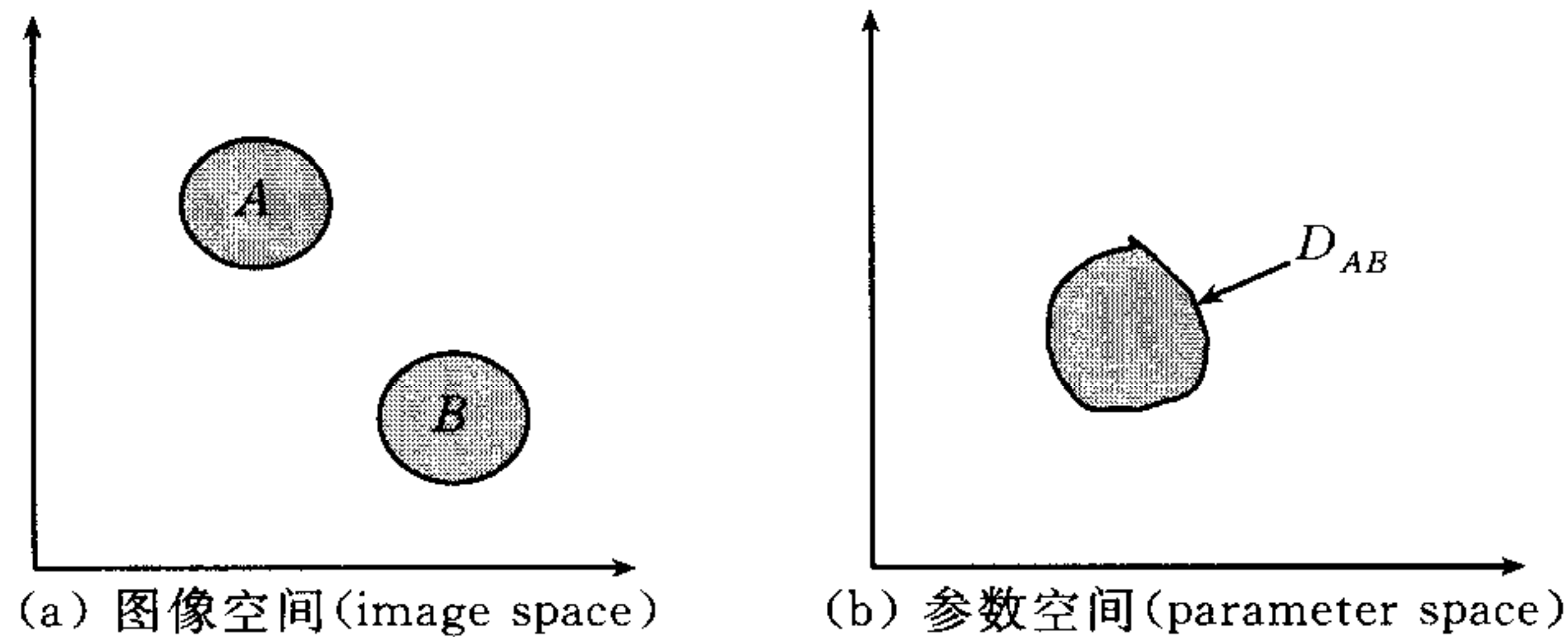


图 1 直线  $L_{AB}$  的参数在参数空间的分布区域为  $D_{AB}$  (即不确定性区域)

Fig. 1 The distribution area  $D_{AB}$  (the uncertainty area) of the parameters of line  $L_{AB}$  in the parameter space

在对该问题进行研究之前, 我们先给出几个计算机视觉中的具体例子来说明为什么这样的问题是值得研究的.

### 1.1 随机 Hough 变换

随机 Hough 变换<sup>[1]</sup>是一种文献中广泛使用的直线提取方法. 使用随机 Hough 变换进行直线提取的基本过程是反复在图像空间随机抽取二个图像点, 然后在参数空间在由该二个点确定的直线参数所对应的点上计数, 直到参数空间的某一计数器的值大于某一预先给定的阈值, 则认为图像中很有可能存在该参数对应的直线. 然后, 通过在图像空间进行最终检验来判定是否有该直线存在. 如图 2 所示, 假定图像空间有三个点  $A, B$  和  $C$ , 它们分别在圆形区域  $C_A, C_B$  和  $C_C$  上均匀分布, 该三个点可以确定三条直线  $L_{AB}, L_{BC}$  和  $L_{AC}$ , 其参数在参数空间的不确定性区域分别为  $D_{AB}, D_{BC}$  和  $D_{AC}$ . 由于参数有不确定性存在, 这样, 随机

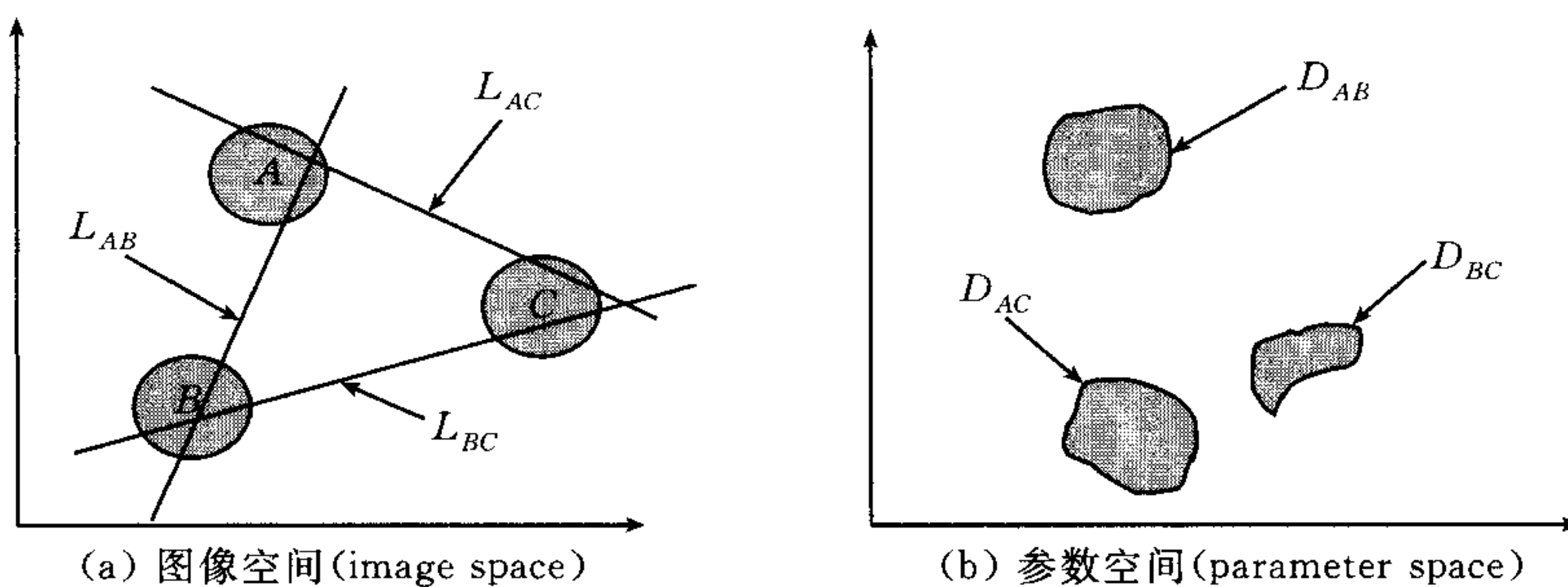


图 2 一种合理的选择是参数空间的计数区域应该是直线对应的不定性区域, 计数值为该点的密度分布函数值

Fig. 2 A reasonable choice for the voting area is the uncertainty area, and the increment should be the corresponding distribution density value



Hough 变换在参数空间的计数过程中就产生了这样一些问题: 1) 给定二个图像点, 该二点所决定的直线在参数空间的什么区域内应该计数; 2) 应该采用什么样的计数方法, 均匀计数方法合适吗. 显然, 对于第一个问题, 计数的区域应该是直线参数的不确定性区域, 如对应直线  $L_{AB}$  的计数区域应该是  $D_{AB}$ . 对于第二个问题, 显然, 在该区域内不应该均匀计数, 由于该区域内不同点处该直线出现的概率不同, 合理的计数方法应该是记数值正比于该点处的概率密度值.

从上面的例子可以看出, 概率 Hough 变换在直线提取中需要研究上述问题中提出的不确定性问题. 换句话说, 上述问题中的不确定性研究在概率 Hough 变换中有重要的应用价值.

另外, 值得指出的是, 目前关于 Hough 变换的文献中, 在处理这种不确定性问题时, 用了所谓的核函数(kernel function)方法<sup>[2]</sup>. 也就是说, 在参数空间计数时, 不是仅在由二图像点决定的直线所对应的参数点上计数, 而是在该点的邻域内按某种核函数进行计数. 目前, 核函数的选取一般根据经验进行, 缺乏理论依据. 我们认为, 从理论上来说, 理想的核函数应该正是本文要研究的在不确定性区域内分布的参数概率密度函数.

## 1.2 摄像机自标定

摄像机自标定是计算机视觉界近年来兴起的最重要的研究方向之一<sup>[3~5]</sup>. 1998 年 Faugeras<sup>[6]</sup> 等人提出了通过一维摄像机标定二维摄像机的方法. 这种标定方法的一个关键步骤是如何将二维图像的对应点转化为在极点连线上(trifocal line)等价的一维图像对应点. 这个问题从数学上来说, 本质上就是确定已知二点(A, B)的连线与一条已知直线(极点连线)的交点 M, 如图 3 所示. 很显然, 由于 A, B 点有误差, 交点 M 也必然存在不确定性. 实验证明, 这种不确定性对摄像机的标定有至关重要的影响. 尽管文献<sup>[7]</sup>对这种不确定性进行了初步分析, 但讨论缺乏系统性, 有待进一步深入研究. 在本文的附录 B 中我们讨论了如何通过(A, B)两点连线的不确定性来计算交点 M 的不确定性.

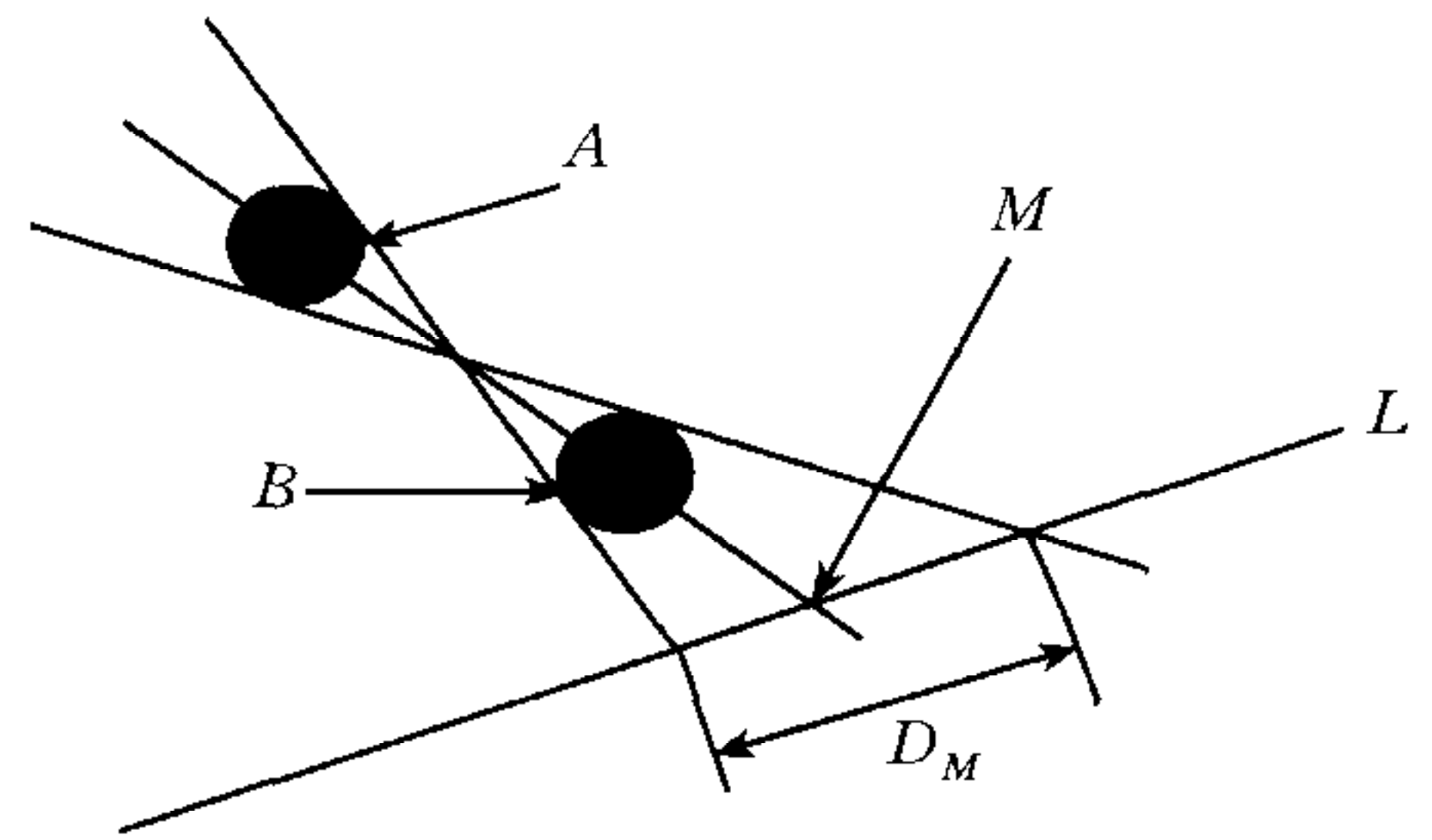


图 3  $D_M$  为由 A, B 二图像点所确定的直线与极点连线 L 的交点 M 的不确定性范围  
Fig. 3  $D_M$  is the uncertainty range of the intersecting point M between the trifocal line L and line going through point A and B

## 1.3 平面多边形的提取

从图像中提取多边形是计算机视觉中的一个重要问题, 其中一种最常见的方法是先提取构成多边形的各边, 然后根据边与边之间的关系得到多边形. 很显然, 正象上面讨论的一样, 由于提取出的边存在不确定性, 最终得到的多边形也必然存在不确定性. 因此, 在多边形的提取中也需要研究本文将要研究的不确定性问题的.

上面我们给出了计算机视觉中的几个例子来说明本文所研究问题的意义和用处. 在对该问题进行讨论前, 我们首先作以下二点说明.

1) 我们知道, 一条直线可以用不同的参数来表示. 对于同样的二个图像点, 所使用的直线参数化形式不同, 在参数空间由该二点所确定的直线参数所对应的不确定性区域及该区域上的概率密度函数一般也不一样. 文献<sup>[8]</sup>已证明, 已知一种参数化形式下的概率密度函数, 其它任一种参数化形式下对应的密度函数可以很方便地计算. 所以, 在本文中我们总假

定直线的参数化形式为正则化形式(normal parameterization). 也就是说,一条直线可以定义为  $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta, \theta \in [0, \pi), \rho \in (-\infty, +\infty)$ , 其中  $\rho$  表示坐标原点到直线的距离,  $\theta$  表示直线的法向量与  $x$  轴正方向的夹角.

2) 图像点的不确定性可以有不同的假设. 在本文中我们总假定图像点在一小圆形区域内呈均匀分布. 作这样的假设是考虑到如下二方面的因素: 第一, 这种假设在很多情况下符合实际情况; 第二, 本文所使用的证明方法可以很方便地推广到其它分布形式的情况, 如高斯分布. 为了不使问题过于复杂化且保留问题的主体思想, 故本文仅讨论均匀分布的情况.

## 2 主要结论

### 2.1 问题的提出

已知二个图像特征点  $X_1$  和  $X_2$ ,  $X_1$  点在以点  $M_1$  为圆心、半径为  $r$  的区域内均匀分布,  $X_2$  点在以点  $M_2$  为圆心、半径为  $r$  的区域内均匀分布, 由这二个点可以决定一条直线  $l: \rho = x \cos \theta + y \sin \theta$ , 求直线  $l$  的参数  $(\rho, \theta)$  在参数空间的不确定性区域  $D(\rho, \theta)$  和该区域上的密度分布函数  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$ .

### 2.2 不定区域形状的确

从图 4 和图 5 可以看出,  $D(\rho, \theta)$  的变化范围应为

$$\theta \in [\theta_0 - \Delta\theta, \theta_0 + \Delta\theta], \quad \rho \in [\rho_{\min}(\theta), \rho_{\max}(\theta)].$$

设点  $M_1$  和点  $M_2$  的坐标分别为  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 小圆的半径为  $r$ , 则可以得到  $D(\rho, \theta)$  的具体解析表达式为

$\theta$	$\rho$
$\left[ \theta_0 - \arcsin\left(\frac{2r}{L}\right), \theta_0 \right]$	$[x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta - r, x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta + r]$
$\left[ \theta_0, \theta_0 + \arcsin\left(\frac{2r}{L}\right) \right]$	$[x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - r, x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta + r]$

其中  $L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

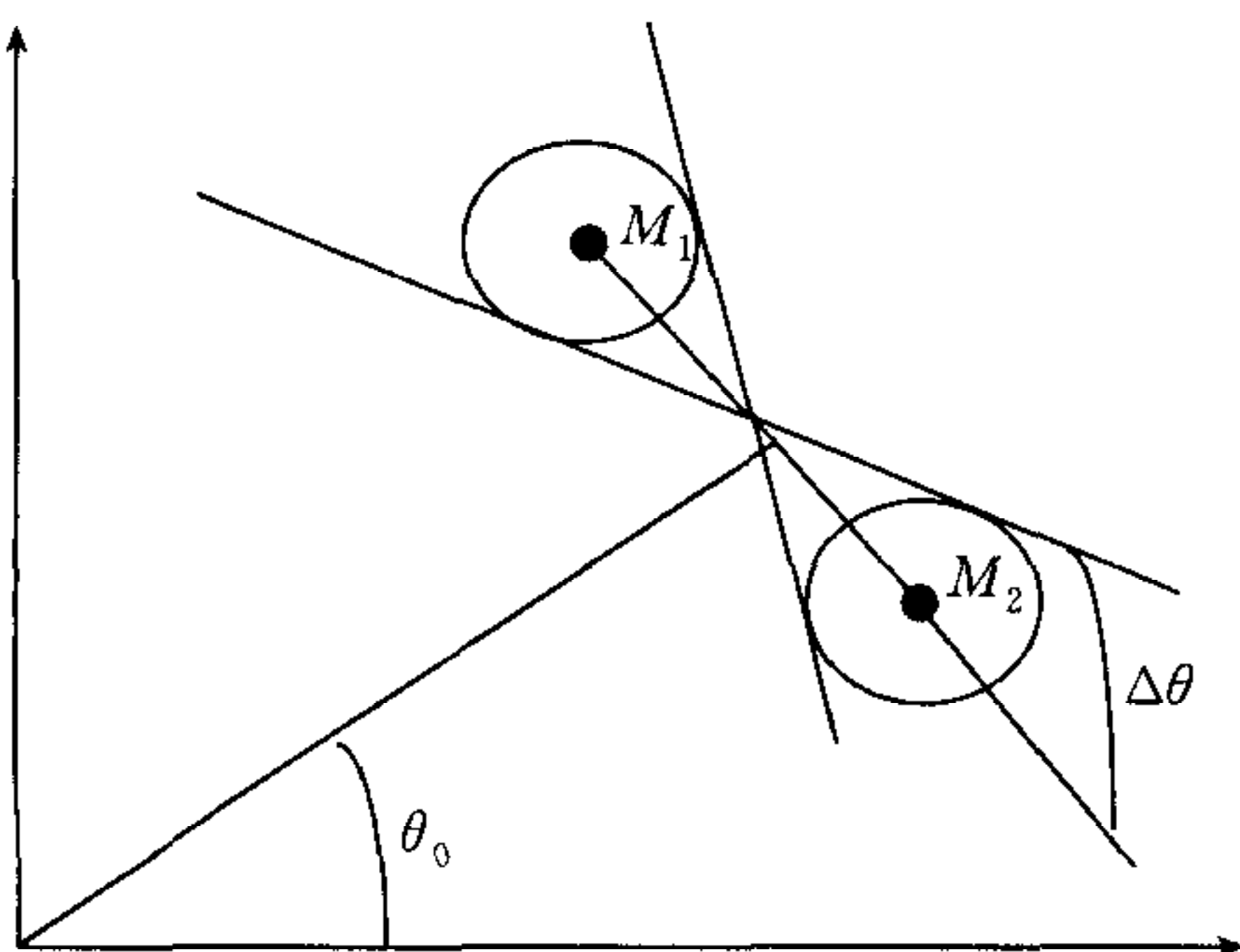


图 4 不定性区域内  $\theta$  的变化范围为  $\theta \in [\theta_0 - \Delta\theta, \theta_0 + \Delta\theta]$ ,  $\theta_0$  为连接  $M_1 M_2$  的直线的  $\theta$  角  
Fig. 4 The uncertainty range of  $\theta$  is  $\theta \in [\theta_0 - \Delta\theta, \theta_0 + \Delta\theta]$ , where  $\theta_0$  is the normal of line  $M_1 M_2$

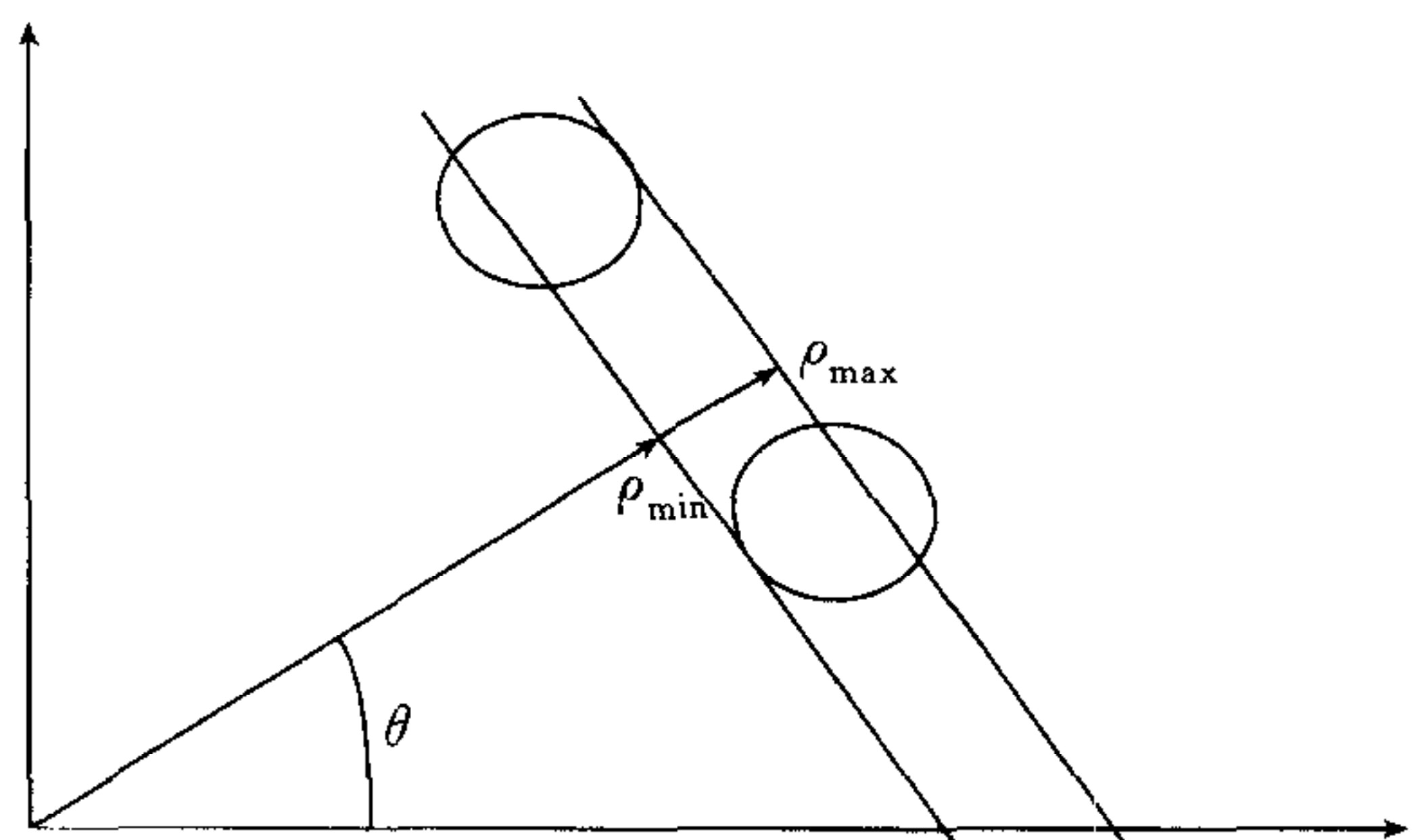


图 5 对于某一位于不定性区域内的  $\theta, \rho$  的变化范围为  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ , 很明显  $\rho$  的变化范围依赖于  $\theta$  的值  
Fig. 5 For a given  $\theta$ , the uncertainty range of  $\rho$  is  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ , Clearly, it is a function of  $\theta$



### 2.3 $D(\rho, \theta)$ 上概率密度函数的确定

$D(\rho, \theta)$  上密度函数形式为

$$f_{\rho\theta}(\rho, \theta) = \frac{1}{2(\pi r^2)^2} AB \times CD (2BC + CD + AB) = \frac{1}{(\pi r^2)^2} AB \times CD \times EF, \quad (\rho, \theta) \in D_{AB}(\rho, \theta).$$

上式中各符号的意义见图 6 (其中  $M_1E \perp AD, M_2F \perp AD$ ). 关于  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  表达式的具体推导过程见附录 A.

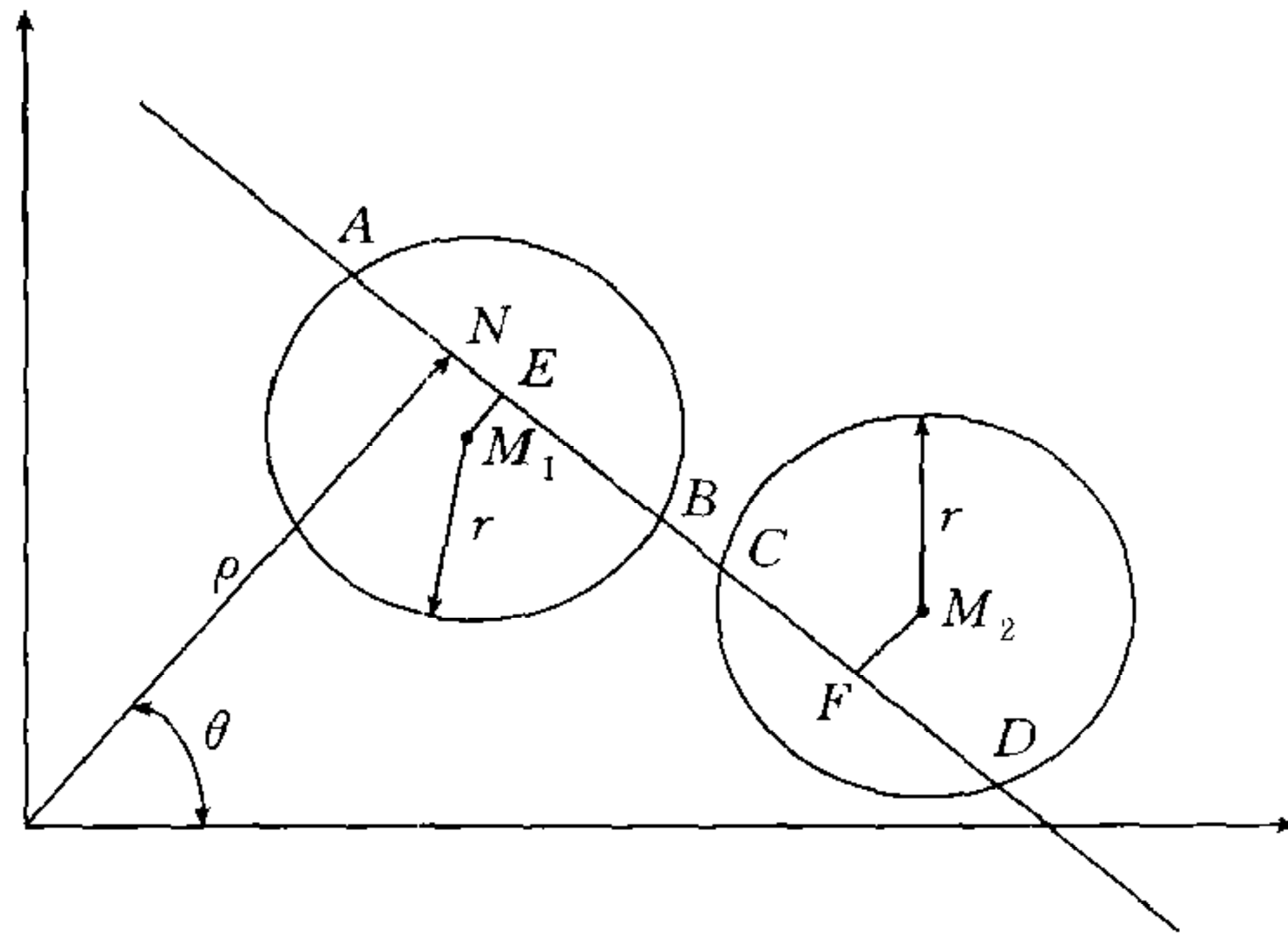


图 6  $(\rho, \theta)$  处的概率密度  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  仅与直线  $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$  和以  $M_1$  和  $M_2$  为圆心的二个圆的相对位置有关  
 Fig. 6 The density of  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  at  $(\rho, \theta)$  depends only on the relative positions of the line  $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$  and the two circles centered respectively at point  $M_1$  and  $M_2$

利用坐标表示, 可得

$$f_{\rho\theta}(\rho, \theta) = \frac{1}{(\pi r^2)^2} AB \times CD \times EF = \frac{4}{(\pi r)^2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \times |(y_1 - y_2) \cos \theta - (x_1 - x_2) \sin \theta|,$$

其中  $\theta_1 = \arcsin \frac{\rho - (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)}{r}, \theta_2 = \arcsin \frac{\rho - (x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta)}{r}.$

### 2.4 几种具有代表性的实例

由图像上点的实际情况, 可以认为点  $M_1$  和  $M_2$  均在第一象限内.

1) 第一种情况. 如图 7 所示,  $F$  在  $E$  的左边, 其中  $E$  为  $M_1M_2$  的中点,  $OF \perp M_1M_2$ .

在这种情况下, 令点  $M_1$  和  $M_2$  的坐标分别为  $(10, 20)$  和  $(25, 5)$ ,  $r = 3$ . 这样可以得到  $D(\rho, \theta)$  ( $\theta$  为横坐标,  $\rho$  为纵坐标) 及  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  的分布形状图如图 8 所示.

2) 第二种情况. 如图 9 所示,  $F$  在  $E$  的右边, 其中  $E$  为  $M_1M_2$  的中点,  $OF \perp M_1M_2$ .

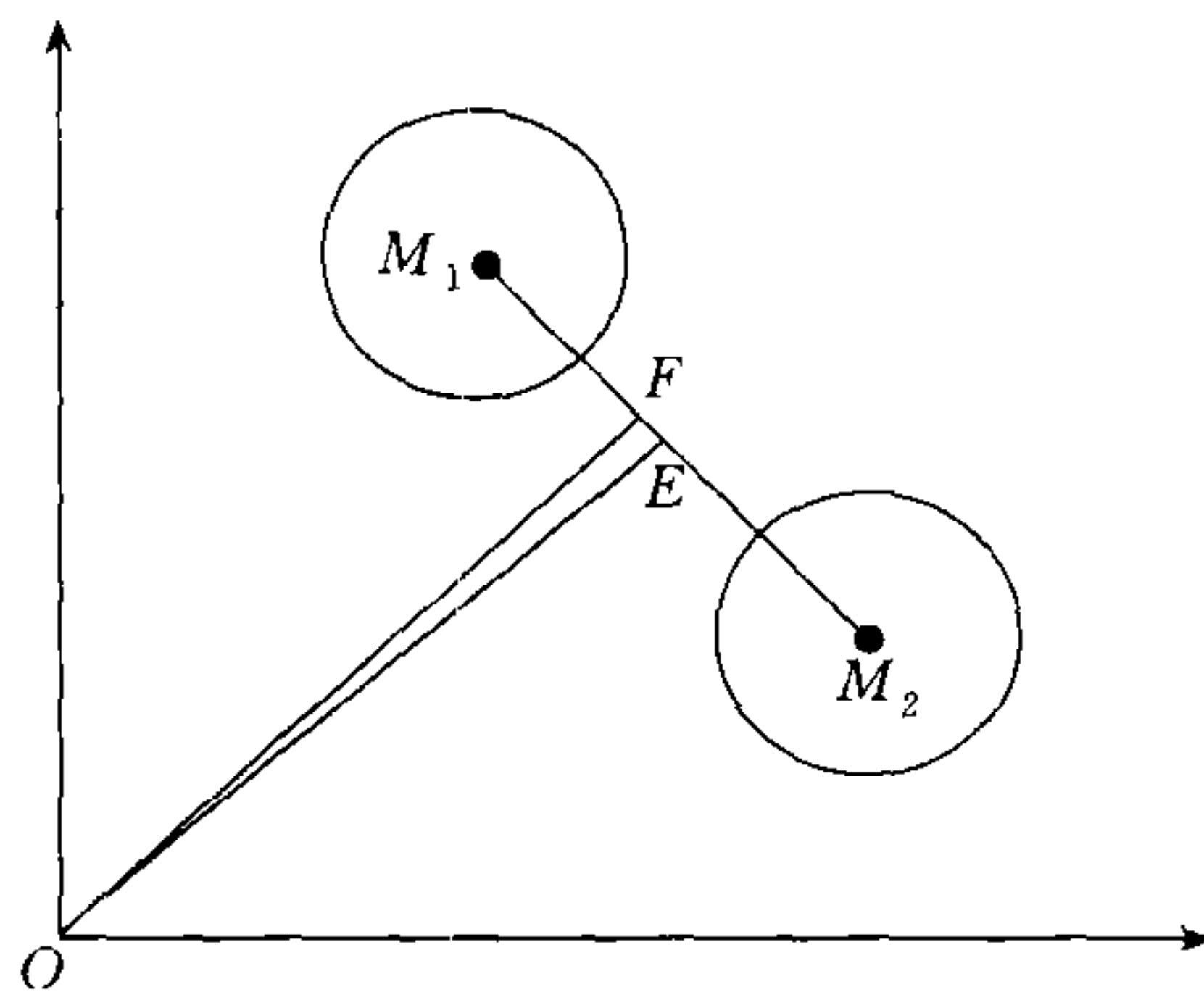


图 7  $F$  在  $E$  的左边, 其中  $E$  为  $M_1M_2$  的中点,  $OF \perp M_1M_2$

Fig. 7  $F$  is on the left of  $E$ , where point  $E$  is the middle point of segment  $M_1M_2$ , and  $OF \perp M_1M_2$



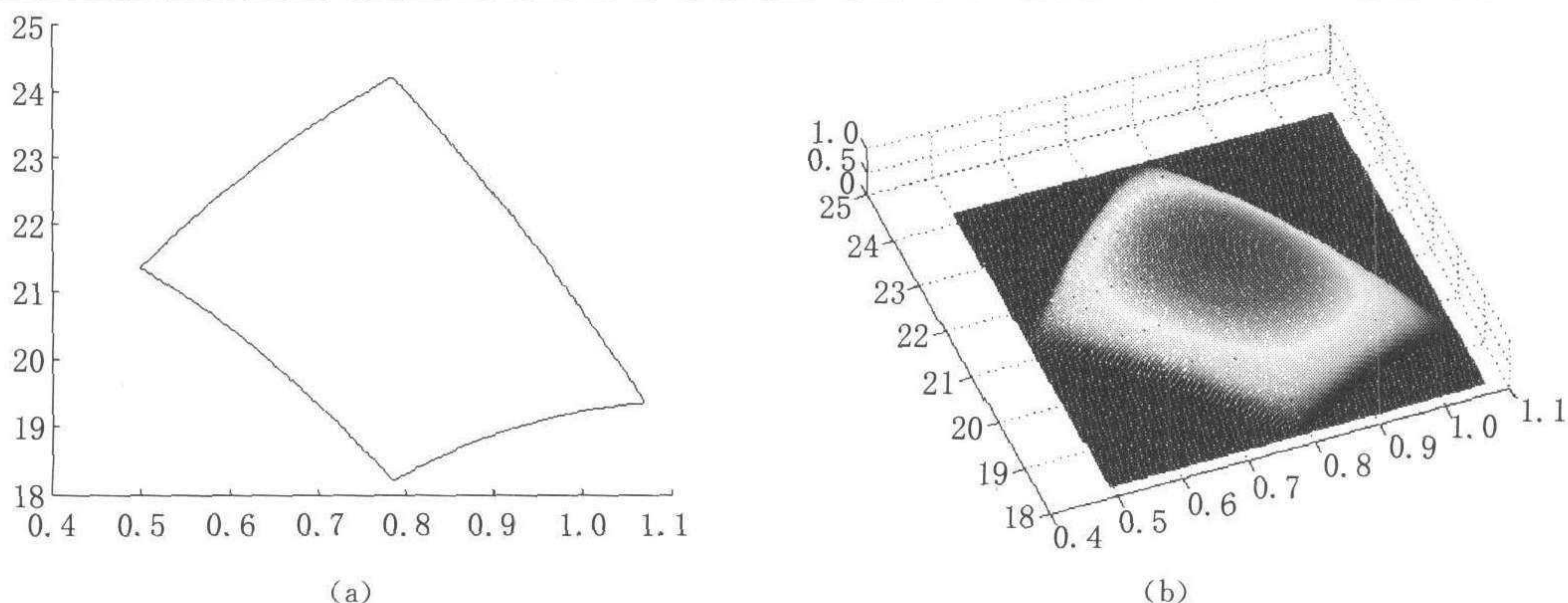


图 8 当  $M_1=(10,20)$ ,  $M_2=(25,5)$  和  $r=3$  时的  $D(\rho,\theta)$  和  $f_{\rho\theta}(\rho,\theta)$   
 Fig. 8 The distributions of  $D(\rho,\theta)$  and  $f_{\rho\theta}(\rho,\theta)$  when  $M_1=(10,20)$ ,  $M_2=(25,5)$  and  $r=3$

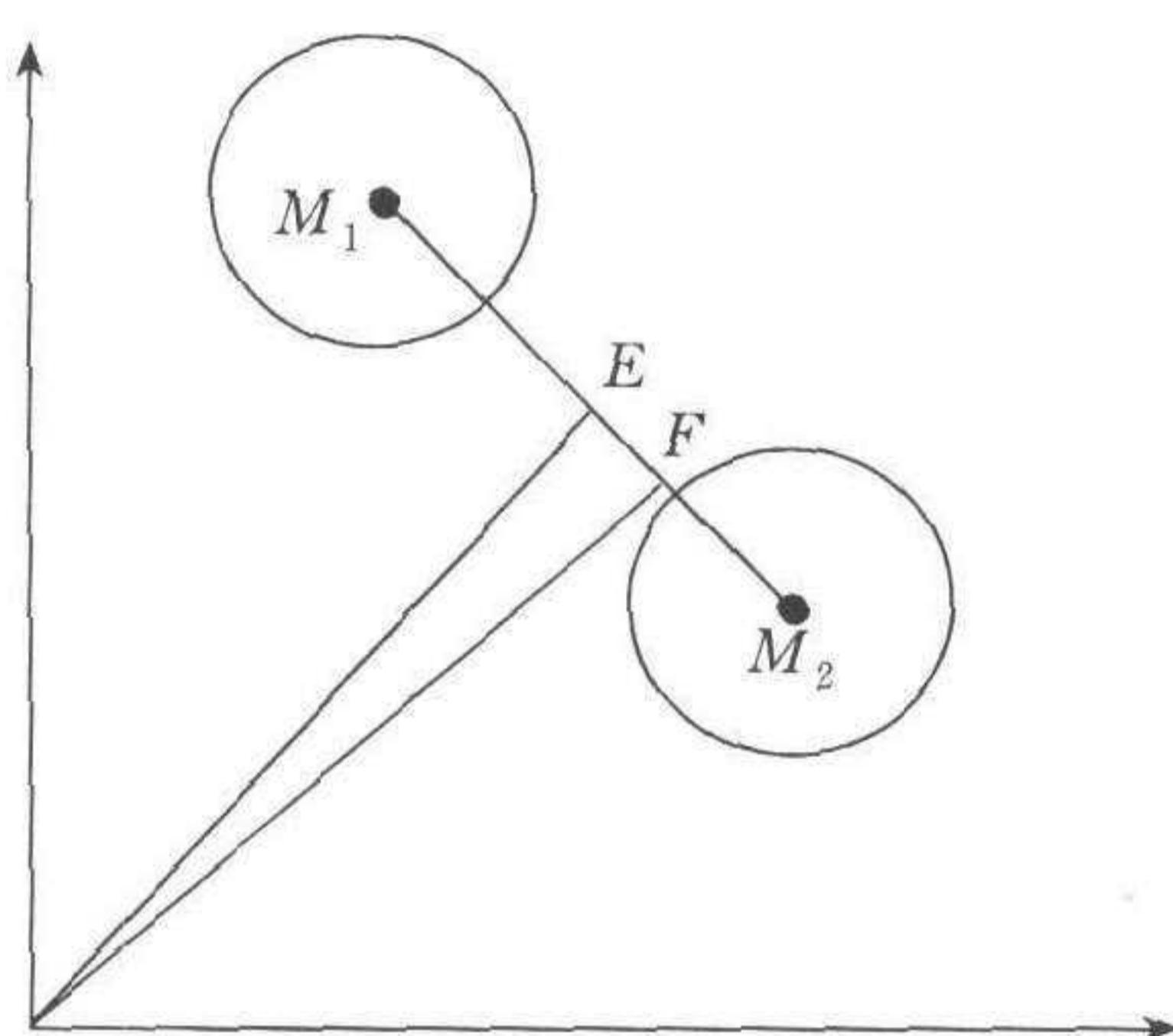


图 9  $F$  在  $E$  的右边, 其中  $E$  为  $M_1M_2$  的中点,  $OF \perp M_1M_2$   
 Fig. 9  $F$  is on the right of  $E$ , where point  $E$  is the middle point of segment  $M_1M_2$ , and  $OF \perp M_1M_2$

在这种情况下, 令点  $M_1$  和  $M_2$  的坐标分别为  $(5,25)$  和  $(20,10)$ ,  $r=3$ . 这样可以得到  $D(\rho,\theta)$  ( $\theta$  为横坐标,  $\rho$  为纵坐标) 及  $f_{\rho\theta}(\rho,\theta)$  的分布形状图如图 10 所示.

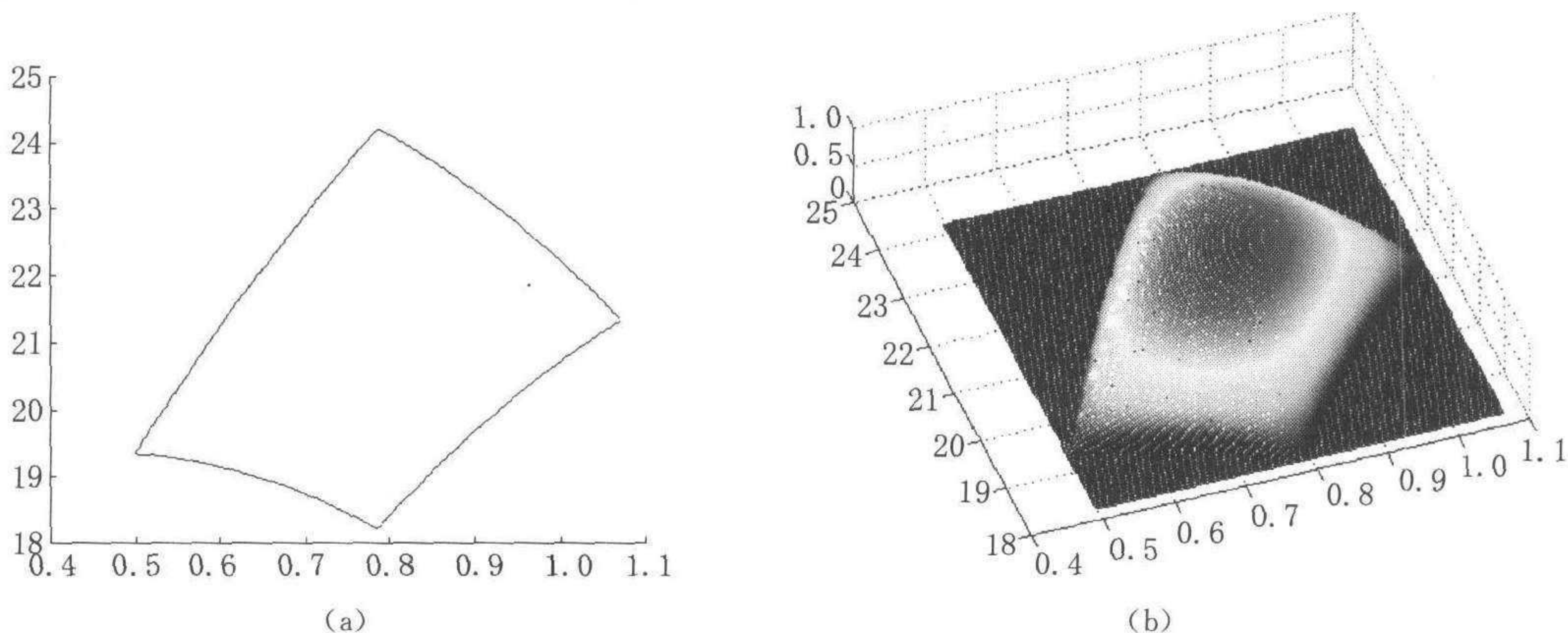


图 10 当  $M_1=(5,25)$ ,  $M_2=(20,10)$ ,  $r=3$  时,  $D(\rho,\theta)$  和  $f_{\rho\theta}(\rho,\theta)$  的分布图  
 Fig. 10 The distributions of  $D(\rho,\theta)$  and  $f_{\rho\theta}(\rho,\theta)$  when  $M_1=(5,25)$ ,  $M_2=(20,10)$ ,  $r=3$

### 2.5 不确定性直线与给定直线交点的不确定性

在第 1 节关于通过一维摄像机标定二维摄像机的讨论中, 我们谈到需要确定由具有不确定性的二图像点所决定的直线与一条给定直线交点的坐标的不确定性. 在附录 B 中, 我



们给出了如何通过已知的  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  和  $D(\rho, \theta)$  来确定交点的密度函数  $f_s(s)$  的具体步骤.

### 3 对于不定区域 $D(\rho, \theta)$ 的一点简单讨论

由  $D(\rho, \theta)$  的形式可以看出其形状非常复杂. 这样, 从理论上来说, Hough 变换中使用核函数来抵消参数空间中由于图像点的不确定性所导致的不确定性是不合理的. 这是因为文献中使用的核函数(如广泛使用的帽子函数)一般与图像点的位置无关, 而  $D(\rho, \theta)$  形状是图像点的函数, 并且随图像点的位置变化而剧烈变化.

在 Hough 变换中, 之所以选取固定形状的核函数, 主要是从实现方便的角度考虑的. 因为如果所使用的核函数依赖于输入图像点的话, Hough 变换的计算量将大大增加. 考虑到概率密度函数  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  主要分布在  $D(\rho, \theta)$  的中央部分, 所以下面我们试图寻找一个比较简单的区域来代替  $D(\rho, \theta)$ , 使得  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  的主体分布在该简单区域上. 如果这样的区域能找到的话, 就可以把核函数定义在该区域上. 但目前的结果是令人失望的, 具体情况如下.

如图 11 所示, 选择区域  $ABCD$  去替代  $D(\rho, \theta)$ , 其中点  $O$  为由  $M_1, M_2$  两点决定的直线的参数点. 直线  $AD$  和直线  $BC$  为平行于曲线  $\mathfrak{S}$  在  $O$  点处切线的二条直线.

区域  $ABCD$  的解析形式为

$$\theta \in \left[ \theta_0 - \frac{r}{L}, \theta_0 + \frac{r}{L} \right],$$

$$\rho \in \left[ OE \times \sin\theta_1 \times (\theta_0 - \theta) + (OE \times \cos\theta_1 - \frac{2}{3} \times r), OE \times \sin\theta_1 \times (\theta_0 - \theta) + (OE \times \cos\theta_1 + \frac{2}{3} \times r) \right],$$

式中  $\theta_1, \theta_2, OE$  的含义如图 12 所示.

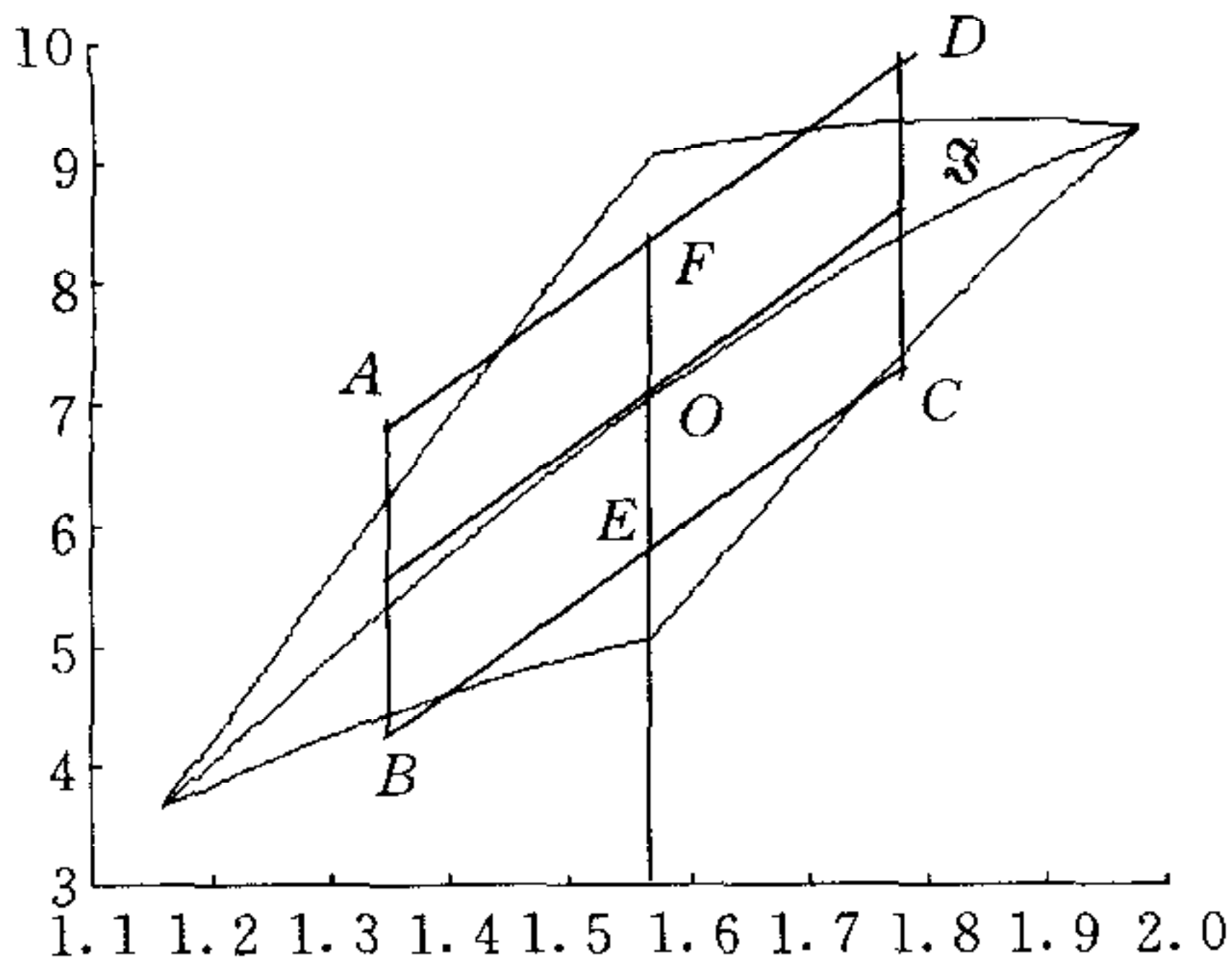


图 11 寻找  $D(\rho, \theta)$  的替代区域  
Fig. 11 Using area  $ABCD$  to approximate  $D(\rho, \theta)$

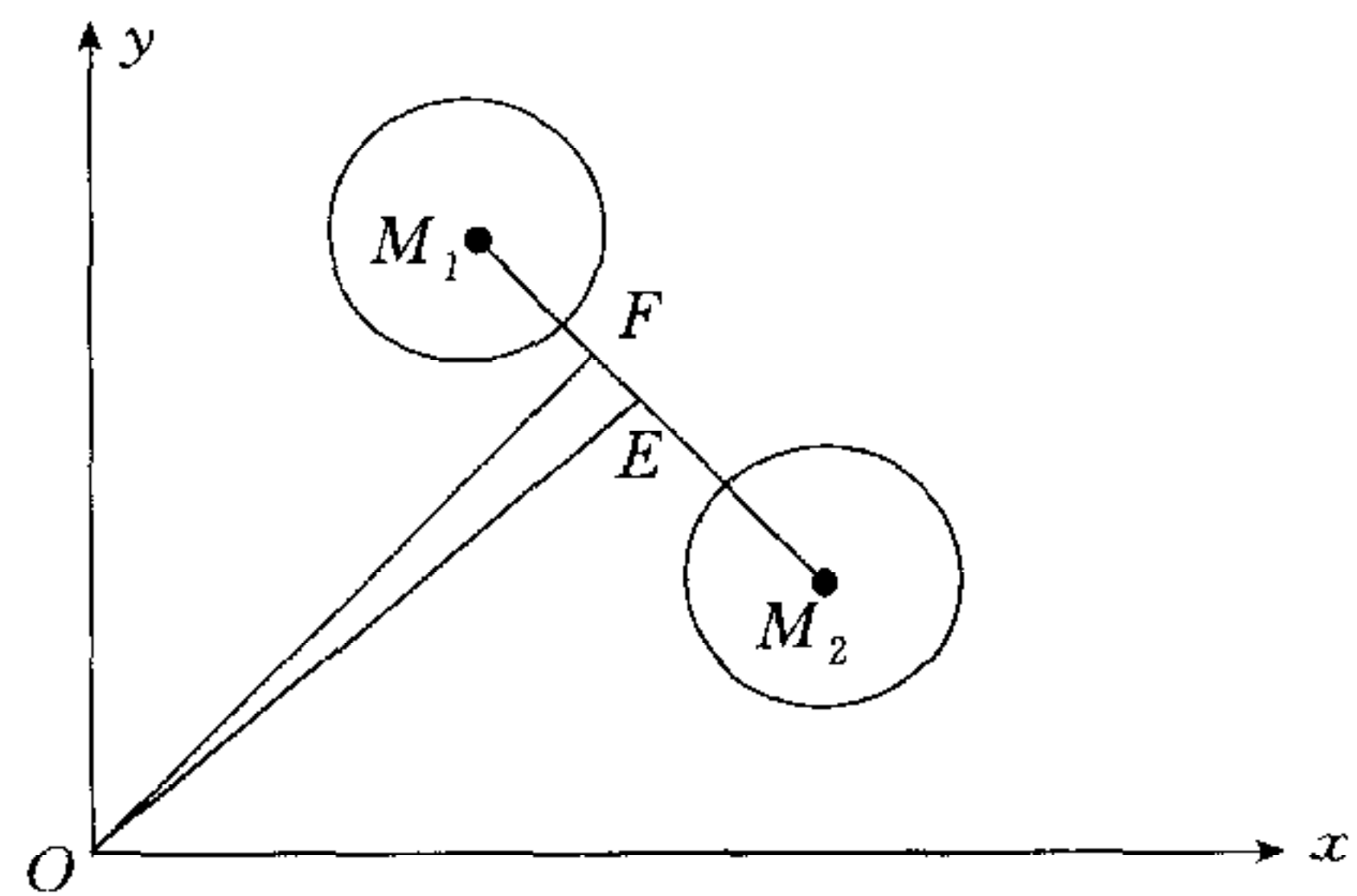


图 12  $E$  为  $M_1M_2$  的中点,  $OF \perp M_1M_2$ ,  
 $\theta_0 = \angle xOF, \theta_1 = \angle FOE, L = M_1M_2$   
Fig 12.  $E$  is the middle point of  $M_1M_2$ ,  
 $OF \perp M_1M_2, \theta_0 = \angle xOF, \theta_1 = \angle FOE, L = M_1M_2$

选择这样的区域是因为我们发现  $D(\rho, \theta)$  的整体形状受到曲线  $\mathfrak{S}: OE \times \cos\alpha$  的影响很大.

其中

$$\cos\alpha = \begin{cases} \cos(\theta_1 - \theta_0 + \theta), & \text{2.4 节中的第一种情况,} \\ \cos(\theta_1 + \theta_0 - \theta), & \text{2.4 节中的第二种情况.} \end{cases}$$

表 1 为  $r=3$  时的一些实验数据.

表 1 区域 ABCD 上  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  的总概率  
Table 1 The total probability in the area ABCD

一些设定的参数	区域 ABCD 上 $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$ 的总概率
$L=20, OE=20, \theta_1=\pi/6$	0.6199
$L=20, OE=20, \theta_1=\pi/8$	0.6722
$L=20, OE=20, \theta_1=0$	0.7892
$L=20, OE=100, \theta_1=0$	0.7836
$L=20, OE=100, \theta_1=\pi/32$	0.6199
$L=20, OE=100, \theta_1=\pi/16$	0.4721
$L=20, OE=60, \theta_1=\pi/16$	0.7002
$L=20, OE=40, \theta_1=\pi/16$	0.7404
$L=20, OE=40, \theta_1=\pi/8$	0.5185
$L=30, OE=40, \theta_1=\pi/8$	0.6195
$L=40, OE=40, \theta_1=\pi/8$	0.6732
$L=50, OE=40, \theta_1=\pi/8$	0.7201

由表 1 可以看出, 只有当  $\theta_1$  较小(也就是曲线  $OE \times \cos\alpha$  比较平滑)并且  $OE$  和  $L$  的比值不是很大时, 用上面的区域进行逼近是可行的. 从上表可以进一步看出, 由于  $D(\rho, \theta)$  和点  $M_1$  及  $M_2$  的具体位置有关, 所以要想找一个既能够很好逼近  $D(\rho, \theta)$  且形状保持不变的区域是非常困难的.

## 4 结论

本文比较系统地研究了直线提取中的不确定性问题, 给出了不定区域形状及其上的概率密度函数的具体分布形式, 讨论了这些理论结果在计算机视觉中的应用, 特别是在 Hough 变换和摄像机标定方面的应用. 在文章的最后还给出了一种对于不定区域形状进行近似的尝试.

## References

- 1 Xu L, Oja E. Randomized Hough transform: Basic mechanisms, algorithms, and computational complexities. *CVGIP: Image Understanding*, 1993, **57**(2):131~154
- 2 Palmer P L, Kittler J, Petrou M. A Hough transform algorithm with a 2-D hypothesis testing kernel. *CVGIP: Image Understanding*, 1993, **58**(2):221~234
- 3 Maybank S J, Faugeras O. A theory of self-calibration of a moving camera. *International Journal of Computer Vision*, 1992, **8**(2):123~151
- 4 Hartley R I. In defense of the 8-point algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, **19**(6):580~593
- 5 Hartley R I, Hayman E, De Agapito L, Reid I. Camera calibration and the search for infinity. In: Proceedings of International Conference on Computer Vision. Bombay, India; 1999. 510~516
- 6 Faugeras O, Quan L, Sturm P. Self-calibration of a 1D projective camera and its application to the self-calibration of a 2-D projective camera. In: Proceedings of European Conference on Computer Vision, 1998, **1**:36~54
- 7 Lu L, Tsui H T, Hu Z Y. A novel method for camera planar motion detection and robust estimation of the 1D trifocal tensor. In: Proceedings of International Conference on Pattern Recognition, Barcelona, Spain; 2000, **III**:815~818
- 8 Hu Z Y, Destine J. Performance comparison of line parametrizations. In: Proceedings of International Conference on Pattern Recognition. The Hague, Netherlands; 1992, **3**: 335~338
- 9 Garwood F, Holroyd E M. The distance of a "random chord" of a circle from the center. *Mathematical Gazette*,



1966, 50:283~286

10 Papoulis A. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. 2nd edition. McGraw-Hill, 1989

## 附录 A

## 第 2 节主要结果的数学证明

我们将采用文献[9]中的证明方法. 基本思路是为了确定参数空间不确定性区域 $(\rho_0, \theta_0)$ 处的密度函数 $f_{\rho\theta}(\rho_0, \theta_0)$ , 首先求以 $(\rho_0, \theta_0)$ 为中心的小区域 $D_{(\rho_0, \theta_0)} = [\rho_0 < \rho < \rho_0 + \Delta\rho, \theta_0 < \theta < \theta_0 + \Delta\theta]$ 上的概率质量 $Mass(\rho_0, \theta_0)$ , 则密度函数 $f_{\rho\theta}(\rho_0, \theta_0)$ 可以通过下式求得

$$f_{\rho\theta}(\rho_0, \theta_0) = \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta\theta \rightarrow 0}} \frac{Mass(\rho_0, \theta_0)}{\Delta\rho\Delta\theta}$$

所以, 问题的核心是如何确定 $D_{(\rho_0, \theta_0)}$ 上的概率质量 $Mass(\rho_0, \theta_0)$ .

**证明.** 如图 A 所示, 第一个点 $X_1$ 在以 $M_1$ 为中心、 $r_0$ 为半径的小圆内均匀分布, 第二个点 $X_2$ 在以 $M_2$ 为中心、 $r_0$ 为半径的小圆内均匀分布. 先选取 $X_1$ 点, 后选取 $X_2$ 点. 为了保证由 $(X_1, X_2)$ 二点确定的直线的参数位于 $D_{(\rho_0, \theta_0)} = [\rho_0 < \rho < \rho_0 + \Delta\rho, \theta_0 < \theta < \theta_0 + \Delta\theta]$ 内,  $X_1$ 只能在区域 $ABB'A'$ 内选取. 假定 $X_1$ 在图中的 $\Delta\rho\Delta t$ 区域内, 此时, 由于 $\Delta\theta$ 假定非常小, 故 $X_2$ 只能在图 A 中的阴影区域内选取. 由于 $X_1$ 和 $X_2$ 均在各自的小圆区域内均匀分布, 所以, 当已知 $X_1$ 在区域 $\Delta\rho\Delta t$ , 任选 $X_2$ 使得由 $X_1$ 和 $X_2$ 决定的直线参数在 $D_{(\rho_0, \theta_0)}$ 的概率质量为

$$Mass((\rho_0, \theta_0)/(X_1 \in \Delta\rho\Delta t)) \approx$$

$$\frac{\Delta\rho\Delta t}{\pi r_0^2} \times \frac{1}{\pi r_0^2} (\text{阴影区域的面积}) =$$

$$\frac{\Delta t \times \Delta\rho}{\pi r_0^2} \times \frac{[\Delta\theta \times (AB - t + BC + CD)^2 - \Delta\theta \times (AB - t + BC)^2]}{2\pi r_0^2}$$

所以, 密度质量 $Mass(\rho_0, \theta_0)$ 为

$$Mass(\rho_0, \theta_0) \approx \int_0^{AB} Mass((\rho_0, \theta_0)/(X_1 \in \Delta\rho\Delta t)) dt =$$

$$\Delta\rho\Delta\theta \int_0^{AB} \frac{(AB + BC + CD - t)^2 - (AB + BC - t)^2}{2 \times (\pi r_0^2)^2} dt$$

经化简, 可以得到

$$Mass(\rho_0, \theta_0) \approx \frac{1}{2(\pi r_0^2)^2} \Delta\rho\Delta\theta \times AB \times CD (2BC + CD + AB)$$

所以, 概率密度函数为

$$f_{\rho\theta}(\rho_0, \theta_0) = \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta\theta \rightarrow 0}} \frac{Mass(\rho_0, \theta_0)}{\Delta\rho\Delta\theta} = \frac{1}{2(\pi r_0^2)^2} AB \times CD (2BC + CD + AB) \quad \text{证毕.}$$

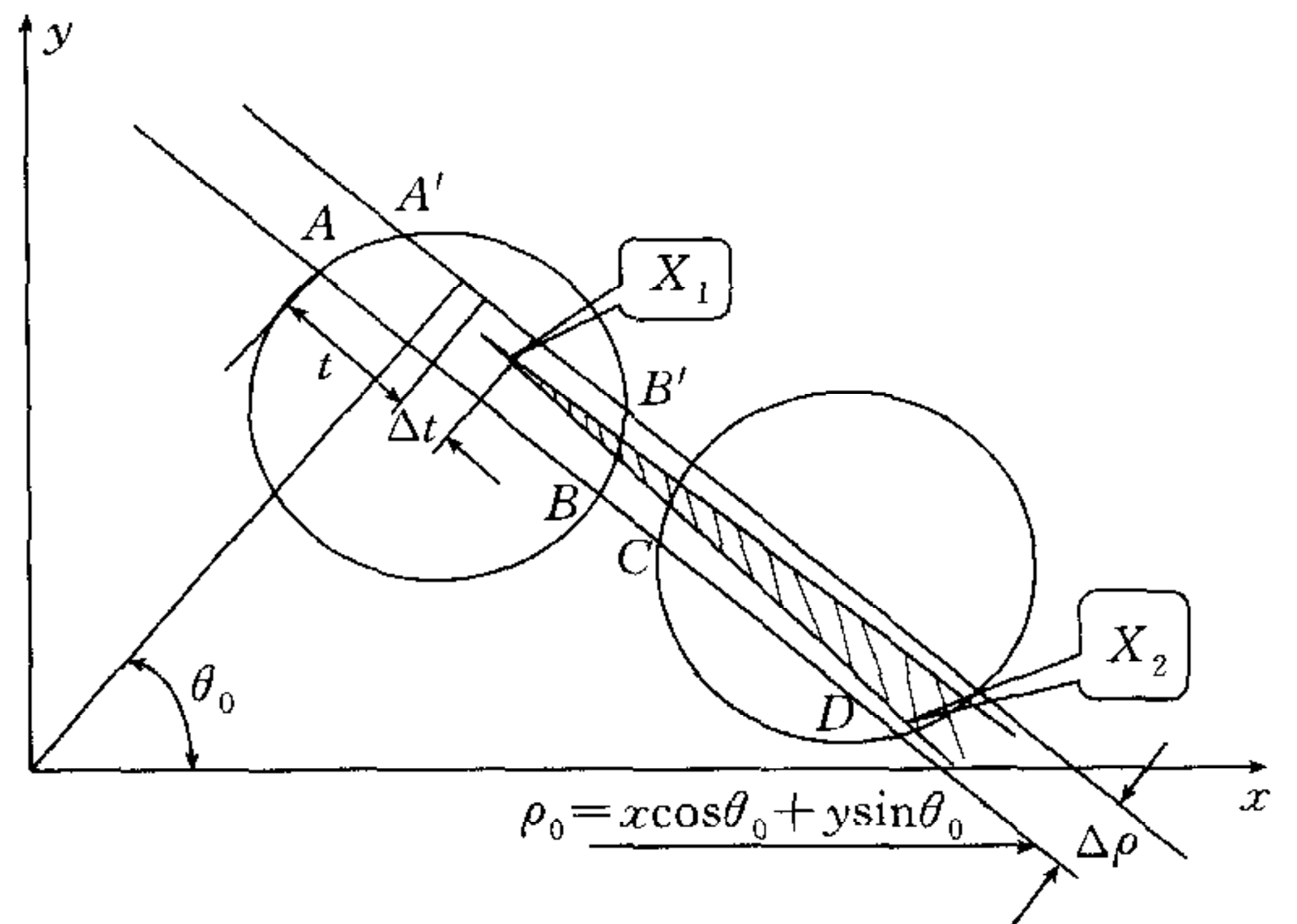
## 附录 B

## 给定直线与不确定性直线交点的密度分布形式

给定直线 $L_0: \rho_0 = x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0$ 和直线 $L: \rho = x\cos\theta + y\sin\theta$ , 其中 $(\rho, \theta)$ 为随机变量且在定义区域 $D(\rho, \theta)$ 上的概率密度函数为 $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$ , 如图 B 所示, 求直线 $L_0$ 和直线 $L$ 的交点 $(x, y)$ 在 $L_0$ 上的概率密度函数 $f_s(s)$ .

由于篇幅所限, 这里仅给出计算的基本思路和主要步骤.

1) 如图 B 所示, 由于 $\Delta s = \frac{\Delta x}{|\sin\theta_0|}$ ,  $f_s(s) = |\sin\theta_0| f_x(x)$ . 因此, 问题归结为如何求 $f_x(x)$ .

图 A1  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$  表达式的证明Fig. A1 A proof of  $f_{\rho\theta}(\rho, \theta)$

2) 为了简化计算过程, 首先通过已知的直线在正则化参数形式下的概率密度函数  $f_{\rho\theta}$  来计算直线在斜率和截距定义下 ( $y=ax+b$ ) 的密度函数  $f_{ab}$ .

如文献[8]所述, 由于从  $\begin{cases} y=ax+b, \\ \rho=x\cos\theta+y\sin\theta, \end{cases}$  可知,

$$\begin{cases} b=\frac{\rho}{\sin\theta}, \\ a=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \end{cases} \text{ 所以 } J(a,b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial \rho} & \frac{\partial a}{\partial \theta} \\ \frac{\partial b}{\partial \rho} & \frac{\partial b}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin^3\theta},$$

从而有

$$f_{ab}(a,b) = \frac{f_{\rho\theta}(\rho,\theta)}{|J(a,b)|} = \sin^3\theta f_{\rho\theta}(\rho,\theta) \begin{cases} \rho = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}} \\ \theta = \arctg\left(\frac{1}{a}\right). \end{cases}$$

3) 计算直线  $y=a_0x+b_0$  和直线  $y=ax+b$  的交点坐标相对于  $x$  轴的概率密度函数  $f_x(x)$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y = a_0x + b_0 \\ y = ax + b \end{cases} \text{ 知, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_0 - a} \begin{pmatrix} b - b_0 \\ a_0b - ab_0 \end{pmatrix},$$

也就是说,  $x = \frac{b-b_0}{a_0-a}$ . 从数学教科书中我们知道, 如文献[10]P. 136, 当随机变量  $(x,y)$  的密度函数  $f_{xy}(x,y)$

已知时, 变量  $z = \frac{x}{y}$  的密度函数  $f_z(z)$  的解析表达式可以求出. 这里, 我们已经知道  $f_{ab}(a,b)$ , 需要根据  $x =$

$\frac{b-b_0}{a_0-a}$  求出  $f_x(x)$ . 从上面的两个问题的具体表达形式可以看出, 两个问题有非常大的相似性. 唯一不同的

是在我们的问题中, 变量  $(a,b)$  的变化范围是有界的; 而在  $z = \frac{x}{y}$  中,  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ , 问题要简单一点. 总之, 已知某一直线的参数的密度函数, 求该直线与另一已知直线交点的密度函数  $f_s(s)$ , 可以按

下列步骤进行:

$$f_{\rho\theta}(\rho,\theta) \Rightarrow f_{ab}(a,b) \Rightarrow f_x(x) \Rightarrow f_s(s).$$

**孙凤梅** 1982年毕业于东北师范大学物理系. 目前在北方工业大学基础学院工作, 主要研究方向为光学和模式识别.

(SUN Feng-Mei Graduated from the department of physics in the North-East Normal University in 1982. Now she is a lecture in the College of Fundamental Research in the North China University of Technology. Her research interests include optics and pattern recognition.)

**胡宇** 1999年毕业于中国科技大学自动化系. 目前为中国科学院自动化研究所硕士研究生, 主要研究方向为特征提取和特征匹配.

(HU Yu Graduated from the department of automation In the University of Science and Technology of China In 1999. Now he is a master student in the Institute of Automation of the Chinese Academy of Sciences. His research interests include feature extraction and feature matching across images.)

**胡占义** 1993年于比利时列日大学获博士学位. 目前为中国科学院自动化研究所研究员, 博士生导师. 主要研究方向有摄像机标定、三维重建、机器人导航、主动视觉等.

(HU Zhan-Yi Received his Ph. D. degree from the University of Liege, Belgium in 1993. Now he is a research professor in the Institute of Automation of the Chinese Academy of Sciences. His research interests include camera calibration, 3D reconstruction, vision guided robot navigation, and active vision.)

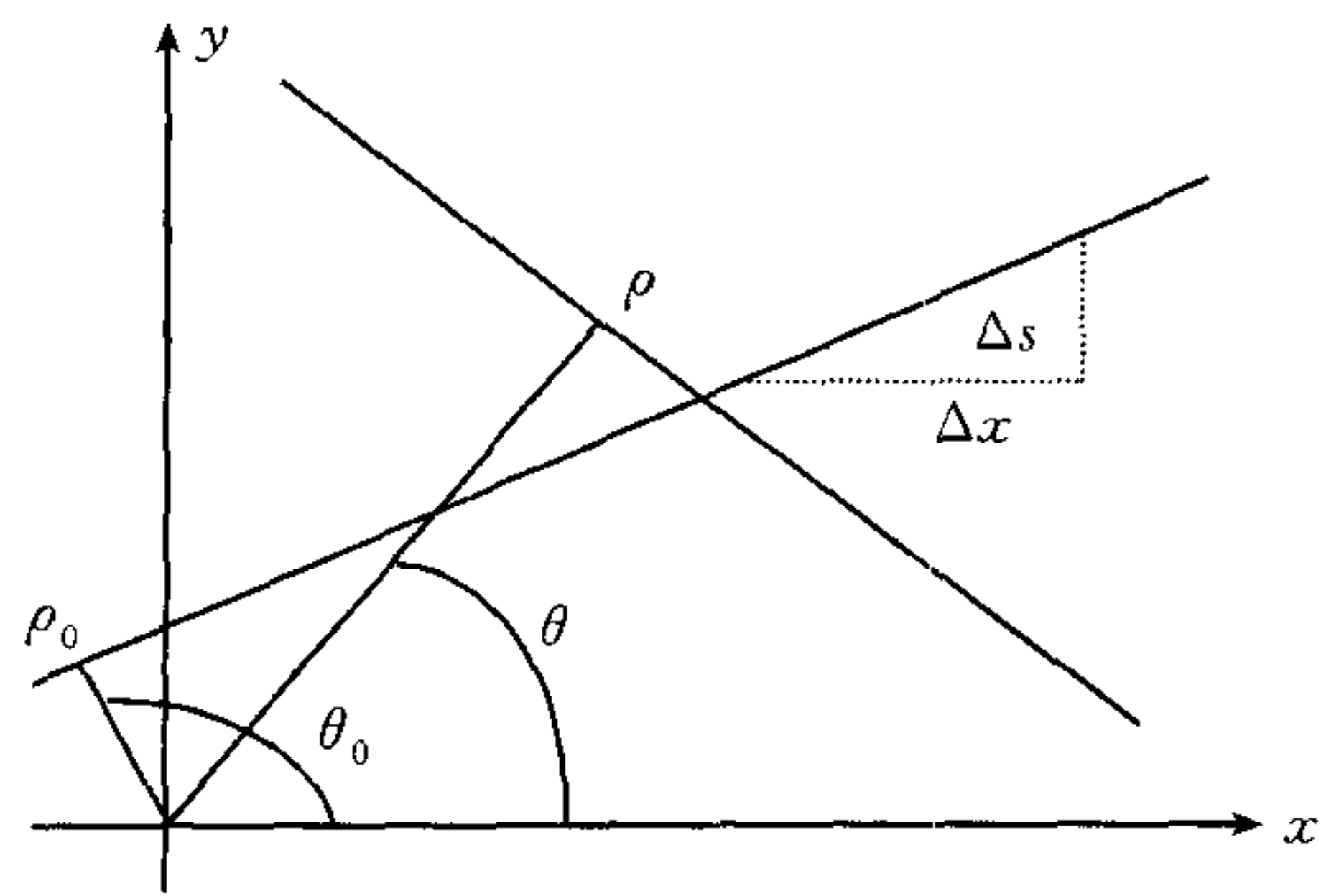


图 B1 直线  $L_0$  和直线  $L$  的交点  $(x,y)$  在

$L_0$  上的概率密度函数  $f_s(s)$

Fig. B1 The probability density function  $f_s(s)$  along  $L_0$  of the intersecting point  $(x,y)$  between line  $L_0$  and  $L$