谈谈奇解与包络

卢亭鹤 金 均

摘 要

本文讨论了常微分方程中奇解与包络的关系；指出了现行教材中关于这段内容存在的一些问题；比较确切地提出并证明了包络存在的充分与必要条件；还给出了微分方程的通解用参数方程形式表达时包络存在的充分与必要条件。本文还提供了若干个有趣而有启发性的例子。

在常微分方程的教学中，对包络与奇解这段内容，学生有很大的兴趣，他们会提出不少问题，如通解曲线族的包络与奇解的关系怎样？包络一定是奇解吗？奇解曲线是否一定是通解曲线族的包络？怎样检验 c 判别曲线是奇解？这些问题的产生，我们认为一方面由于奇解问题本身比较复杂，不容易讲清楚；另一方面也由于现行教材对某些问题写得过简，应该讲清楚的问题没有讲清楚，对历届学生提出的问题没有作出满意的回答，因此造成学生学到这里都会产生同样的问题。下面对奇解与包络的某些问题谈谈我们的看法，供大家参考。

一、奇解与包络的关系

为了下面叙述的方便，我们重述一些微分方程教材中常见的几个概念。

定义 1 假定所给的一阶微分方程为

$$F(x,y,P)=0 \quad \left(P=\frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

这里函数 $F(x,y,P)$ 对 P 属于某个区间的值，而 x、y 取遍某个区域 D 内皆有定义。假定对于某个区间中的常数 c，方程

$$\Phi(x,y,c)=0 \tag{2}$$

确定了方程 (1) 位于 D 中的积分曲线，如果至少存在量 c 的一个值 c_0，使得 $\Phi(x_0,y_0,c_0)=0$，其中 (x_0,y_0) 是 D 中任意一点，则说 (2) 是方程 (1) 的通解。

定义 2 设 $y=\varphi(x)$ 是微分方程 (1) 的一个解，如果在此解的每一点近旁至少还有一个异于 $y=\varphi(x)$ 的解存在，而且它在点 $(x,\varphi(x))$ 处与解 $y=\varphi(x)$ 相切，则称解 $y=\varphi(x)$ 是奇解。换言之，在奇解的每一点上，都至少有方程的两个解通过，而且它们在此点有相同的切线。

定义 3. 包络是这样的曲线，它与已知曲线族 (2) 的每一条曲线切于一点或几点（甚至无穷多个点），而且它本身全部由这些切点组成（参见［1］、［2］）。

在有些微分方程的教材中，为了推证的方便，曲线族 (2) 的包络也采用如下的定义。

本文于1983年5月9日收到

定义 3′ 单参数曲线族 (2) 的包络指的是这样的曲线，它本身并不包含在曲线族 (2) 中，但过这曲线的每一点有曲线族 (2) 中的一条曲线和它在这点相切（见[3]、[4]）。

包络的这两种定义的区别在于后者加上了一条限制，包络本身不属于曲线族 (2)。我们认为包络是否属于曲线族与包络的几何特征无关，因此，我们认为从几何上看，定义 3 是恰当的，而定义 3′ 是不合适的。

现在来谈谈奇解与包络的关系。从奇解与包络的定义可知，通解曲线族 (2) 的包络一定是奇解；反之，方程 (1) 的奇解是否一定是通解曲线族 (2) 的包络呢？由于包络的定义不同，这一问题的答案也不同。如果采用定义 3，则方程 (1) 的奇解必定是通解曲线族的包络；如果采用定义 3′，则方程 (1) 的奇解不一定是通解曲线族的包络，下面的例题清楚地说明了这一点。

例 1 求微分方程

$$P^2=2\sqrt{y}\,(xP-2y) \tag{3}$$

的通解和奇解。

解：从 (3) 式解出 x 得

$$x=\frac{2y}{P}+\frac{P}{2\sqrt{y}}\quad (y\neq 0,\ P\neq 0) \tag{4}$$

两边对 y 求导，并化简得：

$$\frac{P^2-4y^{3/2}}{4P^2y^{3/2}}\left(2y\frac{dP}{dy}-P\right)=0,$$

由此得

$$P^2-4y^{3/2}=0 \tag{5}$$

$$2y\frac{dP}{dy}-P=0 \tag{6}$$

从 (5) 得 $P=\pm 2y^{3/4}$，代入方程 (3)，得到 $y=\frac{x^4}{16}$，从 (6) 得 $P=2c\sqrt{y}$，代入方程 (3) 可得 $y=c^2(x-c)^2$。容易检验，$y=c^2(x-c)^2$ 是方程 (3) 的通解，此外 $y=0$ 也是方程 (3) 的一个解。由图 1 可知，按定义 3，$y=0$，$y=\frac{x^4}{16}$ 是通解曲线族的包络，因而是奇解。而按照定义 3′，则由于 $y=0$ 属于通解曲线族 $y=c^2(x-c)^2$（对应于 $c=0$）中，因此它不是包络，但它符合奇解的定义，因此是奇解。为了统一起见，我们认为包络的定义应采取定义 3 的形式，以下我们就用定义 3 来定义曲线族的包络，在此定义下，我们得到如下的结论：通解曲线族的包络是奇解，奇解是通解曲线族的包络。

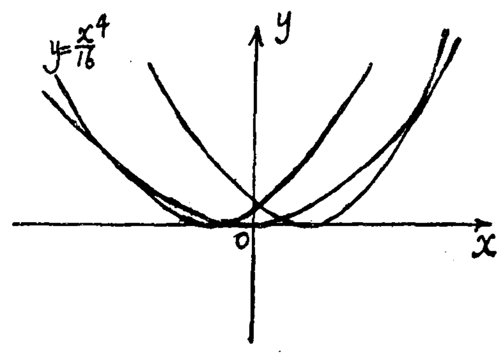

图 1

有了这一结论，今后求奇解，只需求出通解曲线族的包络即可。关于这一点，很多教科书都是这样做的，但这个结论却没有给出，以致使学生对奇解与包络产生了很混乱的认识。因此我们认为在教学中应该把这一结论明确告诉学生，使得用 c 判别法求奇解时有所依据。

顺便指出，例 1 还说明奇解可以包含在通解曲线族中，是通解的一部份，这与历史上曾

把奇解定义为“不包含在通解中的解”相违背。又如下例所示，不包含在通解中的解也不一定符合我们奇解的定义。

例 2 求解拉格朗奇方程

$$y=2xP+P^2$$

解：两边对 x 微分得

$$P=2P+2(x+P)\frac{dP}{dx}$$

解出$\frac{dx}{dP}$，得$\frac{dx}{dP}=-\frac{2x}{P}-2\ (P\neq 0)$，积分后得到：$x=\frac{c}{P^2}-\frac{2}{3}P$，代入原方程得：$y=\frac{2c}{P}-\frac{P^2}{3}$所以原方程的通解为：

$$\begin{cases} x=\frac{c}{P^2}-\frac{2}{3}P \\ y=\frac{2c}{P}-\frac{P^2}{3} \end{cases}$$

显然 $y=0$ 也是原方程的解，但它并不包含在通解曲线族中，而且它也不是奇解。因此，在现今的微分方程教材中，不采用传统的不确切的定义，而改为更确切的如定义 2 所叙述的内容。

二、包络存在的必要条件

由奇解与包络的关系知道，寻求方程 (1) 的奇解，归结为求通解曲线族的包络。对于包络存在的必要条件一般教科书上都有陈述，为了引出包络存在的充分条件，我们重述一下包络存在的必要条件及其证明。

定理 1 （包络存在的必要条件）设函数 $\Phi(x,y,c)$ 在区域 $\Omega=D\times I$ 上连续可微，其中 D 为 x,y 平面上某区域，I 为参数 c 的变动区间，那么曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 的包络必须满足方程组：

$$(I)\begin{cases} \Phi(x,y,c)=0 & (2) \\ \Phi'_c(x,y,c)=0 & (7) \end{cases}$$

证明：设 $x=x(c)$，$y=y(c)$，$\alpha<c<\beta$，是曲线族 (2) 的包络的参数形式的方程，参数 c 所对应的点在曲线 $\Phi(x,y,c)=0$ 上，所以

$$\Phi(x(c),y(c),c)\equiv 0 \quad \alpha<c<\beta \tag{8}$$

对 (8) 关于 c 求导得到

$$\Phi'_x(x(c),y(c),c)x'(c)+\Phi'_y(x(c),y(c),c)y'(c)+\Phi'_c(x(c),y(c),c)\equiv 0 \tag{9}$$

因为在点 $(x(c),y(c))$ 处包络的切线和族中曲线 $\Phi(x,y,c)=0$ 的切线重合，所以二者的斜率 $\frac{y'(c)}{x'(c)}$和$-\frac{\Phi'_x(x(c),y(c),c)}{\Phi'_y(x(c),y(c),c)}$相等，由此从 (9) 推出 $(x(c),y(c))$ 应满足的关系式：

$$\Phi'_c(x,y,c)=0 \tag{10}$$

我们称由方程组 (I) 所确定的曲线为 c 判别曲线，因此，如果 $\Phi(x,y,c)$ 在 Ω 中连续可微，**则曲线族** (2) 如有包络，它必在 c 判别曲线中。

例 3 求方程

$$x-y=\frac{4}{9}P^2-\frac{8}{27}P^3 \tag{11}$$

的奇解。

解：容易求出方程 (11) 的通解为

$$(y-c)^2-(x-c)^3=0 \tag{12}$$

对 c 求导得：

$$-2(y-c)+3(x-c)^2=0,$$

由此得 c 判别曲线：

$$y=x, \qquad y=x-\frac{4}{27};$$

容易检验，$y=x-\frac{4}{27}$ 是奇解，而 $y=x$ 不是方程的解，而是通解曲线族歧点的轨迹（见图 2）。要注意的是，定理 1 中的大前提 $\Phi(x,y,c)\in C^1(\Omega)$ 是很重要的，如果没有它，定理 1 可能不成立，即曲线族 (2) 的包络不一定在 c 判别曲线中。

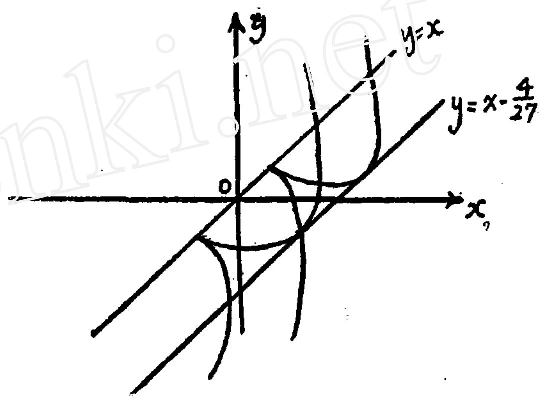

图 2

例 4 求曲线族

$$y^{\frac{1}{3}}=x+c \tag{13}$$

的包络。

解：曲线族 (13) 等价于曲线族 $y=(x+c)^3$，关于 c 求导得 $3(x+c)^2=0$，因此 c 判别曲线为 $y=0$，容易检验 $y=0$ 确是曲线族 (13) 的包络。但如果从 (13) 直接对 c 求导，则得 $\Phi'_c=1$，因而得不到 c 判别曲线。此法失效的原因在于 $\Phi(x,y,c)=x-y^{1/3}+c$ 在 $y=0$ 处不可微，不满足定理 1 的条件。

三、包络存在的充分条件

在第二段中，从 (9) 式推到 (10) 式时，应用了相切的条件：

$$\Phi'_x(x(c),y(c),c)x'(c)+\Phi'_y(x(c),y(c),c)y'(c)=0 \tag{14}$$

而条件 (14) 的成立，并不意味着二条曲线一定相切，因为当

$$\Phi'_x(x(c),y(c))=\Phi'_y(x(c),y(c),c)=0 \tag{15}$$

时条件 (14) 也显然成立，而 (15) 式成立表示点 $(x(c),y(c))$ 是曲线 $\Phi(x,y,c)=0$ 的奇点，因此 c 判别曲线除曲线族的包络外还有歧点的轨迹（如例 3 所示）。现在的问题是对函数 $\Phi(x,y,c)$ 加上什么条件时，所得的 c 判别曲线一定是包络？下面我们给出包络存在的充分条件。

定理 2 （包络存在的充分条件）设点 (x_0,y_0,c_0) 位于函数 $\Phi(x,y,c)$ 的存在区域内，且有

$$\Phi(x_0,y_0,c_0)=0, \quad \Phi'_c(x_0,y_0,c_0)=0$$

如果在点 (x_0,y_0,c_0) 的某个邻域内满足

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial c\partial x} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial c\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

及 $\Phi''_{cc}(x,y,c)\neq 0$，则在点 c_0 的某一邻域内确定的 c 判别曲线的分支 Γ 是曲线族（2）的包络。

证明： 由隐函数存在定理知，由方程组

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \Phi'_c(x,y,c)=0\end{cases}\tag{16}$$

在 c_0 点的某一邻域 U 内确定连续可微函数组

$$\begin{cases}x=x(c)\\ y=y(c)\end{cases}\tag{17}$$

它在 U 上满足关系式 $\Phi(x(c),y(c),c)\equiv 0$，$\Phi'_c(x(c),y(c),c)\equiv 0$，并由隐函数微分法得

$$x'(c)=\frac{1}{\Delta}\Phi'_y\Phi''_{cc}$$

$$y'(c)=-\frac{1}{\Delta}\Phi'_x\Phi''_{cc}$$

因此，
$$y'^2(c)+x'^2(c)=\frac{1}{\Delta^2}(\Phi'^2_y+\Phi'^2_x)\Phi''^2_{cc}\neq 0$$

设 $x'(c)\neq 0$，则 $\Phi'_y\neq 0$，因此从（14）式得

$$\frac{y'(c)}{x'(c)}=-\frac{\Phi'_x(x(c),y(c),c)}{\Phi'_y(x(c),y(c),c)}$$

即 c 判别曲线（16）与曲线族中对应于参数 c 的曲线在交点处相切，即 c 判别曲线（16）是曲线族（2）的包络。

我们这儿所列的充分条件表面上要比一般教科书上的条件强一些，一般教科书上只讲到如果沿 c 判别曲线满足条件 $\Phi'^2_x+\Phi'^2_y\neq 0$，则所得的 c 判别曲线一定是曲线族的包络。但在此命题的证明过程中，实际上都引用了我们定理2中的条件。只不过不明显写出来而已。我们认为，这样处理是不恰当的。如果仅有 $\Phi'^2_x+\Phi'^2_y\neq 0$ 的条件，那么，还不能保证 c 判别曲线一定是曲线族的包络，下面的例子充分说明了这一点。

例 5 求直线族

$$\Phi(x,y,c)\equiv 4(1+c)x-c^2y=0\tag{18}$$

的包络。

解： 对（18）式关于 c 求导得：

$$4x-2cy=0,\tag{19}$$

消去 c 得 c 判别曲线

$$x(x+y)=0\quad 即\quad x=0,\ x+y=0,$$

但由于方程（18）是表示过原点的直线族，因而 $x=0$，$x+y=0$ 都不是直线族（18）的包络，它们仅仅是直线族（18）中的两条特殊直线（对应于 $c=0$，$c=-2$）。但是在此例中，它恰恰满足一般教科书中所列的充分条件：沿着 c 判别曲线有 $\Phi'^2_x+\Phi'^2_y=16(1+c)^2+c^4\neq 0$。此例失败的真正原因在于沿着 c 判别曲线有

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi'_x & \Phi'_y \\ \Phi''_{cx} & \Phi''_{cy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4(1+c) & -c^2 \\ 4 & -2c \end{vmatrix} = -4c(2+c) = 0,$$

因此不满足我们定理中所列的条件，所以隐函数存在定理不能应用，即 c 判别曲线不能表示为 $x=x(c), y=y(c)$ 的形式（c 是变动的参数）。从我们的观点看此例的 c 判别曲线不是直线族 (18) 的包络是理所当然的，不足为怪。

四、用参数方程表示通解时奇解的求法

众所周知，隐式方程 $F(x,y,P)=0$ 的通解经常用参数形式

$$\begin{cases} x = x(P,c) \\ y = y(P,c) \end{cases} \left(P = \frac{dy}{dx},\ c \text{ 为任意常数}\right) \tag{20}$$

来表示，对于参数方程表示的曲线族的包络，一般教科书上都没有提及，下面我们来研究参数方程 (20) 所表示的曲线族的包络所应满足的方程。用 Γ_c 表示方程 (20) 对应于任意常数 c 的曲线，用 Γ 表示曲线族 (20) 的包络，在曲线 Γ_c 与 Γ 相切的点的值 P 将是参数 c 的函数：

$$P = P(c) \tag{21}$$

因此包络 Γ 由参数方程

$$x = x[P(c), c],\quad y = y[P(c), c] \tag{22}$$

所确定，关于 c 求导得

$$x'(c) = \frac{\partial x}{\partial P}\frac{dP}{dc} + \frac{\partial x}{\partial c},\quad y'(c) = \frac{\partial y}{\partial P}\frac{dP}{dc} + \frac{\partial y}{\partial c} \tag{23}$$

因为包络与曲线在公共点处相切，因此

$$\frac{y'(c)}{x'(c)} = \frac{\partial y}{\partial P} \Big/ \frac{\partial x}{\partial P} \tag{24}$$

将 (23) 代入 (24) 并化简得

$$\frac{D(x,y)}{D(P,c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial P} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial P} & \frac{\partial y}{\partial c} \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

因此由参数方程表示的曲线族的包络应满足方程组

$$\begin{cases} x = x(P,c) \\ y = y(P,c) \\ x'_P y'_c - x'_c y'_P = 0 \end{cases} \tag{26}$$

由方程组 (26) 所确定的曲线也称为 c 判别曲线， 这个 c 判别曲线除包含包络外， 也可能有歧点的几何轨迹。下面我们加强条件，使求得的 c 判别曲线就是包络，其结论如下：

定理 3 设方程 (1) 的通解由参数方程

$$\begin{cases} x = x(P,c) \\ y = y(P,c) \end{cases} \left(P = \frac{dy}{dx}\right) \tag{20}$$

给出，设函数 $P=P(c)$ 由下列方程

$$\frac{\partial y(P,c)}{\partial c} = P\frac{\partial x(P,c)}{\partial c} \tag{27}$$

所确定，则由公式

$$x=x[P(c),c],\quad y=y[P(c),c] \tag{22}$$

所定义的曲线在任意不包含尖点的曲线段上是方程（1）的奇积分曲线。

证明：先证必要性。Γ_c 的切线的斜率由公式

$$\frac{\partial y}{\partial P}=P\frac{\partial x}{\partial P} \tag{28}$$

表示，沿包络 Γ 所取的微分为

$$dx=\frac{\partial x}{\partial P}dP+\frac{\partial x}{\partial c}dc,\quad dy=\frac{\partial y}{\partial P}dP+\frac{\partial y}{\partial c}dc \tag{29}$$

因为按假定包络 Γ 与任意曲线 Γ_c 相切，因此有

$$dy=P\,dx \tag{30}$$

将（29）代入（30），并注意到（28）式得

$$\frac{\partial y(P,c)}{\partial c}=P\frac{\partial x(P,c)}{\partial c} \tag{27}$$

从（27）求出 $P=P(c)$ 代入（20）即得（22）。

再证充分性。假定函数 $P=P(c)$ 满足方程（27），而曲线 Γ 由（22）所确定，并且假定在 Γ 上没有尖点，则在曲线 Γ_c 与 Γ 的任意公共点处，Γ_c 的切线的斜率应满足（27）、（28），因此从（29）式得 $dy=Pdx$。这儿 dx 与 dy 跑遍曲线 Γ，因此曲线 Γ_c 与 Γ 彼此相切，因而曲线 Γ 是曲线族（20）的包络，也就是方程（1）的奇积分曲线。

例 6 求微分方程

$$(x-3P^2)^3=(y-2P^3)^2$$

的通解和奇解。

解：

$$y-2P^3=\pm(x-3P^2)^{\frac{3}{2}}$$

关于 x 求导：

$$P\left(1-6P\frac{dP}{dx}\right)=\pm\frac{3}{2}\left(1-6P\frac{dP}{dx}\right)(x-3P^2)^{\frac{1}{2}},$$

由此得：

$$1-6P\frac{dP}{dx}=0,\quad P=\pm\frac{3}{2}(x-3P^2)^{\frac{1}{2}},$$

因此求得参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=3P^2+c^2\\ y=2P^3+c^3\end{cases}$$

因此，

$$\frac{\partial x}{\partial c}=2c,\quad \frac{\partial y}{\partial c}=3c^2,$$

方程（27）给出 c 与 P 之间的关系为

$$3c^2=2Pc,$$

由此得 $c=0$，或

$$P=\frac{3}{2}c,\quad c=0$$

对应于特解

$$x=3P^2,\quad y=2P^3;$$

而等式 $P=\frac{3}{2}c$ 对应于奇解

$$x=\frac{31}{4}c^2,\quad y=\frac{31}{4}c^3,$$

消去 c 即得半立方抛物线

$$y^2=\frac{4}{31}x^3。$$

若按公式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial P} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial P} & \frac{\partial y}{\partial c} \end{vmatrix}=0 \tag{25}$$

计算，则有

$$\begin{vmatrix} 6P & 2c \\ 6P^2 & 3c^2 \end{vmatrix}=6Pc(3c-2P)=0$$

则得

$$c=0,\ P=0,\ P=\frac{3}{2}c$$

因此，同样可以得到，当 $c=0$ 时，对应于特解

$$x=3P^2,\ y=2P^3,$$

消去 P，即得

$$y^2=\frac{4}{27}x^3;$$

当 $P=0$ 时，对应于尖点的几何轨迹： $y^2=x^3$

当 $P=\frac{3}{2}c$ 时，对应于前面所说的奇解 $y^2=\frac{4}{31}x^3$。

从此例可知，用定理3的方法求包络更为简单。

参 考 文 献

［1］ Г.М 菲赫金哥尔茨著，微积分学教程一卷二分册，人民教育出版社。

［2］ Л.Э 艾利斯哥尔茨著，微分方程，高等教育出版社。

［3］ 复旦大学数学系主编，常微分方程，上海科学技术出版社。

［4］ 中山大学教学力学系常微分方程组编，常微分方程，人民教育出版社。

On Singular Solution and Envelope

Lu Tinghe Jing Jun

Abstract

In this paper, the relationship between the singular solution and the envelope in an ordinary differential equation is discussed, and some ambiguous points in this respect appearing in current texts have been pointed out. The Necessary and sufficient condition for the existence of envelope both in explict and in parametric forms is given, and some interesting examples regarding singular solutions and envelope are also cited.