第34卷第1期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 34, No. 1
2005年3月 Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences) 2005, Mar.

有交易成本的欧式期权定价公式

王 杨,肖文宁,张寄洲

(上海师范大学 数理信息学院,上海 200234)

摘 要:在波动率 $\sigma(t)$,红利率 $q(t)$,无风险利率 $r(t)$ 均为时间 t 的已知函数和在证券市场中有交易成本的假设下,得到了欧式期权的定价方程,从而获得欧式看涨期权和看跌期权的定价公式及它们的平价公式.

关键词:看涨期权;看跌期权;交易成本;期权定价

中图分类号:F830.9 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-5137(2005)01-0012-06

0 引 言

期权是风险管理的核心工具,1973 年,Black 和 Scholes 提出了著名的期权定价模型 - Black-Scholes 模型,使他们荣获了 1997 年度诺贝尔经济学奖。该模型假设无交易成本且波动率 σ,红利率 q 和无风险利率 r 都是固定不变的,然而,在现实世界中,投资者将面临不可忽视的交易成本,而且 σ, q 和 r 受多种因素的影响,很难保持不变。最近,郑小迎等[1]研究了有交易成本的期权定价问题,Wilmott[2]在波动率 σ,红利率 q 和无风险利率 r 是时间 t 的已知函数的条件下,修正了欧式期权的 Black-Scholes 定价方程. 关莉等[3]进一步研究了这一问题,得到了 Black-Scholes 方程的解和看涨、看跌期权的定价公式. 本文既考虑波动率 σ,红利 q,无风险利率 r 均为时间 t 的已知函数,又考虑带有交易成本的情况,推出了在此条件下欧式期权的 Black-Scholes 定价方程,再利用偏微分方程的知识得出了欧式看涨期权和看跌期权的定价公式,并进一步得到了它们的平价公式。

1 预备知识

用 S 表示股票现价,X 表示期权的执行价格,T 表示期权的到期时间,t 表示当前时刻,V 表示期权的价格,且设 $V = V(S, t)$.

借助 B - S 模型的基本假设条件,给出以下的假设:

1)允许卖空;

2)无税收;

3)无套利机会;

4)投资者按无风险利率任意的借入或贷出;

5)波动率 σ,红利率 q 和无风险利率 r 在期权有效期内是时间 t 的函数;

6)股价 s 遵循几何布朗运动:

$$dS = \mu(t)Sdt + \sigma(t)SdZ, \tag{1}$$

收稿日期:2004-02-08

作者简介:王杨(1980 -),女,上海师范大学数理信息学院硕士研究生;张寄洲(1958 -),男,上海师范大学数理信息学院教授.

这里$\mu(t)$为预期收益率, dZ是一个标准 *Brown* 运动, $dZ=\phi\sqrt{dt}$。根据 *Itô* 公式,期权 $V(S,t)$ 遵循如下的随机过程:

$$dV=\left(\mu(t)S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\frac{\partial V}{\partial t}\right)dt+\sigma(t)S\frac{\partial V}{\partial S}dZ. \tag{2}$$

(1)和(2)的离散形式分别为:

$$\delta S=\mu(t)S\delta t+\sigma(t)S\delta Z, \tag{3}$$

$$\delta V=\left(\mu(t)S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\frac{\partial V}{\partial t}\right)\delta t+\sigma(t)S\frac{\partial V}{\partial S}\delta Z, \tag{4}$$

其中δS和δV分别为股价S和期权V在短时间段δt内的变化量。

2 主要结果

构造投资组合Π为:买入一份期权合约,卖出份额为Δ的股票。则

$$\Pi=V-\Delta S.$$

选取$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}(S,t)$. 交易成本可看作是投资者因买卖股票而产生的直接费用,一般由股票多头支付,并通常以交易额的固定比例K来表示。若股票头寸发生了ω份额的变化,即购买($\omega>0$)或出售($\omega<0$)价值为$|\omega|S$的股票头寸,则产生的交易成本为$KS|\omega|$. 由(3),(4)得:

$$\begin{aligned}\delta\Pi&=\delta V-\Delta\delta S-\Delta q(t)S\delta t=\\&\left(\mu(t)S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\frac{\partial V}{\partial t}\right)\delta t+\sigma(t)S\frac{\partial V}{\partial S}\delta Z-\\&\left(\mu(t)S\frac{\partial V}{\partial S}\delta t+\sigma(t)S\frac{\partial V}{\partial S}\delta Z-KS|\omega|\right)-q(t)S\frac{\partial V}{\partial S}\delta t=\\&\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-q(t)S\frac{\partial V}{\partial S}\right)\delta t+KS|\omega|.\end{aligned} \tag{5}$$

(5)式因保值调整策略而产生的交易份额ω为:

$$\omega=\frac{\partial V}{\partial S}(S+\delta S,t+\delta t)-\frac{\partial V}{\partial S}(S,t). \tag{6}$$

由泰勒展式,(6)式变为:

$$\begin{aligned}\omega&=\frac{\partial V}{\partial S}(S+\delta S,t+\delta t)-\frac{\partial V}{\partial S}(S,t)=\\&\delta S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)+\delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S,t)+\cdots=\\&(\mu(t)S\delta t+\sigma(t)S\delta Z)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)+\delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S,t)+\cdots=\\&(\mu(t)S\delta t+\sigma(t)S\phi\sqrt{\delta t})\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)+\delta t\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(S,t)+\cdots=\\&\sigma(t)S\phi\sqrt{\delta t}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\mu(t)S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\delta t+\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}\delta t+\cdots\end{aligned}$$

忽略关于$\sqrt{\delta t}$的高阶小项,只保留$\sqrt{\delta t}$项,有

$$\omega\cong\sigma(t)S\phi\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sqrt{\delta t},\quad 其中\ \phi\sim N(0,1).$$

因此交易成本$KS|\omega|$的数学期望为:

$$E(KS|\omega|)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}KS^2\sigma(t)\sqrt{\delta t}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right||x|e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{2\pi}}KS^2\sigma(t)\sqrt{\delta t}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \\
&\sqrt{\frac{2}{\pi}}KS^2\sigma(t)\sqrt{\delta t}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \cong \\
&KS^2\sigma(t)\sqrt{\delta t}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|.
\end{aligned} \tag{7}
$$

将(7)代入(5)得：

$$E(\delta\Pi) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - q(t)S\frac{\partial V}{\partial S} + KS^2\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\right)\delta t.$$

根据无套利原理和 $E(\delta\Pi) = r(t)\Pi\delta t = r(t)(V - S\frac{\partial V}{\partial S})\delta t$, 得：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + KS^2\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| + (r(t) - q(t))S\frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0.$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ 又称为 γ 保值因子，对欧式期权多头而言，γ 值始终为正，而对空头方 γ 因子大小与多头方相同，但符号相反，即 γ 值始终为负.

因此，欧式期权多头的定价方程为：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\sigma^2(t) + 2K\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}\right)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S\frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0.$$

欧式期权空头的定价方程为：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\sigma^2(t) - 2K\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}\right)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S\frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0.$$

定理 1 欧式看涨期权多头的定价公式为：

$$c(S,t) = Se^{-\int_t^T q(\nu)\mathrm{d}\nu}N(d_1) - Xe^{-\int_t^T r(\nu)\mathrm{d}\nu}N(d_2).$$

其中，

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \int_t^T[r(\nu) - q(\nu) + \frac{1}{2}\sigma_L^2(\nu)]\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\int_t^T\sigma_L^2(\nu)\mathrm{d}\nu}}, \quad d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T\sigma_L^2(\nu)\mathrm{d}\nu},$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega, \ \sigma_L^2(t) = \sigma^2(t) + 2K\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}.$$

证明 欧式看涨期权多头价值 $c(S,t)$ 满足以下偏微分方程：

$$
\begin{cases}
\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\sigma^2(t) + 2K\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}\right)S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S\frac{\partial c}{\partial S} - r(t)c = 0, & (8) \\
\qquad (0 \leqslant S < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T) & \\
c(S,T) = (S - X)^+. & (9)
\end{cases}
$$

作变换：令

$$
\begin{cases}
\sigma_L^2(t) = \sigma^2(t) + 2K\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}, \\
S = Xe^{x - A(t)}, \\
\tau = \rho(t), \\
c(S,t) = Xe^{-B(t)}u(x,\tau).
\end{cases}
$$

其中,

$$A(t)=\int_t^T[r(\nu)-q(\nu)-\frac{1}{2}\sigma_L^2(\nu)]\mathrm{d}\nu,\quad 即\ \mathrm{d}A(t)=[\frac{1}{2}\sigma_L^2(t)+q(t)-r(t)]\mathrm{d}t;$$

$$B(t)=\int_t^T r(\nu)\mathrm{d}\nu,\quad 即\ \mathrm{d}B(t)=-r(t)\mathrm{d}t;$$

$$\rho(t)=\int_t^T\frac{1}{2}\sigma_L^2(\nu)\mathrm{d}\nu,\quad 即\ \mathrm{d}\rho(t)=-\frac{1}{2}\sigma_L^2(t)\mathrm{d}t.$$

易知 $x=\ln\frac{S}{X}+A(t)$, $\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\partial x}{\partial S}=\frac{1}{S}$. 故

$$\frac{\partial c}{\partial t}=Xe^{-B(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t}-u\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\frac{\partial c}{\partial S}=\frac{X}{S}e^{-B(t)}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}=\frac{X}{S^2}e^{-B(t)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

将它们代入(8),(9)得:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial\tau}, & (-\infty<x<+\infty,\tau\geqslant 0)\\ u(x,0)=(e^x-1)^+.\end{cases}$$

由 Pisson 公式得:

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^\xi-1)^+e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}\mathrm{d}\xi.$$

代回原变量 $c(S,t)$ 得:

$$\begin{aligned}c(S,t)&=Xe^{-B(t)}u(x,\tau)=\\&Xe^{-B(t)}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^{+\infty}(e^\xi-1)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}\mathrm{d}\xi=\\&e^{-B(t)}\frac{1}{2\sqrt{\pi\rho(t)}}\int_X^{+\infty}(S'-X)e^{-\frac{[\ln S'-(\ln S+A(t))]^2}{4\rho(t)}}\frac{\mathrm{d}S'}{S'}=\\&\frac{e^{-B(t)}}{2\sqrt{\pi\rho(t)}}\int_X^{+\infty}e^{-\frac{[\ln S'-(\ln S+A(t))]^2}{4\rho(t)}}\mathrm{d}S'-\\&\frac{Xe^{-B(t)}}{2\sqrt{\pi\rho(t)}}\int_X^{+\infty}e^{-\frac{[\ln S'-(\ln S+A(t))]^2}{4\rho(t)}}\frac{\mathrm{d}S'}{S'}=\\&I_1+I_2,\end{aligned}$$

其中, $S'=Xe^\xi$, $\mathrm{d}\xi=\frac{\mathrm{d}S'}{S'}$. 化简 I_1, 令 $y=\frac{\ln S'-(\ln S+A(t))}{\sqrt{2\rho(t)}}$, 则 $\mathrm{d}S'=\sqrt{2\rho(t)}S\mathrm{d}y$. 那么,

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{e^{-B(t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln x-(\ln S+A(t))}{\sqrt{2\rho(t)}}}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}S\mathrm{d}y=\\&Se^{A(t)-B(t)+\rho(t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln x-(\ln S+A(t))}{\sqrt{2\rho(t)}}}^{\infty}e^{-\frac{(y-\sqrt{2\rho(t)})^2}{2}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

再令 $\theta=-y+\sqrt{2\rho(t)}$, 则 $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}\theta$. 那么,

$$I_1=Se^{A(t)-B(t)+\rho(t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{\ln x-(\ln S+A(t))}{\sqrt{2\rho(t)}}+\sqrt{2\rho(t)}}e^{-\frac{\theta^2}{2}}\mathrm{d}\theta.$$

化简 I_2: 令 $y=\frac{\ln S'-(\ln S+A(t))}{\sqrt{2\rho(t)}}$, 则 $\mathrm{d}S'=\sqrt{2\rho(t)}S\mathrm{d}y$. 那么,

$$I_2 = \frac{Xe^{-B(t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln x-(\ln S+A(t))}{\sqrt{2\rho(t)}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y = \frac{Xe^{-B(t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{\ln x-(\ln S+A(t))}{\sqrt{2\rho(t)}}} e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}Z.$$

所以,

$$c(S,t) = e^{-B(t)}[Se^{A(t)+\rho(t)}N(d_1) - XN(d_2)],$$

其中,

$$d_1 = -\frac{\ln x - (\ln S + A(t))}{\sqrt{2\rho(t)}} + \sqrt{2\rho(t)},\ d_2 = d_1 - \sqrt{2\rho(t)},\ N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega.$$

将 $A(t)$, $B(t)$, $\rho(t)$ 的具体表达式代入上式化简得:

$$c(S,t) = Se^{-\int_t^T q(\nu)\mathrm{d}\nu}N(d_1) - Xe^{-\int_t^T r(\nu)\mathrm{d}\nu}N(d_2).$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \int_t^T[r(\nu) - q(\nu) + \frac{1}{2}\sigma_L^2(\nu)]\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\int_t^T \sigma_L^2(\nu)\mathrm{d}\nu}},\ d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma_L^2(\nu)\mathrm{d}\nu}.$$

推论 1 欧式看跌期权多头的定价公式为:

$$p(S,t) = Xe^{-\int_t^T r(\nu)\mathrm{d}\nu}N(-d_2) - Se^{-\int_t^T q(\nu)\mathrm{d}\nu}N(-d_1).$$

其中,

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \int_t^T[r(\nu) - q(\nu) + \frac{1}{2}\sigma_L^2(\nu)]\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\int_t^T \sigma_L^2(\nu)\mathrm{d}\nu}},\ d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma_L^2(\nu)\mathrm{d}\nu},$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega,\ \sigma_L^2(t) = \sigma^2(t) + 2K\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}.$$

定理 2 欧式看涨期权空头的定价公式为:

$$c(S,t) = Se^{-\int_t^T q(\nu)\mathrm{d}\nu}N(\hat{d}_1) - Xe^{-\int_t^T r(\nu)\mathrm{d}\nu}N(\hat{d}_2).$$

其中,

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \int_t^T[r(\nu) - q(\nu) + \frac{1}{2}\sigma_s^2(\nu)]\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2(\nu)\mathrm{d}\nu}},\ \hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma_s^2(\nu)\mathrm{d}\nu},$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega,\ \sigma_s^2(t) = \sigma^2(t) - 2K\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}.$$

证明过程类似定理 1.

推论 2 欧式看跌期权空头的定价公式为:

$$p(S,t) = Xe^{-\int_t^T r(\nu)\mathrm{d}\nu}N(-\hat{d}_2) - Se^{-\int_t^T q(\nu)\mathrm{d}\nu}N(-\hat{d}_1).$$

其中,

$$\hat{d}_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + \int_t^T[r(\nu) - q(\nu) + \frac{1}{2}\sigma_s^2(\nu)]\mathrm{d}\nu}{\sqrt{\int_t^T \sigma_s^2(\nu)\mathrm{d}\nu}},\ \hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma_s^2(\nu)\mathrm{d}\nu},$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\omega^2}{2}}\mathrm{d}\omega,\ \sigma_s^2(t) = \sigma^2(t) - 2K\sigma(t)\sqrt{\frac{1}{\delta t}}.$$

3 平价公式

定理3 设 $c(S,t)$, $p(S,t)$ 分别为具有相同敲定价格 X,到期日 T 的有交易成本的欧式看涨期权多头与欧式看跌期权多头的定价,则看涨期权与看跌期权的平价公式为:

$$c(S,t) + Xe^{-\int_t^T r(\nu)d\nu} = p(S,t) + Se^{-\int_t^T q(\nu)d\nu}.$$

证明 设 $W = c - p$,则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma_L^2(t)\ S^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S\dfrac{\partial W}{\partial S} - r(t)W = 0\ , & (10) \\ W(S,T) = S - X. & (11) \end{cases}$$

令

$$W = a(t)S - b(t)X, \tag{12}$$

将(12)代入(10)得:

$$a'(t)S - b'(t)X + (r(t) - q(t))Sa(t) - r(t)(a(t)S - b(t)X) = 0.$$

选取 $a(t)$, $b(t)$ 使得

$$\begin{cases} a'(t) + (r(t) - q(t))a(t) - r(t)a(t) = 0, \\ b'(t) - b(t)r(t) = 0, \\ a(T) = b(T) = 1. \end{cases}$$

解得 $a(t) = e^{-\int_t^T q(\nu)d\nu}$, $b(t) = e^{-\int_t^T r(\nu)d\nu}$,将它们代入(12)式,从而得证.

定理4 设 $c(S,t)$, $p(S,t)$ 分别为具有相同敲定价格 X,到期日 T 的有交易成本的欧式看涨期权空头与欧式看跌期权空头的定价,则看涨期权与看跌期权的平价公式为:

$$c(S,t) + Xe^{-\int_t^T r(\nu)d\nu} = p(S,t) + Se^{-\int_t^T q(\nu)d\nu}.$$

从上面两个定理可以看出无论是欧式期权多头还是欧式期权空头,它们的平价公式是完全一样的.

参考文献:

[1] 关莉,李耀堂. 修正的 Black-Scholes 期权定价模型[J]. 云南大学学报. 2000, 23(2): 84-86.

[2] WILMOTT P, HOWSION S, DEWYNNE J. Option pricing mathematical models and computation[M]. Oxford: Oxford Financial Press, 1997.

[3] 郑小迎,陈金贤. 有交易成本的期权定价研究[J]. 管理工程学报, 2001,15(3):35-37.

[4] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

Pricing formulae for European options with transaction costs

WANG Yang, XIAO Wen-ning, ZHANG Ji-zhou

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: A European option pricing equation is gotten under the assumptions that the volatility $\sigma(t)$, dividend $q(t)$, and the risk-free rate $r(t)$ are all known functions of t and there exsits a transaction cost in the securities business. Thus, the pricing formulae for the European call and put options and their call-put parity are obtained.

Key words: European call option; European put option; transaction cost; option pricing