第18卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 18, No. 3
1992 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1992

滞后型控制系统的稳定性判据

田存生 张英林
(兰州大学电子与信息科学系,兰州 730000)

摘 要

本文根据李雅普诺夫稳定性理论，推导出滞后型控制系统 $\dot{x}(t)=Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)$ 无条件稳定的充分条件．并且证明所建立的稳定性代数判据,不仅简明易用,且能获得较大的稳定区域.

关键词: 时滞,渐近稳定,无条件稳定.

一、稳定性判据

记 $\boldsymbol{\phi}$: $\boldsymbol{x}(t)$ 的初始函数且连续,即

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{x}(t),\quad -\tau\leqslant t\leqslant 0.$$

$|\boldsymbol{\phi}|$: 定义为 $|\boldsymbol{\phi}|\triangleq\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\boldsymbol{\phi}(\theta)|$，这里 $|\boldsymbol{\phi}(\theta)|$ 是 $\boldsymbol{\phi}(\theta)$ 在 R^n 上的任意范数.

$\mathrm{Res}(X)$: 表示矩阵 X 特征值的实部．设时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_\tau\boldsymbol{x}(t-\tau)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{\phi}), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$; $A\in R^{n\times n}$; $A_\tau\in R^{n\times n}$; $\tau\in R^+$.

关于系统(1)的稳定性，HALE 提出并证明了下面的理论[1].

引理 1. 设 $\boldsymbol{f}$: $R\times C\to R^n$ 连续有界; u,v,w: $R^+\to R^+$ 为连续非减函数; 对于 $s>0$, $u(s)$, $v(s)$ 均为正． 且 $u(0)=v(0)=0$．如果存在一个连续函数 V: $R\times C\to R$ 使得

$$u(|\boldsymbol{\phi}(0)|)\leqslant V(t,\boldsymbol{\phi})\leqslant v(|\boldsymbol{\phi}|),$$
$$\dot{V}(t,\boldsymbol{\phi})\leqslant -w(|\boldsymbol{\phi}(0)|),$$

则方程(1)的解 $\boldsymbol{x}=0$ 是一致稳定的;如果当 $s\to\infty$时，$u(s)\to\infty$，方程(1)的解是一致有界的;若 $s>0$ 有 $w(s)>0$，则解 $\boldsymbol{x}=0$ 是一致渐近稳定的.

据此，选用李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{\phi})=\boldsymbol{\phi}^T(0)P\boldsymbol{\phi}(0)+\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\phi}^T(\theta)Q\boldsymbol{\phi}(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

其中 P,Q 均为 $n\times n$ 阶正定对称矩阵; T 表示转置.

考虑到 $\dot{\boldsymbol{\phi}}(0)=A\boldsymbol{\phi}(0)+A_\tau\boldsymbol{\phi}(-\tau)$[1]，沿着式(1)的解，$V(\boldsymbol{\phi})$ 的导数为

本文于1990年5月22日收到.

$$\dot{V}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\phi}^T(0)[A^TP + PA + Q]\boldsymbol{\phi}(0) + \boldsymbol{\phi}^T(-\tau)A_\tau^T P\boldsymbol{\phi}(0) + \boldsymbol{\phi}^T(0)PA_\tau\boldsymbol{\phi}(-\tau) - \boldsymbol{\phi}^T(-\tau)Q\boldsymbol{\phi}(-\tau).$$

在上式的右边加,减 $\boldsymbol{\phi}^T(0)PA_\tau Q^{-1}A_\tau^T P\boldsymbol{\phi}(0)$, 则

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{\phi}) &= \boldsymbol{\phi}^T(0)(A^TP + PA + PA_\tau Q^{-1}A_\tau^TP + Q)\boldsymbol{\phi}(0) \\ &\quad - [\boldsymbol{\phi}(-\tau) - Q^{-1}A_\tau^TP\boldsymbol{\phi}(0)]^TQ[\boldsymbol{\phi}(-\tau) - Q^{-1}A_\tau^TP\boldsymbol{\phi}(0)] \\ &\leqslant \boldsymbol{\phi}^T(0)(A^TP + PA + PA_\tau Q^{-1}A_\tau^TP + Q)\boldsymbol{\phi}(0) \\ &= -\boldsymbol{\phi}^T(0)W\boldsymbol{\phi}(0).\end{aligned}$$

对 $V(\boldsymbol{\phi})$, 由于 $P > 0$, $Q > 0$. 因此有实数 $r > 0$, $k > 0$ 使得

$$r|\boldsymbol{\phi}(0)|^2 \leqslant V(\boldsymbol{\phi}) \leqslant k|\boldsymbol{\phi}|^2.$$

由引理1,如果存在正定对称矩阵 P,Q 能使

$$-W = PA + A^TP + PA_\tau Q^{-1}A_\tau^TP + Q < 0 \tag{2}$$

成立. 则系统(1)的解 $\boldsymbol{x} = 0$ 是一致渐近稳定的. 因为 P,Q 与时滞 $\tau \geqslant 0$ 无关,所以也称系统(1)为无条件稳定.

如果令式(2)中的 $P = I$ 或 $P = Q = I$, 可得到一些简单的稳定性判据. 且计算方便. 在实际工程中确定稳定性时,有其实用价值,不足之处是能确定的稳定性区域小些. 为此,本文讨论了矩阵方程(2)式的原结构形式. 显然,如果存在实数 $m > 1$, $Q = Q^T > 0$ 使得

$$PA + A^TP + PA_\tau Q^{-1}A_\tau^TP + mQ = 0 \tag{3}$$

的解 P 满足 $P = P^T > 0$, 则由(2)式得

$$-W = -mQ + Q = -(m-1)Q < 0.$$

对于方程(3),有

定理. 矩阵方程式(3)存在正定对称矩阵解 P, 且满足 $\mathrm{Res}(A + A_\tau Q^{-1}A_\tau^TP) < 0$ 的充分必要条件是: 由(3)式的系数矩阵构成的 $2n$ 阶矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} A & A_\tau Q^{-1}A_\tau^T \\ -mQ & -A^T \end{bmatrix}.$$

当 $\mathrm{Res}(A) < 0$ 时,满足 $\mathrm{Res}(Z) \neq 0$.

证明见附录.

据此可得到

稳定性判据 1. 设 $\mathrm{Res}(A) < 0$. 如果存在对称矩阵 $Q > 0$, 且实数 $m > 1$, 使得

$$Z = \begin{bmatrix} A & A_\tau Q^{-1}A_\tau^T \\ -mQ & -A^T \end{bmatrix}, \tag{4}$$

满足 $\mathrm{Res}(Z) \neq 0$, 则系统(1)式的解 $\boldsymbol{x} = 0$ 是无条件稳定的.

稳定性判据 2. 如果 $\mathrm{Res}(A) < 0$, 且有实数 $m > 1$, 使得

$$Z = \begin{bmatrix} A & A_\tau A_\tau^T \\ -mI & -A^T \end{bmatrix}. \tag{5}$$

满足 $\mathrm{Res}(Z) \neq 0$, 则系统(1)式的解 $\boldsymbol{x} = 0$ 是无条件稳定的.

令(4)式中的 $Q = I$, 即得(5)式.

为了方便稳定性判据的应用, 分析矩阵 Z 的特征多项式 $f(s) = |sI - Z|$. 由文献

[2]引理 5.3.1，$f(s)$ 的一般形式为

$$f(s)=f(-s)=a_{2n}s^{2n}+a_{2n-2}s^{2n-2}+\cdots+a_2s^2+a_0.$$

由于 $f(s)=0$ 只能有 $2n$ 个特征根，所以若 $f(s)=0$ 有 n 个正实部的根，就必有 n 个负实部的根，即 $\operatorname{Res}(Z)\neq 0$。

根据 Routh 判据[3]，对 $f(s)$ 所构成的 Routh 阵列，若表中第一列元素不完全同号，且符号改变的次数正好是 n 次，则方程 $f(s)=f(-s)=0$ 有 n 个正实部的根和 n 个负实部的根．即

$$\operatorname{Res}[f(s)]\neq 0 \text{ 或 } \operatorname{Res}(Z)\neq 0.$$

二、应用举例

设系统为

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}x(t)+a\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}x(t-\tau),$$

试求其无条件稳定的条件．

解：显然 $\operatorname{Res}(A)<0$，取 $Q=\begin{bmatrix}q_{11} & 0\\ 0 & q_{22}\end{bmatrix}$ 则

$$f(s)=|sI-Z|=s^4-\left[25+\left(5+\frac{q_{11}}{q_{22}}\right)ma^2\right]s^2$$

$$+4m^2a^4-\left(73+9\frac{q_{11}}{q_{22}}\right)ma^2+144=0.$$

若要 $\operatorname{Res}[f(s)]\neq 0$，必须有

$$4m^2a^4-\left(73+9\frac{q_{11}}{q_{22}}\right)ma^2+144>0,$$

取 $q_{22}=1, q_{11}=0.01, m=1.01$，可得该系统无条件稳定的充分条件是：$|a|<1.4913$；

文献[4]获得的稳定条件：$|a|<1.3592$；

文献[5]获得的稳定的充要条件：$|a|<1.5$．

事实上，若取 $q_{22}\gg q_{11}>0$，$m\to 1$，就有 $|a|<1.5$．

附　　录

引理 2[2]．对任意正定对称矩阵 Q，方程

$$XA+A^TX=-Q,$$

存在正定对称矩阵解 X 的充分必要条件是

$$\operatorname{Res}(A)<0.$$

以下证明本文提出的定理．

必要性．设 $P=P^T>0$．由定理5.3.1[2]，$A+A_\tau Q^{-1}A_\tau^TP$ 的特征值也是 Z 的特征值，而 Z 的特征值又是对虚轴，实轴对称的．所以 $\operatorname{Res}(A+A_\tau Q^{-1}A_\tau^TP)<0$ 说明 $\operatorname{Res}(Z)\neq 0$．同时将方程(3)式记为

$$PA+A^TP=-[Q+PA_\tau Q^{-1}A_\tau^TP].$$

这里将方程(3)式中的$m>1$暂作$m=1$来记,并不影响讨论结果. 而$Q=Q^T>0$, $P=P^T>0$, 则由引理2得: $\mathrm{Res}(A)<0$.

充分性. 设$\mathrm{Res}(Z)\fallingdotseq 0$, 则$Z$的若唐标准形可表示为$\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \tilde{J}\end{bmatrix}$, 其中$\mathrm{Res}(J)<0$, $\mathrm{Res}(\tilde{J})>0$. 记$\begin{bmatrix} T & M \\ W & N\end{bmatrix}$为变换矩阵,即

$$\begin{bmatrix} T & M \\ W & N\end{bmatrix}^{-1} Z \begin{bmatrix} T & M \\ W & N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \tilde{J}\end{bmatrix},$$

或

$$Z\begin{bmatrix} T \\ W\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ W\end{bmatrix} J,$$

且$\begin{bmatrix} T \\ W\end{bmatrix}$的列向量是线性独立的. 由定理5.3.12[2],当满足$\mathrm{Res}(Z)\fallingdotseq 0$, $\mathrm{Res}(A)<0$及$A_\tau Q^{-1}A_\tau^T=BB^T$时, T必为可逆阵. 根据定理5.3.1[2], $P=WT^{-1}$是方程(3)式的一个解. 由于$\mathrm{Res}(Z)\fallingdotseq 0$, 则$\mathrm{Res}(A+A_\tau Q^{-1}A_\tau^T P)<0$, 根据定理5.3.4[2],这个解是实对称的, 据引理2 $\mathrm{Res}(A)<0$, 此解又是正定对称的. 证毕.

参 考 文 献

[1] HALE, J. K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag New York Heidelbery Berlin, (1977), 14 and 105—107.
[2] 韩京清等编著,线性系统理论代数基础,辽宁科技出版社,(1979).
[3] (美)本杰明 C. 郭,自动控制系统,张一中译,水利电力出版社,(1983),271—278.
[4] A. HMAMED+, *Int. J.Contr.*, **43**(1986), 2, 460—461.
[5] 张作元,科学通报, **31**(1986),(23),1768—1771.

THE STABILITY CRITERION OF TIME DELAY CONTROL SYSTEM

TIAN CUNSHENG ZHANG YINGLIN

(Dept. of Electronics and Information Science, Lanzhou University, Lanzhou 730000)

ABSTRACT

In this paper, the sufficient conditions, in the sense of Liapunov, of delay-independent stability of the delay control system $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_\tau \boldsymbol{x}(t-\tau)$ are obtained. The example presented shows that this stability criterion not only is concise and easy to use, but also can obtain some extension of the stable region.

Key words: Time-delay; asymptotic stability; delay-indenpendent stability.