第26卷第2期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.26, No.2
2006年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 2006

文章编号: 1000-341X(2006)02-0361-04 **文献标识码**: **A**

关于 Γ 函数的一个凸性结果及其应用

陈超平， 祁 锋
(河南理工大学数学与信息科学学院，河南 焦作 454010)
(E-mail: chenchaoping@hpu.edu.cn)

摘 要: 利用 Γ 函数和它的对数微商的一些性质以及 Laplace 变换的卷积定理， Γ 函数的一个凸性结果被获得. 作为应用，著名的 Wallis 不等式被改进.

关键词: Γ 函数；凸性； Wallis 不等式.
MSC(2000): 33B15, 26A48
中图分类: O174.66

1 预备知识

Γ 函数在实分析中通常定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \quad (x>0). \tag{1}$$

Γ 函数的对数微商 $\psi=\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ 有下面积分表示

$$\psi(x)=-\gamma+\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t \quad (x>0), \tag{2}$$

这里 $\gamma=0.5772157\cdots$ 为 Euler 常数. 清楚地，

$$\psi'(x)=\int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t \quad (x>0). \tag{3}$$

渐近展开式

$$x^{b-a}\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)}=1+\frac{(a-b)(a+b-1)}{2x}+O(x^{-2}) \quad (x\to\infty) \tag{4}$$

成立 (见 [1, p.257], [2], [3, p.378])

2 主要结果及其证明

定理 1 $f(x)=[\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}]^2$ 在 $(-\frac{1}{2},\infty)$ 上为严格凸函数.

证明 清楚地，

$$f'(x)=2[\psi(x+1)-\psi(x+\frac{1}{2})]f(x).$$

收稿日期: 2004-03-28
基金项目: 国家自然科学基金 (10001016), 河南省杰出青年科学基金 (0112000200) 和河南省高等学校创新人才培养工程基金.

利用 (2) 和 (3) 得到

$$\begin{aligned}\frac{f''(x)}{2f(x)} =&\psi'(x+1)-\psi'(x+\frac{1}{2})+2[\psi(x+1)-\psi(x+\frac{1}{2})]^2\\ =&\int_0^\infty \frac{t[e^{-(x+1)t}-e^{-(x+1/2)t}]}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t+2(\int_0^\infty \frac{e^{-(x+1/2)t}-e^{-(x+1)t}]}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t)^2\\ =&-\int_0^\infty tg(t)e^{-(x+1/2)t}\mathrm{d}t+2(\int_0^\infty g(t)e^{-(x+1/2)t}\mathrm{d}t)^2,\end{aligned} \tag{5}$$

这里

$$g(t)=(1+e^{-t/2})^{-1}.$$

利用 Laplace 变换的卷积定理， (5) 可以写成

$$\begin{aligned}\frac{f''(x)}{2f(x)} &= -\int_0^\infty tg(t)e^{-(x+1/2)t}\mathrm{d}t+2\int_0^\infty [\int_0^t g(s)g(t-s)\mathrm{d}s]e^{-(x+1/2)t}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty h(t)e^{-(x+1/2)t}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{6}$$

这里

$$h(t)=\int_0^t [2g(s)g(t-s)-g(t)]\mathrm{d}s. \tag{7}$$

现在我们证明：对于 $0<s<t$, 有

$$2g(s)g(t-s)-g(t)>0, \tag{8}$$

(8) 等价于

$$2(1+e^{-t/2})>(1+e^{-s/2})(1+e^{-(t-s)/2}).$$

设

$$\varphi(t)=\ln[2(1+e^{-t/2})]-\ln(1+e^{-s/2})-\ln(1+e^{-(t-s)/2}),\quad t>s>0.$$

简单计算给出

$$\varphi'(t)=-\frac{1}{2(1+e^{t/2})}+\frac{1}{2[1+e^{(t-s)/2}]}>0.$$

因此，我们有 $\varphi(t)>\varphi(s)=0$, 这意味着不等式 (8) 成立. (6),(7) 和 (8) 结合导出所需结果 $f''(x)>0$. □

定理 2 $Q_n=[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}]^2$ 是严格凸数列，且有

$$[\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}]^2-[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}]^2<1\quad (n\geq 1). \tag{9}$$

证明 因为 $f(x)=[\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}]^2$ 在 $(-\frac{1}{2},\infty)$ 上为严格凸函数，所以

$$f(x+2)+f(x)>2f(x+1),\quad x\in(-1/2,\infty).$$

特别地,

$$Q_{n+2}+Q_n=f(n+2)+f(n)>2f(n+1)=2Q_{n+1}, \tag{10}$$

这意味着 Q_n 为严格凸数列. 将 (10) 写成

$$Q_{n+1} - Q_n < Q_{n+2} - Q_{n+1}, \tag{11}$$

很清楚，数列 $R_n = Q_{n+1} - Q_n$ 严格递增.

众所周知

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}). \tag{12}$$

特别地，在 (12) 中令 $x = \frac{\pi}{2}$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{4k^2}) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} [\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 (2n+1). \end{aligned} \tag{13}$$

注意到

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad 2^n n! = (2n)!!, \tag{14}$$

由 R_n 的严格单调递增性以及 (13) 和 (14), 有

$$\begin{aligned} R_n &< \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{(2n+1)^2} [\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}]^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{(2n+1)^2} [\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}]^2 = 1. \end{aligned}$$

因此， (9) 成立. □

推论 1 数列 $S_n = [\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}]^2 - n$ 是严格递减的.

证明 只须证明对一切自然数 n 有 $S_{n+1} < S_n$, 这等价于 (9). □

3 推论 1 的一个应用

利用推论 1, 著名的 Wallis 不等式 [4,5,6]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{4})}} \quad (n \ge 1)$$

可以改进成下面的

定理 3 对一切自然数 n, 有

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{4}{\pi}-1)}} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{4})}}, \tag{15}$$

其中下界和上界中的两个常数 $\frac{4}{\pi} - 1$ 和 $\frac{1}{4}$ 是最好可能的.

证明 由 (14), 不等式 (15) 等价于

$$\frac{1}{4} < [\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}]^2 - n \le \frac{4}{\pi} - 1.$$

因为 S_n 是严格递减的，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n < S_n \le S_1 = \frac{4}{\pi} - 1.$$

利用渐近展开式 (4), 从

$$S_n = n[n^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} - 1][n^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} + 1]$$

推出 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$. □

参考文献:

[1] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* [M]. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series **55**, 9th printing, Dover, New York, 1972.

[2] FRENZER C L. *Error bounds for asymptotic expansions of the ratio of two gamma functions* [J]. SIAM J. Math. Anal., 1987, **18**: 890–896.

[3] NIKIFOROV A F, UVAROV V B. *Special Functions of Mathematical Physics* [M]. Birkhauser, Basel, 1988.

[4] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 第二版，长沙：湖南教育出版社， 1993.
KUANG Ji-chang. *Applied Inequalities* [M]. 2nd edition, Changsha: Hunan Education Press, 1993. (in Chinese)

[5] BULLEN P S. *A Dictionary of Inequalities* [M]. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **97**, Addison Wesley Longman Limited, 1998.

[6] KAZARRINOFF N D. *Analytic Inequalities* [M]. Holt, Rhinehart and Winston, New York, 1961.

A Convexity Result for Gamma Function and Its Application

CHEN Chao-ping, QI Feng
(College of Math. & Inform., Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454010, China)

Abstract: By using some properties of Γ function and its logarithmic derivative, and the convolution theorem for Laplace transforms, a convexity result of Γ function is obtained. As an application, the well-known Wallis' inequality is refined.

Key words: Γ function; convexity; Wallis' inequality.