第27卷第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.1
2007年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)01-0135-10 **文献标识码**: A

实值非负函数关于集值序增函数的集值 Riemann-Stieltjes 积分

薛 红, 王拉省
(西安工程大学理学院, 陕西 西安 710048)
(E-mail: xuehonghong@shou.com)

摘 要: 本文首先建立了实值非负函数关于集值序增函数的集值 Riemann-Stieltjes 积分, 并讨论了集值 Riemann-Stieltjes 积分的性质, 给出了集值 Riemann-Stieltjes 可积的充要条件, 最后引入了集值 Riemann-Stieltjes 随机积分.

关键词: 集值序增过程; 集值 Riemann-Stieltjes 积分; 集值随机积分.
MSC(2000): 28B20
中图分类: O177.2

1 引言及预备知识

随着集值随机过程与集值测度理论的研究和发展 [1,2], 有必要建立集值随机积分理论. 文 [3] 引入有界变差弱紧凸集值过程, 建立了集值 Lebesgue-Stieltjes 积分. 本文利用文 [4] 半序的概念, 首先引入集值序增函数的概念, 定义了实值非负函数关于集值序增函数的集值 Riemann-Stieltjes 积分, 并讨论了积分的性质, 给出了集值 Riemann-Stieltjes 可积的充要条件, 最后给出了实值非负随机过程关于集值序增过程的集值随机积分.

设 X 是实可分 Banach 空间, 其对偶空间为 X^*, 记

$$P_0(X)=\{A\subset X: A\neq\emptyset\};$$
$$P_{(b))f(c)}(X)=\{A\in P_0(X)\text{是 (有界) 闭 (凸) 集}\}.$$

设 $A,B\in P_0(X)$, 令

$$A+B=\{x+y: x\in A,\ y\in B\};$$
$$A\oplus B=\mathrm{cl}(A+B),\ \text{其中 } \mathrm{cl}(A)\text{表示}A\text{的闭包};$$
$$A\ominus B=\{x\in X: B_x\subset A\},\ \text{其中 } B_x=B+\{x\};$$
$$\sigma(x^*,A)=\sup\{<x^*,x>:\ x\in A\},\ x^*\in X^*;$$
$$d(x,A)=\inf\{\|x-y\|: y\in A\},\ x\in X;$$
$$h(A,B)=\max\{\sup_{x\in A}d(x,B),\quad \sup_{y\in B}d(y,A)\}.$$

收稿日期: 2004-10-21; **接受日期**: 2005-07-12
基金项目: 陕西省教育厅自然科学专项基金 (03JK063)

定义 1.1　(1) 称 $\sigma(x^*,A)$ 为 A 的支撑函数，$d(x,A)$ 为 x 到 A 的距离，$h(A,B)$ 为 A,B 的 Hausdorff 距离.

(2) 设 $\{A_n\}\subset P_f(X)$, $A\in P_f(X)$, 如果对 $\forall\ x^*\in X^*$, $\lim_{n\to+\infty}\sigma(x^*,A_n)=(x^*,A)$, 称 $\{A_n\}$ 弱收敛到 A, 记为 $(w)\lim_{n\to+\infty}A_n=A$.

(3) 如果对 $\forall\ x\in X$, $\lim_{n\to+\infty}d(x,A_n)=d(x,A)$, 称 $\{A_n\}$Wijsman 收敛到 A, 记为 $(Wijs)\lim_{n\to+\infty}A_n=A$.

(4) 如果 $\lim_{n\to+\infty}h(A_n,A)=0$, 称 $\{A_n\}$Hausdorff 收敛到 A, 记为 $(h)\lim_{n\to+\infty}A_n=A$.

超空间 $(P_{bfc}(X),h)$ 是完备的度量空间 [2].

命题 1.1[4]　(1) 若 $A,B\in P_0(X)$, 则 $B\ominus A=\bigcap_{x\in -A}B_x$, 其中 $-A=\{-x:x\in A\}$.

(2) 设 $A\in P_{bfc}(X),B\in P_{fc}(X)$, 如果存在 $C\in P_{fc}(X)$, 使得 $B=A\oplus C$, 则 $C=B\ominus A$.

设 X 为一可分的 Banach 格，其正锥记为 X^+, 记

$$P_{(b)fc}(X^+)=\{A\in P_{(b)fc}(X):A\subset X^+\}.$$

定义 1.2[4]　设 X 为一可分的 Banach 格，$A,B\in P_{bfc}(X)$, 如果存在 $C\in P_{fc}(X^+)$, 使得 $B=A\oplus C$, 则称 $A\preceq B$.

容易证明 $(P_{bfc}(X),\preceq)$ 为一半序空间，即对任意的 $A,B,C\in P_{bfc}(X)$, 有

1) $A\preceq A$;

2) 若 $A\preceq B,B\preceq C$, 则 $A\preceq C$;

3) 若 $A\preceq B,B\preceq A$, 则 $A=B$.

定义 1.3　(1) 称集值映射 $G(t):\mathbf{R}\to P_{bfc}(X)$ 是集值增函数，若对 $\forall\ u<v$, 有 $G(u)\subset G(v)$.

(2) 称集值映射 $G(t):\mathbf{R}\to P_{bfc}(X)$ 是集值序增函数，若对 $\forall\ u<v$, 有 $G(u)\preceq G(v)$, 即

$$G(v)=G(u)\oplus[G(v)\ominus G(u)],$$

其中 $[G(v)\ominus G(u)]\in P_{bfc}(X^+)$.

定义 1.4　设 $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数，令 $\bigvee_a^b(G)=\sup_\pi\sum_{i=1}^n\|G(t_i)\ominus G(t_{i-1})\|$, 其中 π 表示 $[a,b]$ 的一切有限划分 $\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b;\ n\geq 1\}$, 称 $\bigvee_a^b(G)$ 是 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差. 如果 $\bigvee_a^b(G)<+\infty$, 称 $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值有界变差集值序增函数.

例子 1.1　设 $X=\mathbf{R}$, $f(t)$, $g(t)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，且 $f(t)\leq g(t)$ $(t\in[a,b])$, 令 $G(t)=[f(t),g(t)]$, $t\in[a,b]$, 则 $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 $P_{fc}(\mathbf{R})$ 值集值函数，易证:

1) $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上的集值序增函数当且仅当 $f(t)$, $g(t)$ 均为 $[a,b]$ 上的实值增函数;

2) $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上的集值增函数当且仅当 $f(t)$ 为 $[a,b]$ 上的实值减函数，$g(t)$ 为 $[a,b]$ 上的实值增函数.

由此可看出，集值增函数仅仅是常值过程的推广，并不是实值增函数的推广；而集值序增函数才是实值增函数的集值版本.

2　实值非负函数关于集值序增函数的集值 Riemann-Stieltjes 积分

对于 $\{A_i,\ i=1,2,\cdots,n\}\subset P_{bfc}(X)$, 记 $\sum_{i=1}^n A_i=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$.

定义 2.1　设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的实值非负函数，$G(t)$ 是 $[a,b]$ 上 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数，对 $[a,b]$ 的分割 $\Lambda: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, $\forall\, \xi_i\in[t_{i-1},t_i], i=1,2,\cdots,n$, 作 Riemann-Stieltjes 和：

$$S_\Lambda(f,\xi,G)=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]\in P_{bfc}(X^+),$$
$$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad \xi_i\in[t_{i-1},t_i],\quad i=1,2,\cdots,n.$$

记 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{t_i-t_{i-1}\}$，如果

$$(h)\lim_{\lambda\to 0} S_\Lambda(f,\xi,G)=(h)\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]=A\in P_{bfc}(X^+),\tag{2.1}$$

即对 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 使当 $\lambda<\delta$ 时，有 $h(S_\Lambda(f,\xi,G),A)<\varepsilon$ 成立，则称实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，并称此极限 A 为实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上的集值 Riemann-Stieltjes 积分，记为

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)=A=(h)\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})].\tag{2.2}$$

注 2.1　当 $X=\mathbf{R}$ 且定义在 $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 为单点值函数 $g(t)$ 时，实值非负函数关于集值序增函数的集值 Riemann-Stieltjes 积分即为文 [5] 中常见的实值 Riemann-Stieltjes 积分.

定理 2.1　(1) 设 $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数，则

$$\int_a^b k\mathrm{d}G(t)=k[G(b)\ominus G(a)],\quad \forall\, k\ge 0.$$

(2) 设实值非负函数 $f_1(t), f_2(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上均 Riemann-Stieltjes 可积，则对于任意 $\alpha\ge 0,\beta\ge 0,\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, 实值非负函数 $\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，且

$$\int_a^b[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]\mathrm{d}G(t)=\alpha\int_a^b f_1(t)\mathrm{d}G(t)\oplus\beta\int_a^b f_2(t)\mathrm{d}G(t).$$

证明　(1) 由定义 2.1 和文献 [4] 中的引理 3.3

$$S_\Lambda(k,\xi,G)=\sum_{i=1}^n k[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]=k\sum_{i=1}^n[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]=k[G(b)\ominus G(a)]$$

可推出结论.

(2) 由定义 2.1 和

$$\begin{aligned}S_\Lambda(\alpha f_1+\beta f_2,\xi,G)&=\sum_{i=1}^n[\alpha f_1(\xi_i)+\beta f_2(\xi_i)][G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]\\&=\alpha\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]\oplus\beta\sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]\end{aligned}$$

可得结果.

定理 2.2 实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积的充分必要条件是对 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 使当 $[a,b]$ 的任何两个分割 Λ' 与 Λ'' 满足 $\lambda'<\delta$, $\lambda''<\delta$ 时，有

$$h(S_{\Lambda'}(f,\xi',G),S_{\Lambda''}(f,\xi'',G))<\varepsilon. \tag{2.3}$$

证明 *必要性*. 因为实值函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，由定义 2.1, 对 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $[a,b]$ 的分割 Λ 满足 $\lambda<\delta$ 时，有 $h(S_\Lambda(f,\xi,G),A)<\frac{\varepsilon}{2}$ 成立. 于是对 $[a,b]$ 的任何两个分割 Λ' 与 Λ'', 只要 $\lambda'<\delta$, $\lambda''<\delta$ 时，必有

$$h(S_{\Lambda'}(f,\xi',G),S_{\Lambda''}(f,\xi'',G))\le h(S_{\Lambda'}(f,\xi',G),A)+h(A,S_{\Lambda''}(f,\xi'',G))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \tag{2.4}$$

成立.

充分性. 设对 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 使当 $[a,b]$ 的任何两个分割 Λ' 与 Λ'' 满足 $\lambda'<\delta$, $\lambda''<\delta$ 时，有

$$h(S_{\Lambda'}(f,\xi',G),S_{\Lambda''}(f,\xi'',G))<\varepsilon \tag{2.5}$$

成立. 令 $\Lambda_i^{(k)}$ $(i=1,2)$ 分别为 $[a,b]$ 的一串分割, 且 $\lim_{k\to+\infty}\lambda_i^{(k)}=0$, 则 $\{S_{\Lambda_i^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G)\}$ $(i=1,2)$ 都是柯西列，令

$$\lambda^{(k)}=\begin{cases}\lambda_1^{(k)}, & k\text{为奇数}\\ \lambda_2^{(}k), & k\text{为偶数}\end{cases},\qquad \xi^{(k)}=\begin{cases}\xi_1^{(k)}, & k\text{为奇数}\\ \xi_2^{(k)}, & k\text{为偶数}\end{cases},$$

$$S_{\Lambda^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G)=\begin{cases}S_{\Lambda_1^{(k)}}(f,\xi_1^{(k)},G), & k\text{为奇数}\\ S_{\Lambda_2^{(k)}}(f,\xi_2^{(k)},G), & k\text{为偶数}\end{cases},$$

则 $\{S_{\Lambda^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G)\}$ 为基本列，由超空间 $(P_{bfc}(X^+),h)$ 的完备性知 $\{S_{\Lambda^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G)\}$ 为收敛列. 从而它的奇子列极限与偶子列极限相等，即

$$\lim_{k\to+\infty}S_{\Lambda_1^{(k)}}(f,\xi_1^{(k)},G)=\lim_{k\to+\infty}S_{\Lambda^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G)=\lim_{k\to+\infty}S_{\Lambda_2^{(k)}}(f,\xi_2^{(k)},G), \tag{2.6}$$

由此得到这种极限与 $\{\Lambda^{(k)}\}$ 的选取无关，记此极限为

$$A=\lim_{k\to+\infty}S_{\Lambda^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G).$$

下面证明实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，并且 $A=\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)$.(反证法) 假设 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)\ne A$, 则 $\exists\ \varepsilon_0>0$, 对 $\forall\ k\in\mathbf{N}$, 必有 $[a,b]$ 上的分割 $\Lambda^{(k)}$, 使得 $\lambda^{(k)}<\frac{1}{k}$, 但 $h(S_{\Lambda^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G),A)\ge\varepsilon_0$. 显然, $\lim_{k\to+\infty}\lambda^{(k)}=0$, 但 $\lim_{k\to+\infty}S_{\Lambda^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G)\ne A$, 这与上述结论 $\lim_{k\to+\infty}S_{\Lambda^{(k)}}(f,\xi^{(k)},G)=A$ 相矛盾.

定理 2.3 设实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积， 则对 $\forall\ c\in(a,b)$, 实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上均 Riemann-Stieltjes 可积，并且

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)=\int_a^c f(t)\mathrm{d}G(t)\oplus\int_c^b f(t)\mathrm{d}G(t). \tag{2.7}$$

证明　对 $\forall\ \varepsilon > 0$, 因实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，由定理 2.2 和式 (2.5), 存在 $\delta > 0$, 当 $[a,b]$ 的任何两个分割 Λ_1 与 Λ_2 满足 $\lambda_1 < \delta$, $\lambda_2 < \delta$ 时，有

$$h(S_{\Lambda_1}(f,\xi',G), S_{\Lambda_2}(f,\xi'',G)) < \varepsilon$$

成立．对于 $[a,c]$ 的任意两个分割 Λ_1 与 Λ_2 满足 $\lambda_1 < \delta$, $\lambda_2 < \delta$, 并将它们延拓为 $[a,b]$ 上的分割，不妨仍记为 Λ_1 与 Λ_2, 使得 Λ_1 与 Λ_2 的在 $[c,b]$ 上的分点完全相同且区间长度小于 δ. 所以

$$h(S_{\Lambda_1}(f|_{[a,c]},\xi',G), S_{\Lambda_2}(f|_{[a,c]},\xi'',G)) = h(S_{\Lambda_1}(f,\xi',G), S_{\Lambda_2}(f,\xi'',G)) < \varepsilon,$$

这里在 $[c,b]$ 上， $\xi_i' = \xi_i''$. 再由定理 2.2 知， $f|_{[a,c]}$ 关于 G 在 $[a,c]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积．同理， f 关于 G 在 $[c,d]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积．于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t) &= \lim_{\lambda\to 0} S_{\Lambda_1'\cup\Lambda_2'}(f,\xi,G) = \lim_{\lambda\to 0}[S_{\Lambda_1'}(f|_{[a,c]},\xi',G) \oplus S_{\Lambda_2'}(f|_{[c,b]},\xi'',G)] \\ &= \lim_{\lambda_1\to 0} S_{\Lambda_1'}(f|_{[a,c]},\xi',G) \oplus \lim_{\lambda_2\to 0} S_{\Lambda_2'}(f|_{[c,b]},\xi'',G) = \int_a^c f(t)\mathrm{d}G(t) \oplus \int_c^b f(t)\mathrm{d}G(t),\end{aligned}$$

其中 Λ_1', Λ_2' 分别是 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的分割，λ_1,λ_2 分别是分割 Λ_1',Λ_2' 的最大小区间长度, 而 $\Lambda_1'\cup\Lambda_2'$ 是由 Λ_1', Λ_2' 产生的 $[a,b]$ 是分割，　$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

定理 2.4　如果非负实值函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，则 $F(t) = \int_a^t f(u)\mathrm{d}G(u)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数.

证明　由于实值函数 $f(t)$ 非负， $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数，由定理 2.3, 对 $\forall\ t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [a,b]$, 有

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(u)\mathrm{d}G(t) = \int_a^{t_1} f(u)\mathrm{d}G(t) \oplus \int_{t_1}^{t_2} f(u)\mathrm{d}G(t) = F(t_1) \oplus \int_{t_1}^{t_2} f(u)\mathrm{d}G(t).$$

由于 $\int_{t_1}^{t_2} f(u)\mathrm{d}G(u) \in P_{bfc}(X^+)$, 所以 $F(t_1) \preceq F(t_2)$.

定理 2.5　如果实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积, 则对 $\forall\ x^* \in X^*$, 实值非负函数 $f(t)$ 关于实值函数 $\sigma(x^*, G(t))$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，并且

$$\sigma(x^*, \int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}\sigma(x^*, G(t)), \quad x^* \in X^*.$$

证明　由于实值非负函数 $f(t)$ 关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，则对 $[a,b]$ 的分割 $\Lambda: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \forall \xi_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$(h)\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(t_i) \ominus G(t_{i-1})] = \int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t).$$

由文献 [2] 中定理 1.5.5, Hausdoff 收敛必弱收敛，即

$$(w)\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(t_i) \ominus G(t_{i-1})] = \int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t),$$

从而有

$$\sigma(x^*,\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t))=\lim_{\lambda\to 0}\sigma(x^*,\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})])=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\sigma(x^*,[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})])$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[\sigma(x^*,G(t_i))-\sigma(x^*,G(t_{i-1}))]=\int_a^b f(t)\mathrm{d}\sigma(x^*,G(t)),\quad x^*\in X^*.$$

定理 2.6 设 $f(t)$ 是在 $[a,b]$ 上实值非负连续函数, $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值有界变差集值序增函数, 则 $f(t)$ 关于 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积, 且

$$\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)\|\le M\bigvee_a^b(G),$$

其中 M 是实值非负连续函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值, $\bigvee_a^b(G)$ 是 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 由 $f(t)$ 是在 $[a,b]$ 上实值非负连续函数知, 存在 $\delta_1>0$, 当 $|x-y|<\delta_1$ 时, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 对 $[a,b]$ 的任意两个划分

$$\Lambda_1:\ a=u_0<u_1<\cdots<u_n=b,\ \ \forall\ \xi_i\in[u_{i-1},u_i],\ \ i=1,2,\cdots,n,\ \ \lambda_1=\max_{1\le i\le n}\{u_i-u_{i-1}\};$$

$$\Lambda_2:\ a=v_0<v_1<\cdots<v_m=b,\ \ \forall\ \eta_j\in[v_{j-1},v_j],\ \ j=1,2,\cdots,m,\ \ \lambda_2=\max_{1\le j\le m}\{v_j-v_{j-1}\}.$$

作和式

$$S_{\Lambda_1}=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(u_i)\ominus G(u_{i-1})];\quad S_{\Lambda_2}=\sum_{j=1}^m f(\eta_j)[G(v_j)\ominus G(v_{j-1})].$$

由于

$$[a,b]=\sum_{i=1}^n[u_{i-1},u_i]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m[u_{i-1},u_i]\cap[v_{j-1},v_j]=\sum_{j=1}^m[v_{j-1},v_j]=[a,b],$$

记 $[t_{i-1,j-1},t_{i,j}]=[u_{i-1},u_i]\bigcap[v_{j-1},v_j]$, 则有

$$S_{\Lambda_1}=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(u_i)\ominus G(u_{i-1})]=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\sum_{j=1}^m[G(t_{i,j})\ominus G(t_{i-1,j-1})];$$

$$S_{\Lambda_2}=\sum_{j=1}^m f(\eta_j)[G(v_j)\ominus G(v_{j-1})]=\sum_{j=1}^m f(\eta_j)\sum_{i=1}^n[G(t_{i,j})\ominus G(t_{i-1,j-1})].$$

当 $|\lambda_1|<\delta_2=\frac{\delta_1}{2},|\lambda_2|<\delta_2=\frac{\delta_1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned}h(S_{\Lambda_1},\ S_{\Lambda_2})&=h(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m f(\xi_i)[G(t_{i,j})\ominus G(t_{i-1,j-1})],\ \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n f(\eta_j)[G(t_{i,j})\ominus G(t_{i-1,j-1})])\\&\le\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m|f(\xi_i)-f(\eta_j)|\|G(t_{i,j})\ominus G(t_{i-1,j-1})\|\\&<\varepsilon\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\|G(t_{i,j})\ominus G(t_{i-1,j-1})\|<\varepsilon\bigvee_a^b(G).\end{aligned}$$

由定理 2.2 知 $f(t)$ 关于 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积. 从而

$$\begin{aligned}\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)\| &= \|(h)\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]\|\\ &\le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\|G(t_i)\ominus G(t_{i-1})\|\\ &\le M\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \|G(t_i)\ominus G(t_{i-1})\| \le M\bigvee_a^b(G).\end{aligned}$$

定义 2.2　设 X 是 Riesz 空间，$\|\cdot\|$ 是 X 上的格范数，如果对 $\forall\, x,y\in X$, $x\ge 0, y\ge 0$, 有 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, 则称此格范数为 L- 范数，$(X,\|\cdot\|)$ 称为 L- 空间，完备的 L- 空间称为 AL- 空间.

设 X 是 AL- 空间，易证

1) 当 $A,B\in P_{bfc}(X^+)$ 时，有 $\|A+B\|=\|A\|+\|B\|$;

2) 当 $A\preceq B$ 时，有 $\|A\|\le\|B\|$.

推论 2.1　设 X 是 AL- 空间，$f(t)$ 是 $[a,b]$ 上实值非负连续函数，$G(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值有界变差集值序增函数，则 $\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)\|\le M\ \|G(b)\ominus G(a)\|$, 其中 M 是实值非负连续函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值.

证明　由定理 2.6 知 $f(t)$ 关于 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积，从而

$$\begin{aligned}\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)\| &= \|(h)\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]\| \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\|G(t_i)\ominus G(t_{i-1})\|\\ &\le M\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n\|G(t_i)\ominus G(t_{i-1})\| = M\lim_{\lambda\to 0}\|\sum_{i=1}^n G(t_i)\ominus G(t_{i-1})\|\\ &= M\lim_{\lambda\to 0}\|G(b)\ominus G(a)\| = M\|G(b)\ominus G(a)\|.\end{aligned}$$

定理 2.7　设 $\{f_n(t)\}$ 是 $[a,b]$ 上实值非负连续函数单调列，且 $\{f_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(t)$, 又设 $G(t)$ 为 $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值有界变差集值序增函数，则

$$(h)\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}G(t)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t).$$

证明　由实值非负连续函数列 $f_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(t)$ 知，$f(t)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，再由定理 2.6 知 $f(t)$ 关于 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积. 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 因为 $f_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(t)$, $\exists\, N\in\mathbf{N}$, 当 $n>N$ 时，有

$$\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{\bigvee_a^b(G)+1}.$$

不妨设函数列 $\{f_n(t)\}$ 是 $[a,b]$ 上单调非减，由定理 2.1(2) 有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)=\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}G(t)\oplus\int_a^b[f(t)-f_n(t)]\mathrm{d}G(t),$$

于是，由定理 2.6 得到

$$h(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}G(t), \int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)) = \| \int_a^b [f(t)-f_n(t)]\mathrm{d}G(t)\|$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-f_n(x)| \cdot \bigvee_a^b (G) \le \frac{\varepsilon}{\bigvee_a^b (G)+1} \cdot \bigvee_a^b (G) < \varepsilon,$$

即 $(h)\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}G(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t)$.

定理 2.8 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上实值单调非负连续函数， $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值有界变差集值序增函数列 $\{G_n(t)\}$ 收敛于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增函数 $G(t)$, 并存在常数 $k>0$, 使得

$$\bigvee_a^b (G_n) \le k < +\infty,\ n=1,2,\cdots$$

则 $G(t)$ 必为 $[a,b]$ 上的 $P_{bfc}(X)$ 值有界变差集值序增函数，而且

$$(h)\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\mathrm{d}G_n(t) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t).$$

证明 对 $[a,b]$ 的任何分割 Λ： $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$, 有

$$\sum_{i=1}^m \|G_n(t_i)\ominus G_n(t_{i-1})\| \le \bigvee_a^b (G_n) \le k < +\infty, \quad n=1,2,\cdots$$

令 $n\to+\infty$, 可得 $\sum_{i=1}^m \|G(t_i)\ominus G(t_{i-1})\| \le k$, 从而 $\bigvee_a^b (G) = \sup_\Lambda \sum_{i=1}^n \|G(t_i)\ominus G(t_{i-1})\| \le k$, 即 $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差集值序增函数. 由定理 2.6 知，$f(t)$ 关于 $G(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积， $f(t)$ 关于 $G_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann-Stieltjes 可积， $n=1,2,\cdots$.

不妨设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上单调非减，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 作分割 Λ： $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$, 使连续函数 (也是一致连续函数)f 满足

$$|f(t)-f(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{3k}, \quad \forall\, t\in[t_{i-1},t_i]$$

$$\|\sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t)-f(t_{i-1})]\mathrm{d}G(t)\| \le \frac{\varepsilon}{3k}\sum_{i=1}^m \bigvee_{t_{i-1}}^{t_i} (G) = \frac{\varepsilon}{3k}\bigvee_a^b (G) \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

所以由定理 2.3 以及定理 2.1 有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t) = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\mathrm{d}G(t) = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t)-f(t_{i-1})]\mathrm{d}G(t) \oplus \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t_{i-1})\mathrm{d}G(t)$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t)-f(t_{i-1})]\mathrm{d}G(t) \oplus \sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})],$$

这样

$$h(\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t),\ \sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})]) = \|\sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t)-f(t_{i-1})]\mathrm{d}G(t)\| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

同理有

$$h(\int_a^b f(t)\mathrm{d}G_n(t),\ \sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G_n(t_i)\ominus G_n(t_{i-1})])\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 $\{G_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $G(t)$, 所以对固定的分割 $\Lambda:\ a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$, $\exists\, N\in\mathbf{N}$, 当 $n>N$ 时，有

$$h(\sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G_n(t_i)\ominus G_n(t_{i-1})],\ \sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})])<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是可得

$$\begin{aligned}h(\int_a^b f(t)\mathrm{d}G_n(t),\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t))\le{}& h(\int_a^b f(t)\mathrm{d}G_n(t),\ \sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G_n(t_i)\ominus G_n(t_{i-1})])+\\ & h(\sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G_n(t_i)\ominus G_n(t_{i-1})],\ \sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})])+\\ & h(\int_a^b f(t)\mathrm{d}G(t),\ \sum_{i=1}^m f(t_{i-1})[G(t_i)\ominus G(t_{i-1})])<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.\end{aligned}$$

3 集值 Riemann-Stieltjes 随机积分

考虑实值非负随机过程关于集值序增过程的集值 Riemann-Stieltjes 随机积分.

设 $(\Omega,\mathcal{A},P)$ 是概率空间. $\{f_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 是实值非负随机过程， $\{G_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 是 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增过程，如果对 $\forall\ \omega\in\Omega$, 实值非负随机过程 $\{f_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 的轨道函数关于 $P_{bfc}(X)$ 值集值序增过程 $\{G_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 的轨道函数 Riemann-Stieltjes 可积，记

$$B(\omega)=\int_a^b f_t(\omega)\mathrm{d}G_t(\omega).$$

由集值 Riemann-Stieltjes 积分的定义 2.1 、 Hausdoff 收敛与 Wijsman 收敛的关系以及集值随机变量概念，易证 $B(\omega)=\int_a^b f_t(\omega)\mathrm{d}G_t(\omega)$ 为集值随机变量. 类似定义

$$B_t(\omega)=\int_a^t f_u(\omega)\mathrm{d}G_u(\omega),\quad t\in[a,b].$$

则 $\{B_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 是 $P_{bfc}(X^+)$ 值集值随机过程. 由定理 2.4 知, $\{B_t(\omega),t\in[a,b]\}$ 是 $P_{bfc}(X^+)$ 值集值序增过程.

参考文献:

[1] PAPAGEORGIOU N S. *On the theory of Banach space valued multifunction. 1: integration and conditional expectation. 2: set valued martingales and set valued measure* [J]. J. Multivariate Anal., 1985, **17**(2): 185–227.

[2] 张文修，汪振鹏，高勇．集值随机过程 [M]. 北京：科学出版社， 1996.
ZHANG Wen-xiu, WANG Zheng-peng, GAO Yong. *Set Valued Stochastic Processes* [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)

[3] WANG Zhen-peng, WANG Rong-ming. *Set-valued Lebesgue-Stieltjes integrals* [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 1997, **13**(3): 303–316.

[4] SHEN Liang, WANG Zhen-peng. *A new semi-order in superspace $P_{bfc}(X)$ and its application* [J]. Chinese J. Appl. Probab. Statist., 1996, **12**(4): 411–421.

[5] 徐森林. 实变函数论 [M]. 合肥：中国科学技术大学出版社， 2003.
XU Sen-lin. *Theory of Functions of Real Variables* [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2003. (in Chinese)

Set-Valued Riemann-Stieltjes Integral of Real Non-Negative Function with Respect to Set-Valued Order Increasing Function

XUE Hong,   WANG La-sheng
(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Shaanxi 710048, China)

Abstract: In this paper, we establish the set-valued Riemann-Stieltjes integral of a real valued non-negative function with respect to set-valued order increasing function. Then, we discuss the properties of the set-valued Riemann-Stieltjes integral. Some sufficent and necessary conditions for Riemann-Stieltjes integrability are obtained. Finally, we introduce the set-valued Riemann-Stieltjes stochastic integral.

Key words: set-valued order increasing process; set-valued Riemann-Stieltjes integral; set-valued Riemann-Stieltjes stochastic integral.